ロスビー波 (2 次元非発散球面)

林 祥介

2014 年 04 月 18 日

目 次

1 支配方程式 1

1.1 球面 2 次元非発散方程式 1
1.2 流線関数と渦度方程式 3

2 保存則 5

2.1 角運動量保存則 5
2.2 運動エネルギー保存則 6
2.3 エンストロフィー保存則 7
2.4 その他の有用な保存則 7
2.5 カシミール 8

3 線型, 弱非線形理論 9

3.1 展開 9
3.2 渦度方程式の振幅展開 9
3.3 角運動量保存則の振幅展開 10
3.4 1 次の量に関する 2 次の保存則 11
3.5 擬角運動量 12

4 WKB 13

4.1 展開 13
4.2 波数, 振動数 13
4.3 局所分散関係 14
4.4 波線方程式 14
4.5 wave action 保存則 15

5 WKB 近似で記述される球面伝播 21
5.1 波数, 振動数の振舞い 21
5.2 臨界緯度 (critical latitude) 21
5.3 剛体回転している基本場上の伝搬 22

A 球面座標 24
A.1 座標系と単位ベクトル 24
A.2 単位ベクトルの微分 25
A.3 微分演算子 25
A.4 球面上の面積分 26
A.5 連続の式 27
A.6 ナビエストークス方程式 27
A.7 参考：歪テンソル 28
A.8 渦度方程式 29

B 非発散 2 次元球面方程式系の導出 31
B.1 球面への拘束 31
B.2 連続の式 31
B.3 ナビエストークスの式 31
B.4 渦度方程式 32
B.5 流線関数を用いた表現 32
B.6 まとめ 33

1 支配方程式

1.1 球面 2 次元非発散方程式

支配方程式は次のように書きくだせる (Appendix 参照).

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial u}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi uv}{a} - 2\Omega\sin\phi v = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p + f_\lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial v}{\partial\phi} + \frac{\tan\phi u^2}{a} + 2\Omega\sin\phi u = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}p + f_\phi, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v = 0. \quad (3)$$

ただし,

[0]本編は/参照基礎/地球流体/線型波動/ロスビー波/ に位置するものである.

(λ, ϕ)	(経度, 緯度),
(u, v)	速度 (東向き成分, 北向き成分)
Ω	系 (球殻) の自転角速度
a	球殻の半径
(f_λ, f_ϕ)	外力, 粘性散逸項
p	圧力
ρ_0	密度 (定数)

適当な速度スケール U を導入することにより次のような無次元化をおこない, 世界を半径 1 の球面に規格化する:

速度スケール	U
空間スケール	a
時間スケール	$\dfrac{a}{U}$

規格化された方程式系は次のようになる:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t^*}u^* + \frac{u^*}{\cos\phi}\frac{\partial u^*}{\partial\lambda} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial\phi} - \tan\phi u^* v^* - 2\Omega^*\sin\phi v^* &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p^* + f^*_\lambda, \\
\frac{\partial}{\partial t^*}v^* + \frac{u^*}{\cos\phi}\frac{\partial v^*}{\partial\lambda} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial\phi} + \tan\phi u^{*2} + 2\Omega^*\sin\phi u^* &= -\frac{\partial}{\partial\phi}p^* + f^*_\phi, \\
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u^* + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v^* &= 0.
\end{aligned}$$

ただし

Ω^*	$\equiv \Omega\dfrac{a}{U}$	無次元化された系の自転角速度,
p^*	$\equiv \dfrac{p}{\rho_0 U^2}$	無次元化された圧力,
$f^*_{[\lambda,\phi]}$	$\equiv f_{[\lambda,\phi]}\dfrac{a}{U^2}$	無次元化された外力.

$*$ を省略して書くことにすれば,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u + \left(u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + v\frac{\partial}{\partial\phi}\right)u - \tan\phi uv - 2\Omega\sin\phi v &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p + f_\lambda, \quad (4) \\
\frac{\partial}{\partial t}v + \left(u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + v\frac{\partial}{\partial\phi}\right)v + \tan\phi u^2 + 2\Omega\sin\phi u &= -\frac{\partial}{\partial\phi}p + f_\phi, \quad (5) \\
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v &= 0. \quad (6)
\end{aligned}$$

粘性散逸項の表現例として, 通常の非発散歪みテンソルの表現を球面 2 次元化し

たものを用いれば

$$f_\lambda = \nu\left[(\nabla_h^2+2)u - \frac{2\sin\phi}{\cos^2\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{u}{\cos^2\phi}\right], \tag{7}$$

$$f_\phi = \nu\left[(\nabla_h^2+2)v + \frac{2\sin\phi}{\cos^2\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{v}{\cos^2\phi}\right]. \tag{8}$$

詳細は Appendix を参照されたい.

1.2　流線関数と渦度方程式

(6) で記されるように非発散系を扱っているので 流線関数 ψ を導入する:

$$u \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \tag{9}$$

$$v \equiv \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}. \tag{10}$$

相対渦度 ζ, 絶対渦度 q はそれぞれ

$$\begin{aligned}\zeta &\equiv \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi u)\\ &= \left[\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]\psi\\ &= \nabla_h^2\psi, \end{aligned} \tag{11}$$

$$q \equiv \zeta + 2\Omega\sin\phi \tag{12}$$

となる. ただし, ∇_h^2 は球面上のラプラシアン,

$$\nabla_h^2 \equiv \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{13}$$

である.

運動方程式 (4), (5) から渦度方程式を導き, 流線関数を用いて表現すれば,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2\psi - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\phi} + 2\Omega\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = f_q. \qquad (14)}$$

ここで, f_q は外力, 粘性による渦度生成消滅項で

$$f_q \equiv \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial f_\phi}{\partial\lambda} - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi f_\lambda}{\partial\phi} \tag{15}$$

である. 粘性散逸項の表現例として, 運動方程式での例に対応するものをあげておくと

$$f_q \;=\; \nu(\nabla_h^2 + 2)\nabla_h^2 \psi. \tag{16}$$

「+2」に注意 (Appendix を参照).

反対称作用素

$$J(X,Y) \;\equiv\; \frac{\partial X}{\partial \lambda}\frac{\partial Y}{\partial \phi} - \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\frac{\partial X}{\partial \phi} \tag{17}$$

を用いて記せば

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{1}{\cos\phi}J(\psi,\zeta) + 2\Omega\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \;=\; f_q, \tag{18}$$

あるいは,

$$\frac{\partial}{\partial t}q + \frac{1}{\cos\phi}J(\psi,q) \;=\; f_q. \tag{19}$$

2 保存則

2.1 角運動量保存則

運動方程式の λ 成分は角運動量保存則に他ならない. 角運動量 $(u+\Omega\cos\phi)\cos\phi$ が陽に現れる形で書き換えると

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+v\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\{(u+\Omega\cos\phi)\cos\phi\} = -\frac{\partial}{\partial\lambda}p+f_\lambda\cos\phi. \quad (20)$$

あるいはフラックス形で書いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(u\cos\phi)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(u^2\cos\phi)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\{v(u+\Omega\cos\phi)\cos^2\phi\}& \\ = -\frac{\partial}{\partial\lambda}p+f_\lambda\cos\phi.& \quad (21)\end{aligned}$$

渦度擾乱 (ロスビー波) による角運動量のやりとりを考えるために, 渦度を用いた表現に変形すれば[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}(u\cos\phi)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{u^2+v^2}{2}-(2\Omega\sin\phi+\zeta)v\cos\phi = -\frac{\partial}{\partial\lambda}p+f_\lambda\cos\phi. \quad (22)$$

東西平均 “$\overline{\quad}$” を

$$\overline{\quad} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda \quad (23)$$

で定義すれば, 東西平均角運動量 (いわゆる角運動量) の保存則は[2]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u}\cos\phi)-\overline{v\zeta}\cos\phi = \overline{f_\lambda}\cos\phi. \quad (24)$$

[1] 一般には

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(2\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\zeta})\times\boldsymbol{v}+\nabla\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{f}.$$

[2] このことは渦度方程式 (18) の東西平均を計算しても確かめられる. 実際

$$\begin{aligned}\overline{\zeta} &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\overline{u}\cos\phi}{\partial\phi},\\ \overline{\frac{1}{\cos\phi}J(\psi,\zeta)} &= \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\overline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\zeta\right)},\end{aligned}$$

角運動量流速の収束は

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\overline{(u+\Omega\cos\phi)v}\cos^2\phi) = -\overline{vq}\cos\phi = -\overline{v\zeta}\cos\phi \qquad (25)$$

であることに注意.

2.2 運動エネルギー保存則

運動エネルギー $(u^2+v^2)/2$ の保存則は運動方程式から直ちに得られる:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+v\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\frac{u^2+v^2}{2} = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial up}{\partial\lambda}-\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi vp}{\partial\phi}+f_\lambda u+f_\phi v. \qquad (26)$$

あるいはフラックス形で書いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[u\frac{u^2+v^2}{2}\right]+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\cos\phi v\frac{u^2+v^2}{2}\right]& \\ = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial up}{\partial\lambda}-\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi vp}{\partial\phi}+f_\lambda u+f_\phi v.& \qquad (27)\end{aligned}$$

しかしながらこの形式はあまり用いられない. 通常は圧力 p を消去した形式が用いられる. 渦度方程式 (14) に ψ をかけて変形すれば

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2\right]+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[q\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\psi^2}{2}+\psi\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+\psi f_\phi\right] \\ &\qquad -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\cos\phi\left(q\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\psi^2}{2}-\psi\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+\psi f_\lambda\right)\right] \\ &= -\frac{\partial\psi}{\partial\phi}f_\lambda+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}f_\phi \qquad (28)\end{aligned}$$

$$\overline{f_q} = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\overline{f_\lambda}\cos\phi}{\partial\phi}$$

であるから, (18) の東西平均は

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\overline{u}\cos\phi}{\partial\phi}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\overline{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\zeta}\right) = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\overline{f_\lambda}\cos\phi}{\partial\phi}.$$

極での境界条件を使って積分すれば

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u}\cos\phi)+\overline{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\zeta} = -\overline{f_\lambda}\cos\phi$$

これは (24) にほかならない.

2.3 エンストロフィー保存則

絶対エンストロフィー $q^2/2$ の保存則は渦度方程式 (19) に q をかけることにより直ちに得られる:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{q^2}{2}+u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{q^2}{2}+v\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{q^2}{2} = qf_q, \tag{29}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{q^2}{2}-\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{q^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right]+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{q^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right] = qf_q. \tag{30}$$

相対渦度に対するエンストロフィー $\zeta^2/2$ で書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2}+u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\zeta^2}{2}+v\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\zeta^2}{2}+2\Omega\cos\phi v\zeta = \zeta f_q. \tag{31}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[u\frac{\zeta^2}{2}-2\Omega\cos\phi\frac{u^2-v^2}{2}\right]+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\cos\phi v\frac{\zeta^2}{2}-2\Omega\cos^2\phi uv\right] = \zeta f_q. \tag{32}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2}-\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+\Omega\cos\phi\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2-\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2\right\}\right]&\\ +\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+2\Omega\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right] &= \zeta f_q. \end{aligned}\tag{33}$$

2.4 その他の有用な保存則

角運動量保存則 (24) とエンストロフィー保存則 (31) を東西平均したものとを組み合わせ, $\overline{v\zeta}$ を消去すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{u}\cos\phi+\frac{\overline{\zeta^2}}{4\Omega}\right]+\frac{1}{\cos\phi}\overline{J(\psi,\frac{\zeta^2}{4\Omega})} = \overline{\frac{\zeta}{2\Omega}f_q}+\overline{f_\lambda}\cos\phi. \tag{34}$$

これはいわゆる擬角運動量の一種である (にちがいない).

2.5 カシミール

保存則をより一般的に導くためには, カシミール保存量を持ってきて議論するのがよい. ここでは (角) 運動量–カシミールの方法を用いて議論することにしよう.

3 線型, 弱非線形理論

3.1 展開

世界を軸対称な基本流 $\overline{U} = \overline{U}(\phi)$ と擾乱とにわけ, 擾乱を振幅展開する.

$$
\begin{aligned}
u &= \overline{U} + u' + u^{(2)} + \cdots, & (35)\\
v &= v' + v^{(2)} + \cdots, & (36)\\
\zeta &= \overline{Z} + \zeta' + \zeta^{(2)} + \cdots, & (37)\\
\psi &= \overline{\Psi} + \psi' + \psi^{(2)} + \cdots. & (38)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
\overline{U} &= -\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial \phi}, & (39)\\
u' &= -\frac{\partial \psi'}{\partial \phi}, \quad v' = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda}, & (40)\\
u^{(2)} &= -\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \phi}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \lambda}, & (41)\\
\cdots &,
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z} &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi\,\overline{U}) = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial \phi}\right), & (42)\\
\zeta' &= \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}v' - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi\, u') = \nabla_h^2 \psi', & (43)\\
\zeta^{(2)} &= \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}v^{(2)} - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi\, u^{(2)}) = \nabla_h^2 \psi^{(2)}, & (44)\\
\cdots
\end{aligned}
$$

である.

3.2 渦度方程式の振幅展開

渦度方程式 (18) の変数に振幅展開した表現を代入し各オーダーでまとめると次のようになる.

- 振幅の 1 次の方程式:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \zeta'}{\partial \lambda} + \frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = f'_q. \tag{45}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &\equiv \frac{\partial}{\partial \phi}(2\Omega\sin\phi + \overline{Z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi}\left[2\Omega\sin\phi - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi\overline{U})\right] \\ &= 2\Omega\cos\phi - \frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi\overline{U})\right].\end{aligned} \tag{46}$$

- 振幅の 2 次の方程式:

$$\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial t} + \overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \lambda} + \frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos\phi}J(\psi', \zeta') = f_q^{(2)}. \tag{47}$$

3.3 角運動量保存則の振幅展開

東西平均した角運動量保存則 (24) の変数に振幅展開した表現を代入し各オーダーでまとめると次のようになる.

- 振幅の 1 次の方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u'}\cos\phi) = \overline{f'_\lambda}\cos\phi. \tag{48}$$

振幅の 1 次のオーダーでは角運動量は初期値と強制項 $\overline{f'_\lambda}$ の構造によって完全に決まってしまう (「流体力学的」変化をしない).

- 振幅の 2 次の方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u^{(2)}}\cos\phi) - \overline{v'\zeta'}\cos\phi = \overline{f_\lambda^{(2)}}\cos\phi. \tag{49}$$

この表現をもって, $\cos\phi\overline{u^{(2)}}$ は 1 次の擾乱 ψ' (または ζ') を作るために必要な角運動量である, と解釈される.

もちろんこれらの表現は渦度方程式の振幅展開 (45), (47) の軸対象成分 (東西平均) をとっても直ちに得られる.

3.4 1 次の量に関する 2 次の保存則

1 次の渦度方程式 (45) を変形し, 1 次の量に関する 2 次の保存則を導く. (45) に ζ' をかけて

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta'^2}{2}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\zeta'^2}{2}+\frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\zeta'\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} = \zeta' f'_q. \tag{50}$$

左辺第三項の主要部分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\zeta' &= \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\nabla\cdot_h(\nabla_h\psi)\\ &= \nabla\cdot_h\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\nabla_h\psi\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\nabla_h\psi'\right)^2\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta'^2}{2}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\zeta'^2}{2}+\frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\left[\nabla\cdot_h\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\nabla_h\psi\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\nabla_h\psi'\right)^2\right] = \zeta' f'_q \tag{51}$$

フラックス形式でそろえると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\zeta'^2}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\overline{U}\left(\frac{\zeta'^2}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\right)+\frac{1}{2}\cos\phi\left[\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\phi}\right)^2\right]\right\}&\\ +\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos\phi\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi'}{\partial\phi}\right\} &= \zeta' f'_q\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}.\end{aligned} \tag{52}$$

したがって

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\zeta'^2}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}, \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\equiv \left(\overline{U}\mathcal{A}+\frac{1}{2}\cos\phi\left[\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\phi}\right)^2\right],\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi'}{\partial\phi}\right) \qquad (54)\\ &= \left(\overline{U}\mathcal{A}+\frac{1}{2}\cos\phi(v'^2-u'^2),\cos\phi u'v'\right)\end{aligned}$$

を定義すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}+\nabla\cdot_h\mathcal{F} = \frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\zeta' f'_q \tag{55}$$

である. なお, $\partial\overline{u^{(2)}}/\partial t$ を 2 次の微小量として無視すれば, $\mathcal{A}$ の定義の $\hat{\beta}$ の中にある $\overline{U}$ を東西流速の全量の平均 $\overline{u}$ に置きかえることができる.

3.5 擬角運動量

(50) の東西平均をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}} + \cos\phi\overline{v'\zeta'} = \frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\overline{\zeta' f'_q} \tag{56}$$

2 次の角運動量の式 (49) と組み合わせ, $v'\zeta'$ を消去すれば

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\cos\phi\overline{u^{(2)}} + \frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\right] = \cos\phi\overline{f_\lambda^{(2)}} + \frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\overline{\zeta' f'_q} \qquad (57)}$$

これをもって

$$-\overline{\mathcal{A}} = -\frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}} \tag{58}$$

を 1 次の擾乱の持つ擬角運動量という. $-\int\overline{\mathcal{A}}dS$ は擾乱 ζ' を生成せしめるために系に加えなければならない角運動量に他ならない.

なお, 表現 (57) と表現 (34) とは似て非なることに注意されたい. 角運動量に化けるべき量は, (34) では

$$-\frac{\overline{\zeta^2}}{2}\frac{1}{2\Omega} \tag{59}$$

であったが. (57) では

$$-\frac{\overline{\zeta^2}}{2}\frac{1}{2\Omega - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\overline{U}} \tag{60}$$

である. 両者は $\overline{U} = 0$ の時のみ一致する. 両者の違いは基本場が何であるか, によっている. (34) では静止状態が基本場とみなされているわけである.

4 WKB

WKB 近似を行なえば, 線形化されたシステム (45) の, 波束としての解の振舞いを調べることができる. 以下, (45) の自由波動 ($f'_q = 0$ の場合) を考察してみよう.

4.1 展開

例によって次の形の解を求める[1].

$$\psi' = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(\lambda, \phi, t) e^{i\frac{\Theta((\lambda,\phi,t)}{\varepsilon}} \tag{61}$$

ε は適当な小さいパラメターである.

4.2 波数, 振動数

局所的な波数, 振動数は次のように定義される.

$$k \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}, \tag{62}$$

$$l \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}, \tag{63}$$

$$\omega \equiv -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial t}. \tag{64}$$

波数, 振動数は $O(\varepsilon^{-1})$ であることに注意.

波数, 振動数の定義によりただちに波数保存則と呼ばれる次のような関係が得られる:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda} = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}, \tag{65}$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi} = -\frac{\partial\omega}{\partial\phi}, \tag{66}$$

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial l}{\partial\lambda} = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi} = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi k). \tag{67}$$

[1] ここでは, λ, ϕ, t をいわゆる遅い変数とみなしていることに注意. 場の, λ, ϕ, t で見た時空間的な変化の割合は, 波数, 振動数に比べて十分ゆっくりしているものとする. 言い替えると, 場の変量 X に対して

$$\left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right| \sim O(1), \quad \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\phi}\right| \sim O(1), \quad \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial t}\right| \sim O(1),$$

あるいは

$$\left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right| \ll k, \quad \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\phi}\right| \ll l, \quad \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial t}\right| \ll \omega$$

4.3 局所分散関係

線型化した渦度方程式 (45) に (61) を代入する.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} &= \left[\frac{i}{\varepsilon}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}A_0 + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda} + \cdots\right]e^{i\frac{\Theta}{\varepsilon}}, \\
\frac{\partial\psi'}{\partial\phi} &= \left[\frac{i}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial\phi} + \cdots\right]e^{i\frac{\Theta}{\varepsilon}}, \\
\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2\psi'}{\partial\lambda^2} &= \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{\cos^2\phi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\right)^2 A_0 + \frac{i}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\lambda^2}A_0 + \frac{2}{\cos^2\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}\right) + \cdots\right]e^{i\frac{\Theta}{\varepsilon}}, \\
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\frac{\partial\psi'}{\partial\phi} &= \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\right)^2 A_0 + \frac{i}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\right)A_0 + 2\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\phi}\right) + \cdots\right]e^{i\frac{\Theta}{\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

などに注意して ε の各オーダーでまとめる.

局所分散関係は $O(\varepsilon^{-3})$ よりもとまる.

$$
\boxed{\omega = \overline{U}k - \frac{\hat{\beta}k}{k^2+l^2} \qquad (68)}
$$

$\hat{\beta}$ は $O(\varepsilon^{-2})$ と見なしていることに注意.

4.4 波線方程式

局所的波数, 振動数の変化の式は, 波数保存則 (65) ∼ (67) に分散関係 (68) を用いることにより得られる. 分散関係式を

$$
\omega = \tilde{\omega}(k\cos\phi, l; \lambda, \phi) \qquad (69)
$$

と見なせば,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} \\
&= -\frac{1}{\cos\phi}\left[\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\lambda} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\lambda}\right] \\
&= -\frac{1}{\cos\phi}\left[\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\lambda},\right] \\
\frac{\partial l}{\partial t} &= -\frac{\partial\omega}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left[\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\phi}\right] \\
&= -\left[\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial l}{\partial\lambda} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\phi},\right] \\
\frac{\partial\omega}{\partial t} &= \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} - \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial\omega}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

したがって群速度 $c_{g\lambda}, c_{g\phi}$ を

$$
c_{g\lambda} \equiv \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\cos\phi \tag{70}
$$

$$
c_{g\phi} \equiv \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l} \tag{71}
$$

で定義すれば,

$$
\frac{\partial k\cos\phi}{\partial t} + c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\lambda} + c_{g\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\phi} = -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\lambda}, \tag{72}
$$

$$
\frac{\partial l}{\partial t} + c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial l}{\partial\lambda} + c_{g\phi}\frac{\partial l}{\partial\phi} = -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\phi}, \tag{73}
$$

$$
\tag{74}
$$

$$
\frac{\partial\omega}{\partial t} + c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + c_{g\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\phi} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}, \tag{75}
$$

となる.

群速度の具体的な表現は

$$
c_{g\lambda} = \overline{U} + \frac{\hat{\beta}(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \tag{76}
$$

$$
c_{g\phi} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2}. \tag{77}
$$

4.5 wave action 保存則

振幅 A_0 に関する情報は ε 展開の $O(\varepsilon^{-2})$ よりもとまる. 線型化した渦度方程式 (45) に (61) を代入した結果の $0(\varepsilon^{-2})$ の式は

$$
[(-i\omega + ik\overline{U})\{-(k^2 + l^2)\} + ik\hat{\beta}]A_1
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}\right)\left[(k^2+l^2)A_0\right]\\
&+2(\omega-\overline{U}k)\left(k\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}+l\frac{\partial A_0}{\partial\phi}\right)+(\omega-\overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial\phi}\right)A_0\\
&+\hat{\beta}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda} \qquad = \quad 0.
\end{aligned}
$$

A_1 の係数は局所的分散関係 (68) より 0 となる. 残りの項は A_0 とその微分についてそれぞれまとめると

$$
\begin{aligned}
&-(k^2+l^2)\frac{\partial A_0}{\partial t}\\
&+\{-(k^2+l^2)\overline{U}+2(\omega-\overline{U}k)k+\hat{\beta}\}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}\\
&+2(\omega-\overline{U}k)l\frac{\partial A_0}{\partial\phi}\\
&+\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(k^2+l^2)+(\omega-\overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l}{\partial\phi}\right)\right\}A_0=0.
\end{aligned}
\tag{78}
$$

ここで次のように定義される多項式 $P=P(k,l,\omega)$ を導入する.

$$
P\equiv(\omega-\overline{U}k)(k^2+l^2)+\hat{\beta}k. \tag{79}
$$

$P=0$ は分散関係に他ならない.

$O(\varepsilon^{-2}$ の式 (78) を P をつかって簡略に表記する. (78) 式の $\dfrac{\partial A_0}{\partial t},\dfrac{1}{\cos\phi}\dfrac{\partial A_0}{\partial\lambda},\dfrac{\partial A_0}{\partial\phi}$ の係数に注目するとそれぞれ $-\dfrac{\partial P}{\partial\omega},\dfrac{\partial P}{\partial k},\dfrac{\partial P}{\partial l}$ に対応するので (78) 式は単純に

$$
-\frac{\partial P}{\partial\omega}\frac{\partial A_0}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial P}{\partial l}\frac{\partial A_0}{\partial\phi}+DA_0 \quad = \quad 0. \tag{80}
$$

と記される. ただし D は

$$
D \quad\equiv\quad -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(k^2+l^2)+(\omega-\overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial\phi}\right)
$$

である.

係数は, さらに群速度をもちいて書き直すことができる. 群速度 $\boldsymbol{c}_g$ を P で表わすと,

$$
dP=\frac{\partial P}{\partial k}dk+\frac{\partial P}{\partial l}dl+\frac{\partial P}{\partial\omega}d\omega=0
$$

より,

$$
\begin{aligned}
c_{g\lambda} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_l = -\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^{-1} \\
c_{g\phi} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial l}\right)_K = -\left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

したがって $O(\varepsilon^{-2})$ の式 (80) は結局

$$
-\frac{\partial P}{\partial \omega}\left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial \lambda} + c_{g\phi}\frac{\partial A_0}{\partial \phi}\right) + DA_0 = 0. \tag{81}
$$

さて, D を整理しよう. $\hat{\omega} \equiv \omega - \overline{U}k$ を導入する. $\hat{\omega}$ はシアー流のないときの分散関係から求められる振動数に等しい. また, 流れにのった群速度

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_{g\lambda} &\equiv \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial k} = \frac{\hat{\beta}(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \\
\hat{c}_{g\phi} &\equiv \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial l} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2} = c_{g\phi},
\end{aligned}
$$

を定義しておく. すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial \phi} &= \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}k}\right\} \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} - c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}k^2}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \cos\phi k}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} - \frac{l}{k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial l}{\partial \lambda} \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} - \frac{1}{k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{l^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
&(\omega - \overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial \phi}\right) \\
&\quad = \hat{\omega}\left[\frac{1}{k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{k^2}{2}\right) + \frac{1}{k}\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} - \frac{1}{k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{l^2}{2}\right)\right] \\
&\quad = \frac{\hat{\omega}}{k}\left[\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{k^2-l^2}{2}\right) + \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\}\right] \\
&\quad = -\frac{\hat{\beta}}{k^2+l^2}\left[\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\hat{c}_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} + \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

これらより D は

$$
\begin{aligned}
D &= -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(k^2+l^2)+(\omega-\overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial\phi}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(k^2+l^2) \\
&\quad -\frac{\hat\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\hat c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right] \\
&= -\frac{\hat\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\overline{U}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right)\right. \\
&\qquad +\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\hat c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\} \\
&\qquad \left.+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right] \\
&= -\frac{\hat\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

D の表現をつかって $O(\varepsilon^{-2})$ の式 (81) を書き直せば

$$
\begin{aligned}
&-(k^2+l^2)\left(\frac{\partial A_0}{\partial t}+c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}+c_{g\phi}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\phi}\right) \\
&-\frac{\hat\beta A_0}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right]=0
\end{aligned}
$$

となる.

さらに変形を続けると保存形を導くことができる. 上式に $\dfrac{k^2+l^2}{\hat\beta}A_0\cos\phi$ をかければ

$$
\begin{aligned}
&\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi}{2\hat\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+c_{g\phi}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)A_0^2 \\
&+A_0^2\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi}{2\hat\beta}\right\}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi}{2\hat\beta}\right\}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right]=0
\end{aligned}
$$

よって

$$
\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\}\\&\quad+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos\phi c_{\phi}\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\}=0.\end{aligned}} \tag{82}
$$

$\dfrac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}$ は波束についての保存量となる.

(82) は, 実は (55) に他ならない. 実際, WKB 近似の範囲では,

$$
\begin{aligned}
\langle\mathcal{A}\rangle &= \frac{\langle\zeta'^2\rangle}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\\
&= \frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{4\hat{\beta}} && (83)\\
\langle\mathcal{F}\rangle &= \left(\overline{U}\langle\mathcal{A}\rangle+\frac{1}{2}\cos\phi(\langle v'^2\rangle-\langle u'^2\rangle),\cos\phi\langle u'v'\rangle\right)\\
&= \left(\overline{U}\langle\mathcal{A}\rangle+\hat{c}_{g\lambda}\langle\mathcal{A}\rangle,\hat{c}_{g\phi}\langle\mathcal{A}\rangle\right) && (84)
\end{aligned}
$$

である. ただし $\langle X\rangle$ は位相平均

$$
\langle X\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Xd\frac{\Theta}{\varepsilon}
$$

であり, したがって, 例えば

$$
\begin{aligned}
\langle\psi'^2\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{A_0e^{i\Theta/\varepsilon}+A_0e^{-i\Theta/\varepsilon}}{2}\right)^2 d\frac{\Theta}{\varepsilon}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left(A_0^2e^{2i\Theta/\varepsilon}+2A_0^2+A_0^2e^{-2i\Theta/\varepsilon}\right)d\frac{\Theta}{\varepsilon}\\
&= \frac{A_0^2}{2}
\end{aligned}
$$

表現を変えておこう.

$$
\frac{k\langle E\rangle}{\hat{\omega}} = \frac{(k^2+l^2)^2A_0^2}{4\hat{\beta}}
$$

であるから (82) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k\cos\phi\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(c_{g\lambda}\frac{k\cos\phi\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi c_{g\phi}\frac{k\cos\phi\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)=0. \quad (85)$$

系が λ に依存せず, 従って, 波数保存則 (72) により $k\cos\phi$ が保存される場合には, $k\cos\phi$ を消去して

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(c_{g\lambda}\frac{\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi c_{g\phi}\frac{\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)=0. \qquad (86)}$$

これが球面上のロスビー波の wave action (波の作用) 保存則である.

5　WKB 近似で記述される球面伝播

5.1　波数, 振動数の振舞い

基本場 $\overline{U}$ は ϕ にのみ依存するものとしているので, 分散関係は λ, t を陽には含まない. したがって, 波束は $\omega, k, \dfrac{\langle E\rangle}{\hat{\omega}}$ を 保存しながら伝播してゆく. l は分散関係より

$$l^2 = -\frac{\hat{\beta}k}{\hat{\omega}} - k^2 = \frac{\hat{\beta}}{\overline{U} - c} - k^2 \tag{87}$$

を満たしながら変化してゆく.

5.2　臨界緯度 (critical latitude)

$\hat{\omega} \to 0$ となる臨界緯度 ϕ_c に近づくにつれて $l \to \infty$ となる. また群速度 $c_{g\phi}$ は

$$c_{g\phi} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2} \longrightarrow 0 \tag{88}$$

となる. エネルギー $\displaystyle\int \langle E\rangle dV$ も 0 に近づいてゆく.

ロスビー波の波束が臨界緯度に近付くことは, WKB 近似の範囲では, できない. 実際,

$$\begin{aligned}
\hat{\omega} &\sim -k\overline{U}_\phi(\phi_c)(\phi - \phi_c) \\
l^2 &= -\frac{\hat{\beta}k}{\hat{\omega}} - k^2 \\
&\sim \frac{\hat{\beta}}{\overline{U}_\phi}\frac{1}{\phi - \phi_c} \\
c_{g\phi} &= \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2} \\
&\sim 2\hat{\beta}k\left(\frac{\hat{\beta}}{\overline{U}_\phi}\frac{1}{\phi - \phi_c}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\propto (\phi_c - \phi)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

であるから, $\phi = \phi_1$ から $\phi = \phi_2$ まで波束が伝搬するのに要する時間 T は

$$T = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{c_{g\phi}} \propto \frac{1}{\sqrt{\phi_c - \phi_2}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_c - \phi_1}}$$

$\phi_2 \to \phi_c$ のとき $T \to \infty$ となり波束は臨界緯度に達することができない.

波束の伝播から臨界緯度付近の振舞いを考えたが, ロスビー波の場合はこの議論は正しくない. 臨界緯度付近では, ϕ 方向の波長程度で l が大きく変化するので波束の形 (61) として表せないからである.

波長 $\dfrac{2\pi}{l}$ と波長の変化するスケール $\left(\dfrac{1}{l}\dfrac{dl}{d\phi}\right)^{-1}$ の比は

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{l}\left(\frac{1}{l}\frac{dl}{d\phi}\right)\right| &= \left|\frac{1}{l^2}\frac{dl}{d\phi}\right| = \frac{\hat{\beta}\overline{U}_\phi}{(\overline{U}-c)^2}\cdot\left[\frac{\hat{\beta}}{(\overline{U}-c)}-k^2\right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\hat{\beta}\overline{U}_\phi}{(\overline{U}-c)^{\frac{3}{2}}\{\hat{\beta}-k^2(\overline{U}-c)\}^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

臨界緯度付近では $\overline{U}-c\to 0$ となり, この比が大きくなってしまう.

5.3　剛体回転している基本場上の伝搬

基本場 $\overline{U}$ が剛体回転している場合,

$$
\overline{U} = \tilde{\Omega}\cos\phi, \tag{89}
$$

$$
\hat{\beta} = 2\Omega\cos\phi + +\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\overline{U} = 2(\Omega+\tilde{\Omega})\cos\phi, \tag{90}
$$

にはロスビー波の伝搬特性についてさらに多くのことが語れる.

剛体回転場においては, 波数, 振動数の波に沿っての, すなわち, 群速度で移動する系で見た変化は次のように非常に単純になる:

$$
\begin{aligned}
\omega &= \mathrm{const.}, \\
k &\propto 1/\cos\phi, \\
\hat{\omega} &= \omega-\overline{U}k = \mathrm{const.}, \\
c &= \frac{\omega}{k} \propto \cos\phi, \\
k^2+l^2 &= \frac{\hat{\beta}}{\overline{U}-c} = \mathrm{const.}
\end{aligned}
$$

したがって, 群速度の表現 (76), (77) を

$$
c_{g\lambda} = \overline{U}+\frac{\hat{\beta}(k^2-l^2)}{(k^2+l^2)^2} = c+\frac{2\hat{\omega}^2}{\hat{\beta}}, \tag{91}
$$

$$
c_{g\phi} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2+l^2)^2} = \frac{2l\hat{\omega}^2}{k\hat{\beta}} \tag{92}
$$

と書きかえれば, 波に沿って群速度の大きさは一定,

$$
\begin{aligned}
(c_{g\lambda} - c)^2 + c_{g\phi}^2 &= \left(\frac{2\hat{\omega}^2}{\hat{\beta}}\right)^2 \frac{k^2 + l^2}{k^2} \\
&= \text{const.} \qquad (93)
\end{aligned}
$$

であることがわかる.

さらに, 東西方向の位相速度 c で運動している系, すなわち, $c/\cos\phi$ で剛体回転している系 (λ', ϕ) で見れば, 波線を求めることができる.

$$
\frac{1}{\cos\phi}\frac{d\phi}{d\lambda'} \equiv \frac{c_{g\phi}}{c_{g\lambda} - c} = \frac{l}{k}.
$$

すでに見たように全波数は波に沿って保存するので, これを, K と書くことにすれば,

$$
K^2 \equiv k^2 + l^2 = -\frac{k\hat{\beta}}{\hat{\omega}}. \qquad (94)
$$

したがって, 波線の式は

$$
\frac{1}{\cos\phi}\frac{d\phi}{d\lambda'} = \frac{\sqrt{K^2 - k^2}}{k}
$$

赤道 $\phi = 0$ 上で波数ベクトル (k, l) の k 方向となす角を α とすれば, 波線に沿っての k の ϕ 依存性は

$$
k = \frac{K\cos\alpha}{\cos\phi}
$$

と書けるから

$$
\frac{1}{\cos\phi}\frac{d\phi}{d\lambda'} = \sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\phi}\cos\phi.
$$

これはたやすく積分できて波線の式は次のように与えられる.

$$
\tan\alpha\sin(\lambda' - \lambda'_{eq}) = \tan\phi. \qquad (95)
$$

λ'_{eq} は $\phi = 0$ での経度である. この式は球面上の大円の式に他ならない.

> 剛体回転する基本場の上を伝搬する球面上のロスビー波の波線は, 東西方向に $c/\cos\phi$ で剛体回転している系 (λ', ϕ) で見れば, 大円を描く

というわけである.

A　球面座標

A.1　座標系と単位ベクトル

座標と対応する単位ベクトルを次のようにとることにする (図 A.1 参照[1]).

λ	$\boldsymbol{e}_\lambda$	経度	$(0 \sim 2\pi)$
ϕ	$\boldsymbol{e}_\phi$	緯度	$(-\pi/2 \sim \pi/2)$
r	$\boldsymbol{e}_r$	動系	

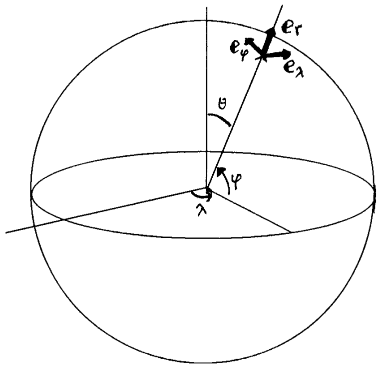

図 **A.1** 緯度経度球座標系

3 次元ユークリッド空間にうめこまれた状況なので

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_\lambda \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}, \tag{96}$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\phi\cos\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi\sin\lambda \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_\lambda \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_r \end{pmatrix}. \tag{97}$$

[1]注意. 余緯度 $\theta \equiv \pi/2 - \phi$ と緯度 ϕ との関係は次の通り.

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \cos\phi \\ \frac{\partial}{\partial\theta} &= -\frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_\theta &= -A_\phi \\ \boldsymbol{e}_\theta &= -\boldsymbol{e}_\phi \end{aligned}$$

ただし, A_θ, A_ϕ はベクトルの成分である.

A.2　単位ベクトルの微分

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\lambda\\ \boldsymbol{e}_\phi\\ \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi-\cos\phi\boldsymbol{e}_r\\ -\sin\phi\boldsymbol{e}_\lambda\\ \cos\phi\boldsymbol{e}_\lambda\end{pmatrix}, \tag{98}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\lambda\\ \boldsymbol{e}_\phi\\ \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{e}_\phi\end{pmatrix}, \tag{99}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\lambda\\ \boldsymbol{e}_\phi\\ \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} = 0. \tag{100}$$

A.3　微分演算子

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}, \tag{101}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= \left(\boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(v_\lambda\boldsymbol{e}_\lambda+v_\phi\boldsymbol{e}_\phi+v_r\boldsymbol{e}_r)\\ &= \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\lambda+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\phi)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r),\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v} &= \left(\boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\times(v_\lambda\boldsymbol{e}_\lambda+v_\phi\boldsymbol{e}_\phi+v_r\boldsymbol{e}_r)\\ &= \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}v_r-\frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi)\right]\\ &\quad+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\lambda)-\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_r\right]\\ &\quad+\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\phi-\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\lambda)\right],\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \nabla\cdot\nabla f\\ &= \left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]f\\ &= \left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-\frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\right]f\\ &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right]f+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}f,\\ &\qquad(\mu=\sin\phi),\end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{A} &= \left(\frac{v_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(A_\lambda\boldsymbol{e}_\lambda+A_\phi\boldsymbol{e}_\phi+A_r\boldsymbol{e}_r)\\
&= \boldsymbol{e}_\lambda\left[\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_\lambda-\frac{\tan\phi}{r}v_\lambda A_\phi+\frac{1}{r}v_\lambda A_r\right]\\
&\quad+\boldsymbol{e}_\phi\left[\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_\phi+\frac{\tan\phi}{r}v_\lambda A_\lambda+\frac{1}{r}v_\phi A_r\right]\\
&\quad+\boldsymbol{e}_r\left[\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_r-\frac{1}{r}v_\lambda A_\lambda-\frac{1}{r}v_\phi A_\phi\right], \qquad (105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{e}_\lambda\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi v_\lambda}{\partial\phi}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 rv_\lambda}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda}\right)\right]\\
&\quad+\boldsymbol{e}_\phi\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 rv_\phi}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\cos\phi v_\lambda}{\partial\phi}\right]\\
&\quad+\boldsymbol{e}_r\left[-\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\lambda^2}-\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial rv_\lambda}{\partial r}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial rv_\phi}{\partial r}\right)\right] \qquad (106)
\end{aligned}$$

注意: 球面上の座標を張ることに存在する条件である. スカラー関数が座標上の極 ($\phi=\pm\pi/2$) で特異でない条件をつけることが必要になる場合が多い. 例えば

$$\left.\frac{\partial^n f}{\partial\lambda^n}\right|_{\phi=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (n=1,2,3,\cdots), \qquad (107)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\phi}\int fe^{-im\lambda}\,d\lambda\right|_{\phi=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (m\neq 1). \qquad (108)$$

後者は波数 1 のもの以外は極において緯度方向 (ϕ 方向) 微分を持ってはいけないということである[2].

A.4 球面上の面積分

面積分:

$$\int dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\phi\int_0^{2\pi}r^2\cos\phi d\lambda = \int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}r^2 d\lambda. \qquad (109)$$

[2] f が C^{-n} 級である, すなわち, ∂_x, ∂_y の作用に関して滑らかであることを要請すればこのような条件が適宜得られる. よく使うのは $\nabla^2 f$ を勘定してみることである.

部分積分. A, B を球面上の滑らかな関数とすれば

$$\int A\nabla^2 B dS = -\int \nabla A\cdot\nabla B dS = \int \nabla^2 A\cdot B dS, \tag{110}$$

$$\int A\frac{\partial B}{\partial\lambda}dS = -\int \frac{\partial A}{\partial\lambda}B dS. \tag{111}$$

A.5　連続の式

連続の式の極座標表示は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\rho v_\lambda+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\rho v_\phi+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}r^2\rho v_r = 0. \tag{112}$$

A.6　ナビエストークス方程式

回転系のナビエストークス方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{113}$$

ただし

$$\nabla^2\boldsymbol{v} \equiv \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}. \tag{114}$$

これを極座標表示すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_\lambda+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_\lambda+\frac{1}{r}(v_r v_\lambda - v_\phi v_\lambda\tan\phi)-2\Omega\sin\phi v_\phi+2\Omega\cos\phi v_r\\
&\quad= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p\\
&\qquad+\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\phi^2}-\frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_\lambda}{\partial r^2}\right.\\
&\qquad\quad\left.+\frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda}-\frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda}-\frac{v_\lambda}{r^2\cos^2\phi}\right],
\end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_\phi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_\phi+\frac{1}{r}(v_r v_\phi + v_\lambda^2\tan\phi)+2\Omega\sin\phi v_\lambda\\
&\quad= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}p\\
&\qquad+\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2}-\frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_\phi}{\partial r^2}\right.\\
&\qquad\quad\left.+\frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\phi}{r^2\cos^2\phi}\right],
\end{aligned} \tag{116}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_r+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_r-\frac{1}{r}(v_\lambda^2+v_\phi^2)-2\Omega\cos\phi v_\lambda$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}p \\
& +\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\phi^2}-\frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_r}{\partial r^2}\right. \\
& \left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{2\tan\phi v_\phi}{r^2}-\frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{2v_r}{r^2}\right]. \qquad (117)
\end{aligned}
$$

ただし, 極座標の極は系の回転軸と一致するように選んである.

A.7　参考：歪テンソル

曲線直行座標系では歪みテンソルは

$$
e_{\xi\eta} = \boldsymbol{e}_\xi\cdot(\boldsymbol{e}_\eta\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}_\eta\cdot(\boldsymbol{e}_\xi\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \qquad (118)
$$

で与えられる. ξ, η に λ, ϕ, r を代入して

$$
\begin{aligned}
e_{\lambda\lambda} &= \frac{2}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{2v_\phi\tan\phi}{r}+2\frac{v_r}{r}, && (119)\\
e_{\phi\phi} &= \frac{2}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+2\frac{v_r}{r}, && (120)\\
e_{rr} &= 2\frac{\partial v_r}{\partial r}, && (121)\\
e_{\lambda\phi} &= \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda}+\frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{v_\lambda}{\cos\phi}, && (122)\\
e_{\phi r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\phi}{r}, && (123)\\
e_{r\lambda} &= r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\lambda}{r}+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda}. && (124)
\end{aligned}
$$

なお, この歪みテンソルに $\nabla\cdot$ を作用しても先のナビエストークス方程式の粘性項の表現は得られないことに注意. 書き下すと

$$
\left(\boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot\left(e_{\xi\eta}\boldsymbol{e}_\xi\otimes\boldsymbol{e}_\eta\right). \qquad (125)
$$

ただし, 同じ添え字が繰り返し出てきた時には縮約ととる. また

$$
\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{e}_\xi\otimes\boldsymbol{e}_\eta \equiv \boldsymbol{e}_\xi\delta_{\zeta\eta} \qquad (126)
$$

である. この計算を実行すると

$$
\left(\boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(e_{\xi\eta}\boldsymbol{e}_\xi\otimes\boldsymbol{e}_\eta\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{e}_\lambda \left\{ \frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial e_{\lambda\lambda}}{\partial\lambda} - 2\sin\phi e_{\lambda\phi} + 2\cos\phi e_{r\lambda}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial e_{\lambda\phi}}{\partial\phi} + e_{r\lambda}\right] + \frac{\partial e_{r\lambda}}{\partial r}\right\} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\phi \left\{ \frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial e_{\lambda\phi}}{\partial\lambda} - \sin\phi e_{\phi\phi} + \cos\phi e_{\phi r} + \sin\phi e_{\lambda\lambda}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial e_{\phi\phi}}{\partial\phi} + 2e_{\phi r}\right] + \frac{\partial e_{\phi r}}{\partial r}\right\} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_r \left\{ \frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial e_{r\lambda}}{\partial\lambda} - \sin\phi e_{\phi r} + \cos\phi e_{rr} - \cos\phi e_{\lambda\lambda}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial e_{\phi r}}{\partial\phi} - e_{\phi\phi} + e_{rr}\right] + \frac{\partial e_{rr}}{\partial r}\right\} \\
&= \boldsymbol{e}_\lambda \left\{ \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_\lambda}{\partial r^2} \right. \\
&\qquad + \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi v_\lambda}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_\lambda}{\partial r}\right] \\
&\qquad \left. + \frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda} - \frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda} - \frac{v_\lambda}{r^2\cos^2\phi}\right\} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\phi \left\{ \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_\phi}{\partial r^2} \right. \\
&\qquad + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi v_\lambda}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_\lambda}{\partial r}\right] \\
&\qquad \left. + \frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\cos^2\phi}\right\} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_r \left\{ \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_r}{\partial r^2} \right. \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi v_\lambda}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_\lambda}{\partial r}\right] \\
&\qquad \left. - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2\tan\phi v_\phi}{r^2} - \frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{2v_r}{r^2}\right\}. \qquad (127)
\end{aligned}
$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ の時のみ [　] の項が消えて一致する. そもそも, 通常の表式 (115) ∼ (117) は $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ のもとで導出されているものであるから, その手続きと互換性を保つとすれば, 粘性項の表現は $-\nu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}$ であるべきである.

A.8 渦度方程式

渦度方程式は回転系のナビエストークス方程式の表現

$$
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{v} + \nabla\frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \qquad (128)
$$

に $\nabla\times$ を作用して

$$
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) - \nabla(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p - \nu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\omega}. \qquad (129)
$$

ただし

$$
\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla\times\boldsymbol{v}. \qquad (130)
$$

これを極座標表示すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\omega_{a\lambda} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\omega_{a\lambda} - \boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla v_\lambda + \frac{1}{r}(\omega_{ar}v_\lambda - \omega_{a\lambda}v_r - \omega_{a\phi}v_\lambda\tan\phi + \omega_{a\lambda}v_\phi\tan\phi) \\
&\qquad = \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\phi}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial\phi}\right) \\
&\qquad\quad -\nu\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi\omega_{a\lambda}}{\partial\phi}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\omega_{a\lambda}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega_{a\phi}}{\partial\lambda}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega_{ar}}{\partial\lambda}\right)\right], \qquad (131)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\omega_{a\phi} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\omega_{a\phi} - \boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla v_\phi + \frac{1}{r}(\omega_{ar}v_\phi - \omega_{a\phi}v_r) \\
&\qquad = \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{r\cos\phi}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial p}{\partial r}\right) \\
&\qquad\quad -\nu\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\omega_{a\phi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2\omega_{a\phi}}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\omega_{ar}}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\cos\phi\omega_{a\lambda}}{\partial\phi}\right], \\
&\qquad\qquad (132)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\omega_{ar} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\omega_{ar} - \boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla v_r \\
&\qquad = \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{r^2\cos\phi}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial p}{\partial\phi} - \frac{\partial\rho}{\partial\phi}\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right) \\
&\qquad\quad -\nu\left[-\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2\omega_{ar}}{\partial\lambda^2} - \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial\omega_{ar}}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial r\omega_{a\lambda}}{\partial r}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial r\omega_{a\phi}}{\partial r}\right)\right] \qquad (133)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_a &\equiv \nabla\times\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \\
&= \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}v_r - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi)\right] \\
&\quad +\boldsymbol{e}_\phi\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\lambda) - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_r + 2\Omega\cos\phi\right] \\
&\quad +\boldsymbol{e}_r\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\phi - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\lambda) + 2\Omega\sin\phi\right]. \qquad (134)
\end{aligned}
$$

B　非発散 2 次元球面方程式系の導出

世界は回転系にある非発散ナビエストークス流体として記述されるものとする. 密度は一定 ($\rho = \rho_0$) であり, 運動は球面に拘束されている.

B.1　球面への拘束

球面への拘束条件は次のように与えることにする.

$$
\begin{aligned}
v_r &= 0, & (135)\\
v_\lambda, v_\phi &\propto r. & (136)
\end{aligned}
$$

B.2　連続の式

密度一定, 球面拘束のもとでは, 連続の式 (112) は

$$
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\lambda + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v_\phi = 0 \qquad (137)
$$

となる.

B.3　ナビエストークスの式

密度一定, 球面拘束のもとでは, ナビエストークスの式 (115) ∼ (117) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_\lambda + \frac{v_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi}{r}v_\lambda v_\phi - 2\Omega\sin\phi v_\phi \\
&\quad = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p \\
&\qquad +\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} + \frac{2v_\lambda}{r^2}\right. \\
&\qquad\quad \left. -\frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda} - \frac{v_\lambda}{r^2\cos^2\phi}\right], \qquad (138)\\
&\frac{\partial}{\partial t}v_\phi + \frac{v_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\tan\phi}{r}v_\lambda^2 + 2\Omega\sin\phi v_\lambda \\
&\quad = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}p \\
&\qquad +\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2v_\phi}{r^2}\right. \\
&\qquad\quad \left. +\frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{v_\phi}{r^2\cos^2\phi}\right] \qquad (139)\\
&\qquad (140)
\end{aligned}
$$

となる.

B.4　渦度方程式

密度一定, 球面拘束のもとでは, 渦度方程式の動径成分 (133) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\omega_{ar} + \frac{v_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial \omega_{ar}}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial \omega_{ar}}{\partial \phi} \\
&\quad = \nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2\omega_{ar}}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial\omega_{ar}}{\partial\phi}\right) + \frac{2\omega_{ar}}{r^2}\right] \qquad (141)
\end{aligned}
$$

となる. 粘性項の最後の項は, 球面拘束の元での渦度が

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_a &= -\boldsymbol{e}_\lambda 2\frac{v_\phi}{r} + \boldsymbol{e}_\phi\left[2\frac{v_\lambda}{r} + 2\Omega\cos\phi\right] \\
&\quad + \boldsymbol{e}_r\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\phi - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\lambda) + 2\Omega\sin\phi\right] \qquad (142)
\end{aligned}
$$

であることを用い, (133) に代入したものである.

B.5　流線関数を用いた表現

球面上で非発散であるので流線関数 ψ が次のように導入できる:

$$
-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \equiv v_\lambda, \qquad (143)
$$

$$
\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \equiv v_\phi. \qquad (144)
$$

渦度の動径成分は

$$
\begin{aligned}
\omega_r &= \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\phi - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\lambda) \\
&= \left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]\psi \\
&= \frac{1}{r^2}\nabla_h^2\psi. \qquad (145)
\end{aligned}
$$

∇_h^2 は半径 1 の球面上の 2 次元ラプラシアンである.

流線関数を用いれば渦度方程式の動径成分は

$$
\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2\psi - \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\nabla_h^2\psi + 2\Omega\sin\phi}{\partial\psi} = \nu\frac{1}{r^2}(\nabla_h^2 + 2)\nabla_h^2\psi \qquad (146)
$$

となる.

B.6　まとめ

球面系での方程式は, v_λ を u, v_ϕ を v, そして, r を拘束している球の半径 a と書き変えて

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial u}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi uv}{a} - 2\Omega\sin\phi v &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p \\
&\quad +\nu\left[\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)u - \frac{2\sin\phi}{a^2\cos^2\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{u}{a^2\cos^2\phi}\right], \qquad (147)\\
\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial v}{\partial\phi} + \frac{\tan\phi u^2}{a} + 2\Omega\sin\phi u &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}p \\
&\quad +\nu\left[\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)v + \frac{2\sin\phi}{a^2\cos^2\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{v}{a^2\cos^2\phi}\right], \qquad (148)\\
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v &= 0. \qquad (149)
\end{aligned}
$$

流線関数を用いた渦度方程式は

$$
\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2\psi - \frac{1}{a^2\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{a^2\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\psi} + \frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \nu\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)\nabla_h^2\psi, \qquad (150)
$$

あるいは

$$
\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{1}{a^2\cos\phi}J(\psi,\zeta+2\Omega\sin\phi) = \nu\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)\zeta, \qquad (151)
$$

あるいは

$$
\frac{\partial}{\partial t}q + \frac{1}{a^2\cos\phi}J(\psi,q) = \nu\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)q. \qquad (152)
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
u &\equiv -\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \qquad (153)\\
v &\equiv \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \qquad (154)\\
\zeta &\equiv \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v - \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi u)\\
&= \left[\frac{1}{a^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]\psi\\
&= \frac{1}{r^2}\nabla_h^2\psi, \qquad (155)\\
q &\equiv \zeta + 2\Omega\sin\phi, \qquad (156)\\
\nabla_h^2 &\equiv \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \qquad (157)\\
J(X,Y) &\equiv \frac{\partial X}{\partial\lambda}\frac{\partial Y}{\partial\phi} - \frac{\partial Y}{\partial\lambda}\frac{\partial X}{\partial\phi}. \qquad (158)
\end{aligned}
$$

相対渦度の動経成分 ω_r を ζ, 絶対渦度の動経成分 ω_{ar} を q と書き変えた.