音波

林 祥介・竹広 真一

2014 年 07 月 18 日

1 純な音波

1.1 基礎方程式とその線型化

非散逸, 非回転系で重力は考えない. 次のようなシステムを考察する.

- 質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

- 運動量保存則

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{2}$$

- エネルギー保存則

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s v_j}{\partial x_j} = 0. \tag{3}$$

ただし, ρ は密度, v_i は速度ベクトル, p は圧力, $s = s(p, \rho)$ は単位質量あたりのエントロピーであり, その関数形 (熱力学関数) は流体の物性として与えられているものとする.

このシステムを 静止, p, ρ 一様とする状態 (この状態ももちろん考えているシステムの解である) を基本場としてその状態からのずれ, 擾乱を考察する. 変数を次のように定義することにしよう:

$$p = p_0 + p', \tag{4}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \tag{5}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'. \tag{6}$$

$()'$ の量が擾乱の量である.

線型化する前の基本テクニックとして系を無次元化しておく. 無次元量に $*$ をつけることにすると

$$p' = \tilde{p}p'_* \tag{7}$$
$$\rho' = \tilde{\rho}\rho'_* \tag{8}$$
$$\boldsymbol{v}' = U\boldsymbol{v}'_* \tag{9}$$
$$\boldsymbol{x} = L\boldsymbol{x}_* \tag{10}$$
$$t = \tau t_* \tag{11}$$

である. ただし $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$, U, L, τ はそれぞれの物理量のスケールである. 系の方程式 (1)-(3) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho'_*}{\partial t} + \frac{\rho_0 \tau U}{\tilde{\rho} L}\frac{\partial v'_{j*}}{\partial x'_{j*}} + \frac{\tau U}{L}\frac{\partial \rho'_* v'_{j*}}{\partial x'_{j*}} = 0, \\
&\frac{\partial v'_{i*}}{\partial t_*} + \frac{\tau U}{L} v'_{j*}\frac{\partial v'_{i*}}{\partial x'_{j*}} = -\frac{\tau \tilde{p}}{UL}\frac{1}{\rho_0 + \tilde{\rho}\rho'_*}\frac{\partial p'_*}{\partial x'_{i*}}, \\
&\frac{\partial p'_*}{\partial t_*} + \frac{\tau U}{L} v'_{j*}\frac{\partial p'_*}{\partial x'_{j*}} - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{p}}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho'_*}{\partial t_*} + \frac{\tau U}{L} v'_{j*}\frac{\partial \rho'_*}{\partial x'_{j*}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

ただし熱の式はエントロピーを使った表現を $s = s(p, \rho)$ を用いて p, ρ を用いた表現に書き換えてある. さて, 線型化するには次の状況が成立していることを仮定する.

$$\tilde{p} \ll p_0, \tag{12}$$
$$\tilde{\rho} \ll \rho_0, \tag{13}$$
$$\frac{\tau U}{L} \ll 1, \tag{14}$$
$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \sim O(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \frac{\tilde{p}}{p_0}) \ll 1. \tag{15}$$

$()'$ の量は大きさが概ね 1 の程度であるとして 1 に比べて無視できる項を消し去ると

$$\frac{\partial \rho'_*}{\partial t} + \frac{\rho_0 \tau U}{\tilde{\rho} L}\frac{\partial v'_{j*}}{\partial x'_{j*}} = 0, \tag{16}$$
$$\frac{\partial v'_{i*}}{\partial t_*} = -\frac{\tau \tilde{p}}{\rho_0 UL}\frac{\partial p'_*}{\partial x'_{i*}}, \tag{17}$$
$$\frac{\partial p'_*}{\partial t_*} - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{p}}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_0}\frac{\partial \rho'_*}{\partial t_*} = 0. \tag{18}$$

ただし, $(\partial p/\partial\rho)_{s_0}$ は $s = s(p_0, \rho_0)$ で評価される値に固定してしまっていることに注意.

ここで, 擾乱の圧力と密度, 並びに時間のスケールを次の用に設定する.

$$\tilde{\rho} = \frac{\tau U}{L}\rho_0, \tag{19}$$

$$\tilde{p} = \frac{\rho_0 U L}{\tau}, \tag{20}$$

$$\tau = L/\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_0}}. \tag{21}$$

簡単のために $*$ を省略することにすれば, 擾乱の線型化方程式は

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\partial v'_j}{\partial x'_j}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x'_i}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0. \tag{24}$$

となる. ちなみに $U \ll L/\tau$ であるから, スケーリングの 3 番目の条件は

$$\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_0}} = \frac{L}{\tau} \gg U. \tag{25}$$

後にわかるように

$$c_s \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_0}} \tag{26}$$

は音波の速度, 音速である. 次元のある量に戻せば

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v'_j}{\partial x'_j}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x'_i}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c_s^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t}. \tag{29}$$

1.2 波動方程式

(27) - (29) を一変数の式に書き換える. (27) と (28) から $\boldsymbol{v}$ を消去すれば

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial {x'_i}^2}, \tag{30}$$

これと (29) により

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial {x'_i}^2} = 0. \tag{31}$$

この方程式は分散性のないは波動方程式に他ならない.

注意すべき点は, もともとの方程式が時間に関する 5 次の方程式 (モードが 5 つ) であったのに対して, この方程式は時間の 2 階微分方程式であることである. 残りの 3 階分は $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ となるモード, すなわち, 渦モードとして取り残されている. 実際 (28) に $\nabla\times$ を作用すれば

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{v} = 0. \tag{32}$$

この解は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{v} = 0,\ \text{かつ},\ \nabla \times \boldsymbol{v} \neq 0, \tag{33}$$

または,

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{34}$$

である. 前者は時間に関して 3 階分の微分を含んでおり, 定常な渦モードに対応している. 音波は後者に対応している.

任意の初期値に対しての線型応答は, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ の渦モードとしてその場にとどまる部分と $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ で音波として伝播する部分とからなることになる.

1.3 分散関係式

分散関係式は平面波解

$$\rho' = Ro e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{35}$$

$$p' = P e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{V} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{37}$$

を (27) - (29) に代入し $Ro, P, \boldsymbol{V}$ の係数行列

$$\begin{pmatrix} -i\omega & & i\rho_0 k_1 & i\rho_0 k_2 & i\rho_0 k_3 \\ ic_s^2\omega & -i\omega & & & \\ & ik_1/\rho_0 & -i\omega & & \\ & ik_2/\rho_0 & & -i\omega & \\ & ik_3/\rho_0 & & & -i\omega \end{pmatrix} \tag{38}$$

の行列式を 0 とおくことにより得られる.

$$\omega^3(\omega^2 - c_s^2|\boldsymbol{k}|^2) \ = \ 0. \tag{39}$$

音波に対応する部分は ( ) 内の部分

$$\boxed{\omega^2 - c_s^2|\boldsymbol{k}|^2 \ = \ 0} \tag{40}$$

であり, (31) に平面波解を代入して直ちに得られるものである.

音波は分散しない. すなわち, $\boldsymbol{k}$ 方向の位相速度は (40) から

$$c_p \ = \ \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} \ = \ \pm c_s \tag{41}$$

群速度も

$$\boldsymbol{c}_g \ = \ \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} \ = \ \pm c_s\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}. \tag{42}$$

ちなみに i 方向の位相速度は

$$c_{pi} \ = \ \frac{\omega}{k_i} \ = \ \pm c_s\frac{|\boldsymbol{k}|}{k_i}. \tag{43}$$

1.4 構造

音波の平面波解 (35) - (37) を方程式 (27) - (29) に代入すれば, その構造が得られる. この際, 分散関係式 (40) を適宜用いる.

まず, (29) より

$$Ro \ = \ \frac{1}{c_s^2}P. \tag{44}$$

圧力と密度は同じ位相でなければならない. (28) からは

$$\boldsymbol{V} \ = \ \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\frac{P}{\rho_0}. \tag{45}$$

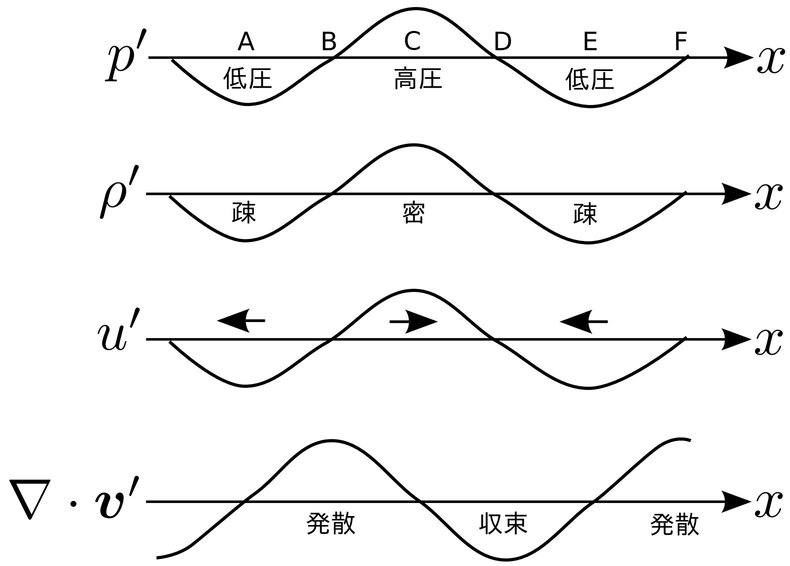

図 1: 1 次元音波

圧力 (または密度) と速度とは同じ位相 (0 または π の差) を持っていなければならない. また, 音波はたて波, すなわち,

$$\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{k}. \tag{46}$$

であることがわかる. また, (27) より

$$\nabla \cdot v_0' \;=\; -i\omega\frac{Ro}{\rho_0} \;=\; -i\frac{\omega}{c_s^2}\frac{P}{\rho_0} \tag{47}$$

発散収束と密度 (または圧力) とは $\pi/2$ 位相がずれている.

1 次元で図化すると図 1 のようになる. 図は右方向に伝播する音波の状況を示したものである. 密な点 C と収束している点 D とは $\pi/2$ ずれており, この収束が密な点を右側に移動させていく. 素な点の移動もその右側の発散域にともなって起こる. かくして位相は順次右方向に移動していくのである.

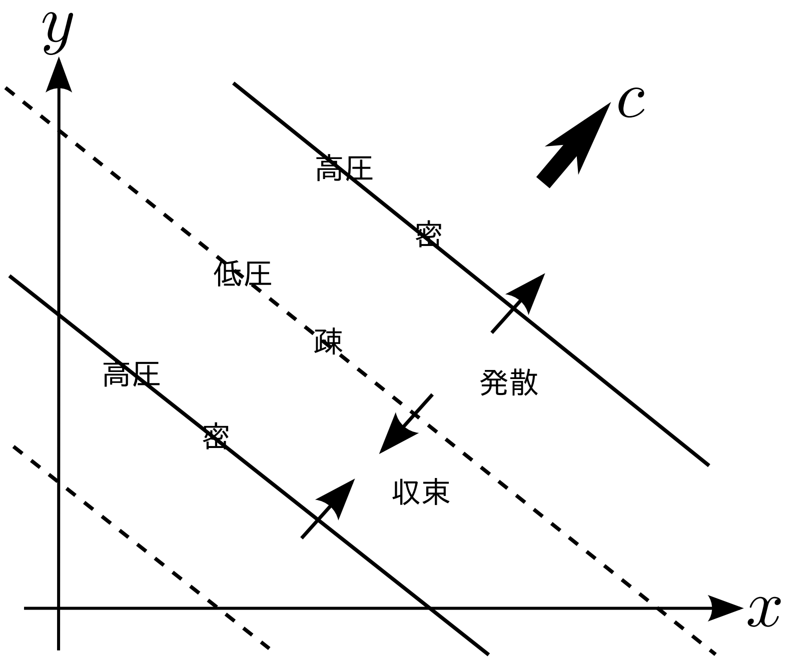

図 2: 2 次元音波

2 次元平面上でも事情は全く同じである.

1.5　浅水波との類時性

方程式の構造から類推される通り, 音波と浅水波とは基本的に同じ構造をしている.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{音波} & & \text{浅水波} \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\nabla p' = -\dfrac{c_s^2}{\rho_0}\nabla \rho' & \leftrightarrow & \dfrac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -g\nabla h' \\
\dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla\cdot\boldsymbol{v}' = 0 & \leftrightarrow & \dfrac{\partial h'}{\partial t} + H_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}' = 0
\end{array}
\tag{48}
$$

したがって対応関係は

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{c_s^2}{\rho_0} & \leftrightarrow & g \\
\rho' & \leftrightarrow & h' \\
\rho_0 & \leftrightarrow & H_0
\end{array}
\tag{49}
$$

である.

2　成層のある場合：音波と内部重力波

2.1　基礎方程式とその線型化

非散逸, 非回転系ではあるが一様な重力が働いている系を考察する.

- 質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \tag{50}$$

- 運動量保存則

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g \hat{\boldsymbol{x}}_3, \tag{51}$$

- エネルギー保存則

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right) \tag{52}$$

ただし重力軸方向を x_3 軸に選んだ. $\hat{\boldsymbol{x}}_3$ はその方向の単位ベクトルである. またエネルギー保存則は断熱である (エントロピーが保存する) という条件を圧力と温度の関係で書きなおしてある.

このシステムについて, 静止, 温度一様 ($T = T_0$) とする状態を基本場とし, その状態からのずれ, 擾乱を考察する. 基本場を具体的に構成するために物性を指定しよう. 考えている流体は理想気体であるものとする. したがって

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma R T \tag{53}$$

ただし, $\gamma \equiv c_p/c_v$ は比熱比, R は質量あたりの気体常数である.

基本場の圧力 (p_0), 密度 (ρ_0) の分布は次の方程式の解としてたやすく得られる

$$0 = -\frac{\partial p_0}{\partial x_3} - \rho_0 g, \tag{54}$$

$$p_0 = \rho_0 R T_0. \tag{55}$$

すなわち, 基本場は

$$\boldsymbol{v}_0 = 0, \tag{56}$$

$$p_0 = p_s e^{-\frac{gz}{RT_0}}, \tag{57}$$

$$\rho_0 = \rho_s e^{-\frac{gz}{RT_0}}. \tag{58}$$

ただし

$$\rho_s = \frac{p_s}{RT_0} \tag{59}$$

であり, p_s は「地表面」(適当な基準面 $x_3 = 0$) での圧力 (定数) である.

方程式系をこの基本場のまわりで線型化する. 変数を次のように定義することにしよう:

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 + p', && (60)\\
\rho &= \rho_0 + \rho', && (61)\\
T &= T_0 + T', && (62)\\
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}'. && (63)
\end{aligned}
$$

$()'$ の量が擾乱の量である. 線型化された方程式は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}' + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3' &= 0, && (64)\\
\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} &= -\nabla p' - \rho' g \hat{\boldsymbol{x}}_3, && (65)\\
\frac{\partial p'}{\partial t} - \rho_0 g v_3' &= c_s^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3' \right) && (66)
\end{aligned}
$$

この方程式をじっと睨んでいると次のように変数変換するのが都合がよろしいことが理解される:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^* &= \sqrt{\rho_0}\, \boldsymbol{v}', && (67)\\
p^* &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} p', && (68)\\
\rho^* &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \rho'. && (69)
\end{aligned}
$$

代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{v}^* + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3^* &= 0, && (70)\\
\frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial t} &= -\nabla p^* - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \hat{\boldsymbol{x}}_3 p^* - \rho^* g \hat{\boldsymbol{x}}_3, && (71)\\
\frac{\partial p^*}{\partial t} - g v_3^* &= c_s^2 \left(\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3^* \right) && (72)
\end{aligned}
$$

方程式は定数係数の偏微分方程式となっていることに注意. いま, 等温大気を扱っているので $c_s^2 = \gamma R T_0$, $\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} = -g/RT_0 \equiv -1/H_0$ は定数である. H_0 は (密度の) スケールハイトである.

2.2　分散関係式

分散関係式は平面波解

$$\rho^* = Roe^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{73}$$
$$p^* = Pe^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{74}$$
$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{V}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{75}$$

をに代入して $Ro, P, \boldsymbol{V}$ の係数行列

$$\begin{pmatrix} -i\omega & & ik_1 & ik_2 & ik_3 - \frac{1}{2H_0} \\ ic_s^2\omega & -i\omega & & & -g + \frac{c_s^2}{H_0} \\ & ik_1 & -i\omega & & \\ & ik_2 & & -i\omega & \\ g & ik_3 - \frac{1}{2H_0} & & & -i\omega \end{pmatrix} \tag{76}$$

の行列式を 0 とおくことにより得られる:

$$\omega\left[\omega^4 - \{c_s^2(|\boldsymbol{k}|^2 + \mu^2) + N^2\}\omega^2 + N^2c_s^2(k_1^2 + k_2^2)\right] = 0, \tag{77}$$

ただし

$$N^2 \equiv -\frac{g}{\rho_0}\left\{\frac{\partial\rho_0}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial\rho_0}{\partial x_3}\right)_{s_0}\right\} \tag{78}$$
$$= -\frac{g}{\rho_0}\left\{\frac{\partial\rho_0}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial\rho_0}{\partial p}\right)_{s_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_3}\right\}$$
$$= \frac{g}{H_0} - \frac{g^2}{c_s^2},$$
$$\mu \equiv \frac{1}{\rho_0}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_0}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial\rho_0}{\partial x_3}\right)_{s_0}\right\} \tag{79}$$
$$= -\frac{1}{2H_0} + \frac{g}{c_s^2}.$$

N は浮力振動数, または, Brunt-Väisälä 振動数と呼ばれる量であり, 成層した流体での重力の影響を表すものである. $H_0 = RT_0/g$, $c_s^2 = \gamma RT_0$ に注意して書きなおすと

$$c_s^2\mu^2 + N^2 = c_s^2\frac{1}{4H_0^2} \tag{80}$$

よって分散関係は

$$\boxed{\omega\left[\omega^4 - c_s^2(|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2})\omega^2 + N^2c_s^2(k_1^2 + k_2^2)\right] = 0,} \tag{81}$$

分散関係式のうち自明なもの $\omega = 0$ を除いて書きなおすと

$$\omega^2 \;=\; \frac{c_s^2}{2}(|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2})\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(k_1^2+k_2^2)N^2}{c_s^2(|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2})^2}}\right\} \tag{82}$$

複号のうち $c_s \to \infty$ または $N \to 0$ の時に音波の分散関係と一致するもの, すなわち, $+$ のモードを音波モード, そうでない $-$ のモードを内部重力波モードという.

内部重力波モードは $4(k_1^2+k_2^2)N^2/c_s^2(|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2})^2 \to 0$ の時により簡単な形で現れる. 常に

$$c_s^2(|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2}) \;>\; N^2 \tag{83}$$

であることに注意すればこのような状況は

$$k_1^2 + k_2^2 \;\ll\; k_3^2 \tag{84}$$

の時にえられる. $-$ のモードの分散関係はこのとき

$$\omega^2 \;\sim\; \frac{(k_1^2+k_2^2)N^2}{(|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2})} \tag{85}$$

となる. 分散関係に c_s は現れない. N だけが現れており, $N \to 0$ とともに $\omega \to 0$ と縮退してしまうことがわかる. 重力を復元力とする波である.

図 3 は以上の分散関係を図化したものである. 後述のラム波も付け加えてある.

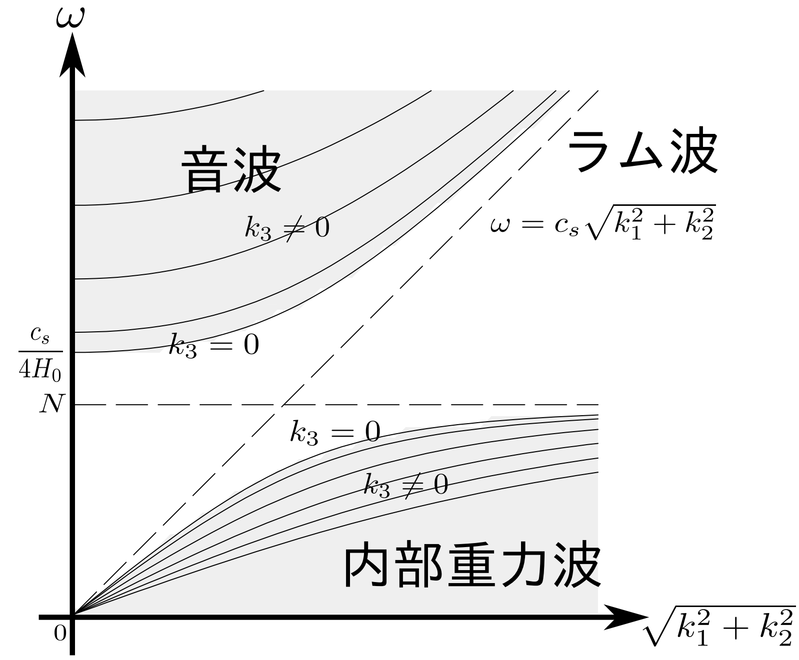

図 3: 成層のある場合：音波, 内部重力波の分散関係.

2.3 波の構造

波の構造はつぎのようになる:

$$\sqrt{\rho_0}v_1' = v_1^* = -\frac{k_1}{\omega}p^* = -\frac{ik_1}{\omega^2}\frac{N^2-\omega^2}{ik_3+\mu}V_3e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{86}$$

$$\sqrt{\rho_0}v_2' = v_2^* = -\frac{k_2}{\omega}p^* = -\frac{ik_2}{\omega^2}\frac{N^2-\omega^2}{ik_3+\mu}V_3e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{87}$$

$$\sqrt{\rho_0}v_3' = v_3^* = V_3e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{88}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}p' = p^* = \frac{i}{\omega}\frac{N^2-\omega^2}{ik_3+\mu}V_3e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{89}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\rho' = \rho^* = \frac{p^*}{c_s^2} - i\frac{N^2}{\omega g}v_3^* \tag{90}$$

ただし V_3 は定数である.

2.4 ラム波

成層がある世界で, 地面があるときには特種な解 (モード波) が存在する. 地面の境界条件

$$v_3' = 0 \ at \ x_3 = 0 \tag{91}$$

を満たす特解として次のようなものが存在することが容易に確かめられる

$$\sqrt{\rho_0}v_1' = v_1^* = -\frac{k_1}{\omega}Pe^{-\mu z}e^{i(k_1x_1+k_2x_2-\omega t)}, \tag{92}$$

$$\sqrt{\rho_0}v_2' = v_2^* = -\frac{k_2}{\omega}Pe^{-\mu z}e^{i(k_1x_1+k_2x_2-\omega t)}, \tag{93}$$

$$\sqrt{\rho_0}v_3' = 0, \tag{94}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}p' = p^* = Pe^{-\mu z}e^{i(k_1x_1+k_2x_2-\omega t)}, \tag{95}$$

$$\rho' = \frac{p'}{c_s^2}. \tag{96}$$

分散関係は

$$\omega^2 = c_s^2(k_1^2+k_2^2) \tag{97}$$

であり音波の分散関係で $k_3 = 0$ と置いたものに等しい. このような波をラム波という.

ラム波は音波と内部重力波のあいのこのような波で, 静水圧近似を用いた系でも存在する ($v_3' \equiv 0$ なので静水圧関係が成り立っていることに注意). 静水圧近似のもとでは通常の音波は存在しない.

3　音波の除去

地球流体では様々な近似方程式を用いるが, その際に音波が除去されてしまう. あるいは, 音波を除去するために適当なな近似を用いることもある. ここでは, 前説の状況, 重力場中にある非回転系の等温理想気体を例にとって, 音波が除去されるような状況の例を上げることにする.

3.1　静水圧近似

スケーリングされた運動方程式 (71) で静水圧近似を行なう. (71) の鉛直成分に於て $\partial v_3^*/\partial t = 0$ と置けば

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{v}^* + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3^* = 0, \tag{98}$$

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1}, \tag{99}$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_2}, \tag{100}$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x_3} - \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} p^* - \rho^* g, \tag{101}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} - g v_3^* = c_s^2 \left(\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3^* \right) \tag{102}$$

この系に対する分散関係は (81) に於て ω^4 の項, 並びに ω^2 の項で $k_1^2 + k_2^2$ のかかる部分がなくなったものである.

$$\omega c_s^2 \left[-(k_3^2 + \frac{1}{4H_0^2})\omega^2 + N^2(k_1^2 + k_2^2) \right] = 0, \tag{103}$$

あるいは

$$\omega^2 = \frac{(k_1^2 + k_2^2)N^2}{k_3^2 + \frac{1}{4H_0^2}} \tag{104}$$

これは (85) にほかならない. 逆に言うと,

$$k_1^2 + k_2^2 \ll k_3^2 \tag{105}$$

あるいは

$$\text{水平スケール} \gg \text{鉛直スケール} \tag{106}$$

である, すなわち, 波動の縦横比が非常に小さければ, 静水圧近似を用いてよいということになる.

図 4 は図 3 に対応して分散関係を図化したものである. $k_1^2 + k_2^2$ が大きくなると図 3 からのずれが大きくなって使い物にならなくなる.
なお, 図 4 にはラム波も付け加えてある. ラム波静水圧近似によってなんらの影響を受けない. $v_3 \equiv 0$ であったからである.

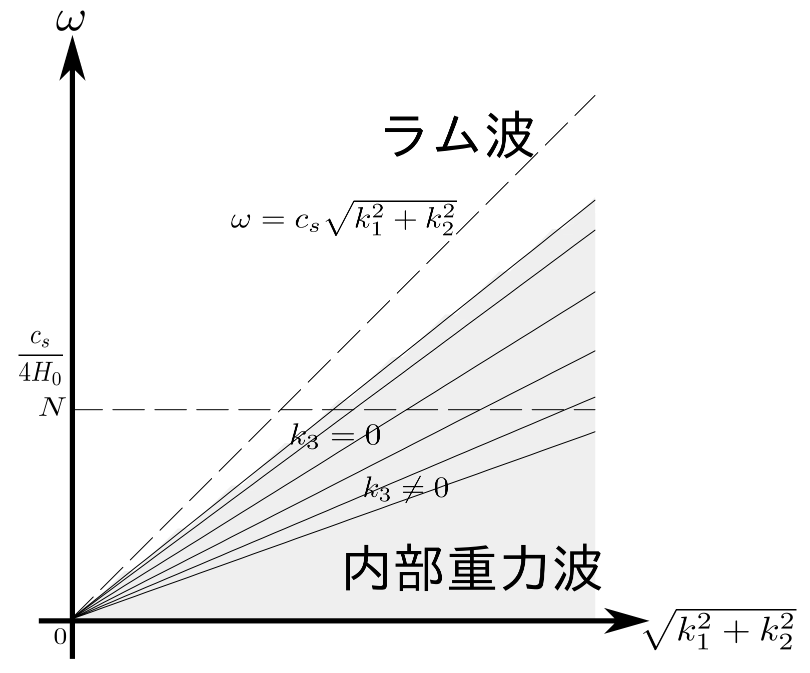

図 4: 静水圧近似を行なった系の場合：音波, 内部重力波の分散関係.

3.2 非弾性近似またはブシネスク近似

非弾性近似とは連続の式において密度の時間変化を無視してしまうか, または, エネルギーの式で圧力の時間変化を無視してしまう近似である. それぞれ基礎方程式系は

$$
\begin{aligned}
\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}' + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3' &= 0, && (107)\\
\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} &= -\nabla p' - \rho' g \hat{\boldsymbol{x}}_3, && (108)\\
\frac{\partial p'}{\partial t} - \rho_0 g v_3' &= c_s^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3' \right) && (109)
\end{aligned}
$$

または

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}' + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3' &= 0, && (110)\\
\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} &= -\nabla p' - \rho' g \hat{\boldsymbol{x}}_3, && (111)\\
-\rho_0 g v_3' &= c_s^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3' \right) && (112)
\end{aligned}
$$

となる. これにより音波をもたらす復元力はたたれてしまうので音波は現れなくなる. 分散関係は連続の式で密度の時間微分を無視した場合には

$$
\omega \left[-c_s^2 \left(|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{ik_3}{H_0} - \frac{1}{4H_0^2} \right) \omega^2 + g \left(ik_3 - \frac{1}{2H_0} \right) \omega^2 + N^2 c_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \right] = 0, \tag{113}
$$

分散関係は熱の式で圧力の時間微分を無視した場合には

$$
\omega \left[-c_s^2 (|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{1}{4H_0^2}) \omega^2 - g \left(ik_3 - \frac{1}{2H_0} \right) \omega^2 + N^2 c_s^2 (k_1^2 + k_2^2) \right] = 0, \tag{114}
$$

ともに ω の 5 次の項がなくなって, ω の 3 次式になる. どちらも音波が現れずに, 渦度の波だけいになってしまっている. 分散関係に虚部 (i の入った項) が現れてしまうが, これは, 鉛直方向のスケーリングが $\sim \sqrt{\rho_0}$ からずれてしまうためである.

ブシネスク近似系に置いても音波は除去される. ブシネスク近似系では連続の式

(70) で

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{115}$$

とおくのみならず密度, 圧力の鉛直依存性を無視する. すなわち

$$k_3 \gg \frac{1}{H_0} \tag{116}$$

を仮定するのである. 基礎方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}' = 0, \tag{117}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\nabla p' - \rho' g \hat{\boldsymbol{x}}_3, \tag{118}$$

$$-\rho_0 g v_3' = c_s^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} v_3' \right) \tag{119}$$

分散関係は

$$\omega^2 = \frac{(k_1^2 + k_2^2) N^2}{|\boldsymbol{k}|^2} \tag{120}$$

となる. さらに静水圧近似を行なえば

$$\omega^2 = \frac{(k_1^2 + k_2^2) N^2}{k_3^2} \tag{121}$$

が得られる.

4 付録：様々な近似での分散関係導出

$\partial p/\partial t$, $\partial \rho/\partial t$, あるいは $\partial w/\partial t$ を無視した場合の分散関係を導出するには $Ro, P, \boldsymbol{V}$ の係数行列にラベルを貼っておくと便利である.

$$\begin{pmatrix} -i\omega_\rho & & ik_1 & ik_2 & ik_3 - \frac{1}{2H_0} \\ ic_s^2 \omega & -i\omega_p & & & -g + \frac{c_s^2}{H_0} \\ & ik_1 & -i\omega & & \\ & ik_2 & & -i\omega & \\ g & ik_3 - \frac{1}{2H_0} & & & -i\omega_w \end{pmatrix} \tag{122}$$

ω_ρ, ω_p, ω_w は, それぞれ $\partial p/\partial t$, $\partial \rho/\partial t$, あるいは $\partial w/\partial t$ に対応するものである. これらの添字を保ったまま式変形を行なえば

$$\begin{aligned}
-i\Bigg[\omega^2\omega_\rho\omega_p\omega_w + \omega^2\omega_\rho\left\{-g\left(ik_3 - \frac{1}{2H_0}\right) + \frac{c_2^2}{H_0}\left(ik_3 - \frac{1}{2H_0}\right)\right\} \\
+\omega^2\omega_p g\left(ik_3 - \frac{1}{2H_0}\right) - c_s^2\omega^2\omega_w(k_1^2 + k_2^2) \\
-c_s^2\omega^3\left(k_3^2 + \frac{ik_3}{H_0} - \frac{1}{4H_0^2}\right) + \omega N^2 c_s^2(k_1^2 + k_2^2)\Bigg] &= 0. \quad (123)
\end{aligned}$$