浅水波

林 祥介

2014 年 07 月 18 日

1 波動方程式

非回転系浅水波方程式に現われる波—浅水波—の伝播・構造を調べる．浅水波方程式系[2]から出発する．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv) = 0. \tag{3}$$

$f = 0$ の場合を考える．u, v, h が微小量であるとして線型化すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \tag{6}$$

H_0 は静止状態での流体の深さ，h は静止状態からの水面の変位を表わす．

(3),(4) より

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}) = -g\nabla^2 h \tag{7}$$

ただし，

[2]浅水波方程式系の導出についてはシリーズ‘浅水波方程式’を参照せよ

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

である．

(6) と (7) より div$\boldsymbol{v}$ を消去すると，波動方程式が求まる．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - gH_0 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = 0. \tag{8}$$

2 浅水波の分散関係

(9) の解を平面波の形で求める. $h = h_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}$ を代入することにより浅水波の分散関係が得られる.

$$\omega^2 = gH_0(k^2 + l^2) \tag{9}$$

2.1 位相速度

$$\begin{aligned} c &\equiv \frac{\omega}{\sqrt{k^2+l^2}} = \sqrt{gH_0}, && (10) \\ c_x &\equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH_0}\frac{\sqrt{k^2+l^2}}{k}, && (11) \\ c_y &= \frac{\omega}{l} = \sqrt{gH_0}\frac{\sqrt{k^2+l^2}}{l}. && (12) \end{aligned}$$

2.2 群速度

$$\begin{aligned} c_{gx} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{gH_0}\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}, && (13) \\ c_{gy} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial l} = \sqrt{gH_0}\frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}, && (14) \\ \boldsymbol{c_g} &= \sqrt{gH_0}\frac{\boldsymbol{k}}{|\,\boldsymbol{k}\,|}. && (15) \end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{k} = (k, l)$ である. (10) から浅水波の位相速度 c は波数によらないことがわかる (分散がない).

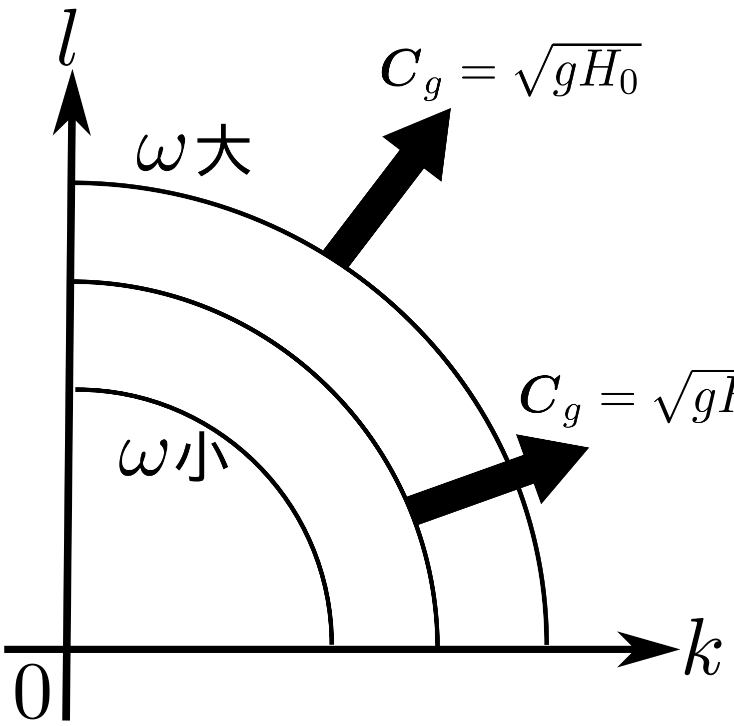

図 1: 表面重力波の分散関係

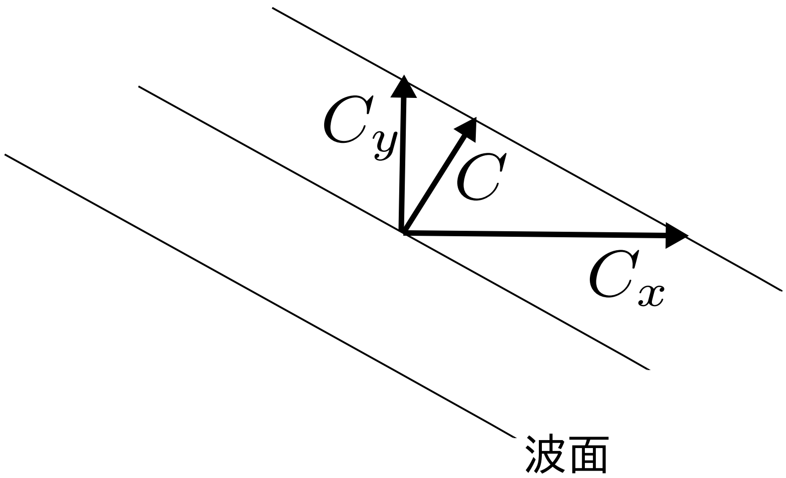

図 2: 位相速度

3　表面重力波の伝播 ∼ 初期値問題

y 方向に一様である簡単な状況を例に，浅水波の伝播する様子を記述する．

(4)∼(6) について $\dfrac{\partial}{\partial y} = 0$ の場合を考える．

初期値 $h\,|_{t=0} = h_0(x)$, $\dfrac{\partial h}{\partial t}\,|_{t=0} = \zeta_{(x)}$ に対する解は，

$$h(x,t) = \frac{1}{2}\{h_0(x-ct) + h_0(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\zeta(x') \tag{16}$$

となる（Appendix.A）．$c \equiv \sqrt{gH_0}$ は浅水波の位相速度である．

- 例

  $t = 0$ で静止，矩形波型の変位を与えたときの伝播の様子を調べる．

$$h_0(x) = \begin{cases} h_0 & |\, x \,| < \ L \\ \\ 0 & |\, x \,| > \ L \end{cases}$$
$$\zeta(x) = 0,$$

この初期値に対する解は，

$$h(x,t) \ = \ h_+(x,y) + h_-(x,y)$$
$$h_\pm(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}h_0 & |\, x \pm ct \,| < \ L \\ \\ 0 & |\, x \pm ct \,| > \ L \end{cases}$$

初期に与えられた変位は，2 つにわかれて形を保ったまま伝播してゆく（図 3）．

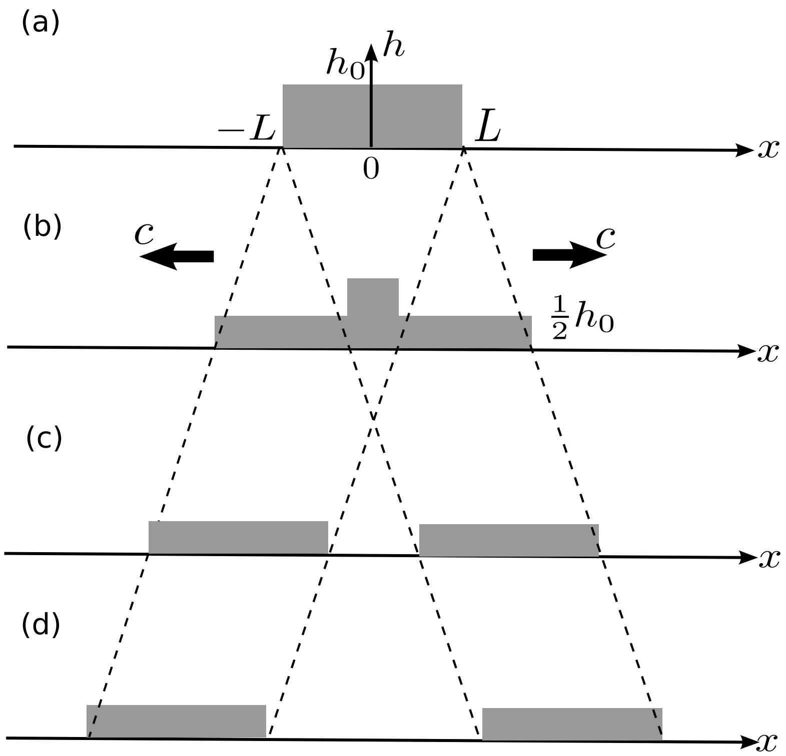

図 3: 初期変位を与えたときの表面重力波の伝播の様子. (a) から (d) へと変位が両側に速さ $c = \sqrt{gH_0}$ で伝播していく.

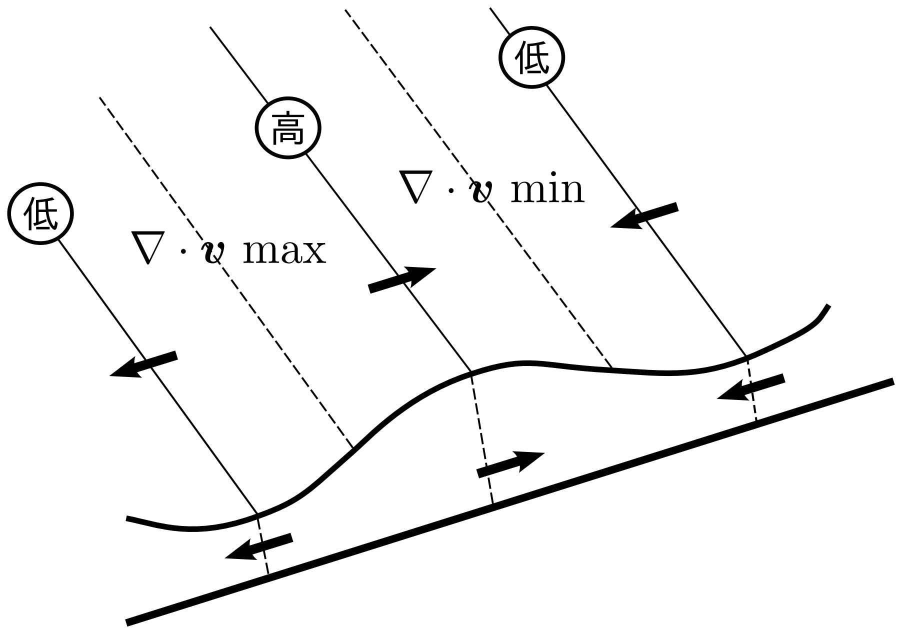

図 4: 浅水波の構造

4　平面波の構造

平面波の構造を見るために、$u, v, \mathrm{div}\boldsymbol{v}$ を h で表わし，位相関係を調べる.

(7) より

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{g(k^2+l^2)}{-i\omega}h = i\frac{g(k^2+l^2)}{-i\omega}h \tag{17}$$

(4)，(5) より

$$u = -\frac{ikg}{-i\omega}h = \frac{gk}{\omega}h, \tag{18}$$

$$v = -\frac{ilg}{-i\omega}h = \frac{gl}{\omega}h \tag{19}$$

(17) , (19) より，平面波の構造は図 4 のようになる.

5 浅水波の伝播

図 4 の構造を持つ波がどのように伝播していくかを考える．

1. 図 5(a) において，AB 上では div$\boldsymbol{v} > 0$ であるから変位は減少してゆく ($\dfrac{\partial h}{\partial t} = -H_0 \mathrm{div}\boldsymbol{v}$)．また，AB 上の流体は，変位の gradient により波面に垂直な方向に加速される ($\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -g\nabla h$)．
2. 水面が周囲より下がると，周囲から低い部分に向かって加速されて 流れが集まってくる（ div$\boldsymbol{v}$ が減少 $\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}) = -g\nabla^2 h$)．それとともに水面が上昇してゆく（図 5($b$)）．
3. やがて $\mathrm{div}_H \boldsymbol{v}$ が最小になり，さらに変位は増大していく（図 5(c)）．このとき変位の gradient により波面に垂直な方向に加速される．
4. 変位が最大になると，その周囲で高いところから低い方向へ向かう流れが加速され，div$\boldsymbol{v}$ が増える ($\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}) = -g\nabla^2 h$)． 再び変位は減少し，1. の状態に戻る．

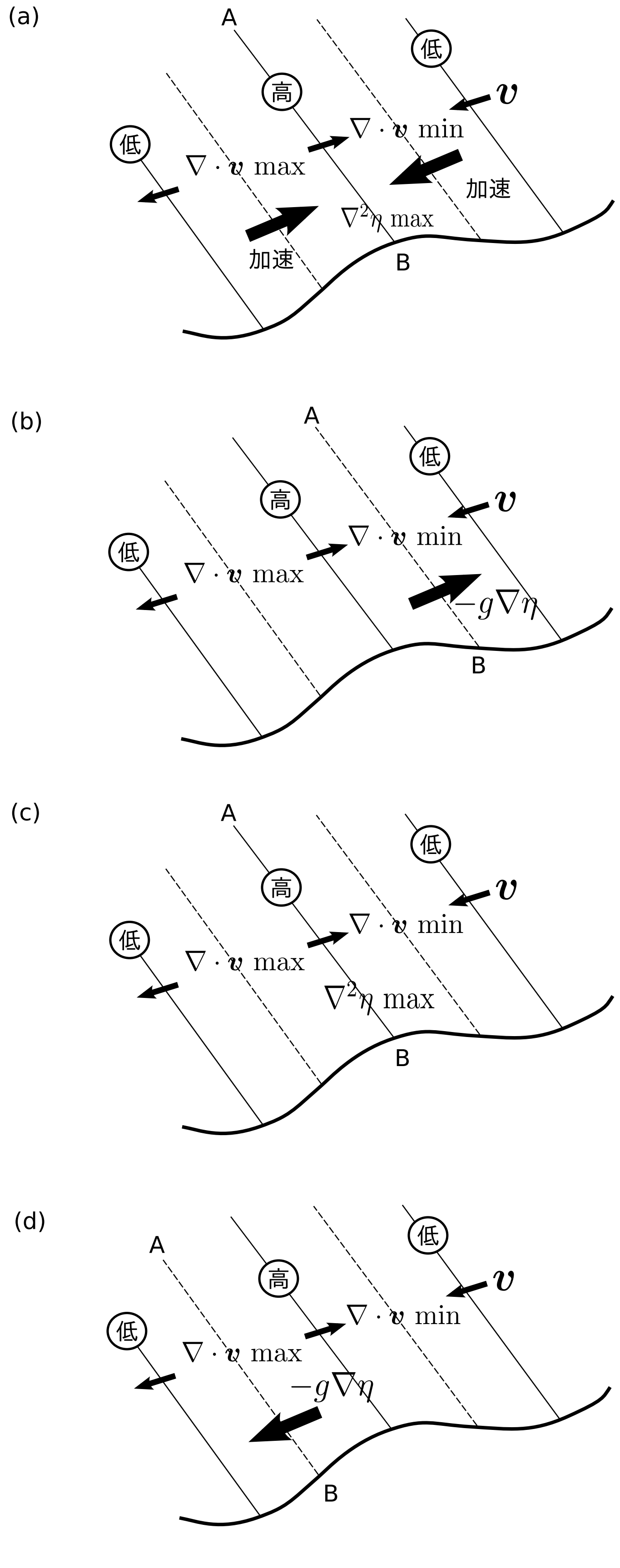
(a)
A
低
高
低
$\boldsymbol{v}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ min
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ max
加速
$\nabla^2\eta$ max
加速
B
(b)
A
低
高
低
$\boldsymbol{v}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ min
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ max
$-g\nabla\eta$
B
(c)
A
低
高
低
$\boldsymbol{v}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ min
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ max
$\nabla^2\eta$ max
B
(d)
A
低
高
低
$\boldsymbol{v}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ min
$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ max
$-g\nabla\eta$
B

図 5: 浅水波の伝播

6 付録：波動方程式の初期値問題

波動方程式

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \tag{20}$$

を初期条件

$$\begin{cases} h\,|_{t=0} = h_0(x) \\ \left.\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|_{t=0} = \zeta_0(x) \end{cases}$$

の下で解く．

(20) を時間 t について Laplace 変換，空間 x について Fourier 変換を行なうと

$$s^2 \tilde{h}(k,s) - s\hat{h}_0(k) - \hat{\zeta}_0(k) \ + k^2 c^2 \tilde{h}(k,s) = 0 \tag{21}$$

ただし，$\tilde{}$ は Laplace Fourier 変換，$\hat{}$ は Fourier 変換を表わす．すなわち

$$\tilde{F}(k,s) \equiv \int_0^\infty dt e^{-st} \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ikx} F(x,t),$$
$$\hat{G}(k) \equiv \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ikx} G(x).$$

(21) を $\tilde{h}$ について解くと

$$\tilde{h}(k,s) = \frac{s}{s^2+k^2+c^2}\hat{h}_0(k) + \frac{1}{s^2+k^2+c^2}\hat{\zeta}_0(k)$$

Laplace 逆変換を行なう．

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+k^2+c^2}\right] = \frac{1}{2}(e^{ikct} + e^{-ikct})$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+k^2+c^2}\right] = \frac{1}{2ikc}(e^{ikct} - e^{-ikct})$$

より

$$\hat{h}(k,t) = \frac{1}{2}\hat{h}_0(k)(e^{ikct} + e^{-ikct}) + \frac{1}{2ikc}\hat{\zeta}_0(k)(e^{ikct} - e^{-ikct})$$

さらに逆 Fourier 変換すると，第 1 項目は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\hat{h}_0(k)\ e^{ikct+ikx}\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{2}\hat{h}_0(k)e^{ikct+ikx} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dkdx'h_0(x')e^{ik(x-x'+ct)} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx'h_0(x')\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dke^{-ik(x'-x-ct)} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx'h_0(x')\delta(x'-x-ct) \\
&= \frac{1}{2}h_0(x-ct)
\end{aligned}
$$

第３項目は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[-\frac{1}{kc}\ \hat{\zeta}_0(k)\sin(kct)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{e^{ikt}}{kc}\sin(kct)\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_0(x)e^{-ikx'}dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\zeta_0(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{kc}\sin(kct)dk \\
&= \int dx'\zeta_0(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\int_0^t dt'\cos(kct') \\
&= \int_0^t dt'\frac{1}{2}\int dx'\zeta_0(x)\{\delta(x-ct')+\delta(x+ct')\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t dt'\{\zeta(x-ct')+\zeta(x+ct')\} \\
&= \frac{1}{2c}\left\{-\int_x^{x-ct} dp\zeta(p)+\int_x^{x+ct} dp\zeta(p)\right\} \\
&= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\zeta(x')
\end{aligned}
$$

よって求める解は

$$
h(x,t) = \frac{1}{2}\{h_0(x-ct)\ +\ h_0(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\zeta(x).
$$

7　シアー流中の伝播：W.K.B. 近似による記述

7.1　局所分散関係

回転のない浅水波方程式[2]から出発する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial y},\\
&\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0.
\end{aligned}
$$

x 方向の流れ $U=U(y)$ に対する微小擾乱の振舞いを表わす式は $u=U+u'$，$v=v'$，$h=H_0+h'$ を代入して $'$ の 2 次の量を無視することにより得られる．

$$
\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{dU}{dy}=-g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{22}
$$

$$
\frac{\partial v}{\partial t}+U\frac{\partial v}{\partial x}=-g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{23}
$$

$$
\frac{\partial h}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x}+H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \tag{24}
$$

簡単のため $'$ は省略した．(1)〜(3) について，u,v を消去すると，

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 h-gH_0\nabla^2 h\right\}+2gH_0\frac{dU}{dy}\frac{\partial h}{\partial x\partial y}=0. \tag{25}
$$

波束の振舞いを調べるために次の形の解を求める．

$$
h=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n A_n(X,Y,T)e^{i\frac{\vartheta(X,Y,T)}{\varepsilon}} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
X=\varepsilon x,\qquad Y=\varepsilon y,\qquad T=\varepsilon t,\\
0<\varepsilon\ll 1
\end{aligned}
$$

局所的な波数，振動数は次のように定義される．

[2] この導出についてはシリーズ ‘浅水波方程式’ を参照せよ

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}\vartheta(X,Y,T) \qquad (27)\\
l &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y}\vartheta(X,Y,T) \qquad (28)\\
\omega &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial T}\vartheta(X,Y,T) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

基本流 $U(y)$ は y 方向にゆっくり変化していると仮定する．

$$
U \equiv U(Y)
$$

(5) を (4) に代入し，ε の各 order でまとめる．$O(\varepsilon^0)$ より局所分散関係が求まる．

$$
\boxed{\omega = Uk \pm \sqrt{gH_0(k^2+l^2)}} \qquad (30)
$$

群速度は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
c_{gx} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = U \pm \sqrt{gH_0}\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \qquad (31)\\
c_{gy} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial l} = \pm\sqrt{gH_0}\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}} \qquad (32)
\end{aligned}
$$

7.2 波数・振動数の保存則

局所的波数，振動数についての保存則は次のようになる[1].

$$\frac{\partial k}{\partial T}+c_{gx}\frac{\partial k}{\partial X}+c_{gy}\frac{\partial k}{\partial Y}=0, \tag{33}$$
$$\frac{\partial l}{\partial T}+c_{gx}\frac{\partial l}{\partial X}+c_{gy}\frac{\partial l}{\partial Y}=-\frac{\partial \omega}{\partial Y}, \tag{34}$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial T}+c_{gx}\frac{\partial \omega}{\partial X}+c_{gy}\frac{\partial \omega}{\partial Y}=0. \tag{35}$$

ω,k は $\boldsymbol{c_g}$ で動く系からみて保存するが l は保存しない.

7.3 wave action

浅水波方程式のエネルギーの式に W.K.B. 近似解を代入することにより表面重力波の Wave action の保存則が得られる（Appendix.A）.

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right)+\frac{\partial}{\partial X}\left(c_{gx}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left(c_{gy}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right)=0. \tag{36}$$

ただし

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{2}\left(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\frac{g}{H_0}\bar{h}^2\right)\\ \hat{\omega} &= \omega - Uk\end{aligned}$$

である.

[1] この導出についてはシリーズ ‘内部重力波～シアー流中の伝播’ を参照せよ

8 シアー流中の波束の伝播

W.K.B. 近似の結果を用いてシアー流中の波束の伝播を記述する．

l は分散関係 (9) より，

$$l^2 = \frac{\hat{\omega}}{gH_0} - k^2 \tag{37}$$

を満たしながら変化してゆく．

1. いま，図 6 のように $U(y)$ の流れの中に波束を置いたとする．
2. 波束が y 方向に伝播するにしたがって $\hat{\omega} = \omega - U(y)k$ は減少してゆく．(16) より，l は減少してゆく．群速度は，

$$\begin{aligned} c_{gx} &= U\frac{\sqrt{gH_0}k}{\sqrt{k^2+l^2}} \\ c_{gy} &= \frac{\sqrt{gH_0}l}{\sqrt{k^2+l^2}} \end{aligned}$$

   $l \to 0$ になるにしたがって

$$\begin{aligned} &c_{gx} \to U + \sqrt{gH_0} \\ &c_{gy} \to 0 \end{aligned}$$

   しかし，$\hat{\omega} \to 0$ とならないので $\bar{E} \to 0$ とならない．

8.1 turning level

$l = 0$ となる $y = y_t$ を turning level という．波束が turning level に達するまでの時間を計算する．

y_1 から y_2 まで波束が伝播するのに要する時間 T は

$$T = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{c_{gy}} = \int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{c_{gy}}\frac{dy}{dl}dl$$

ここで

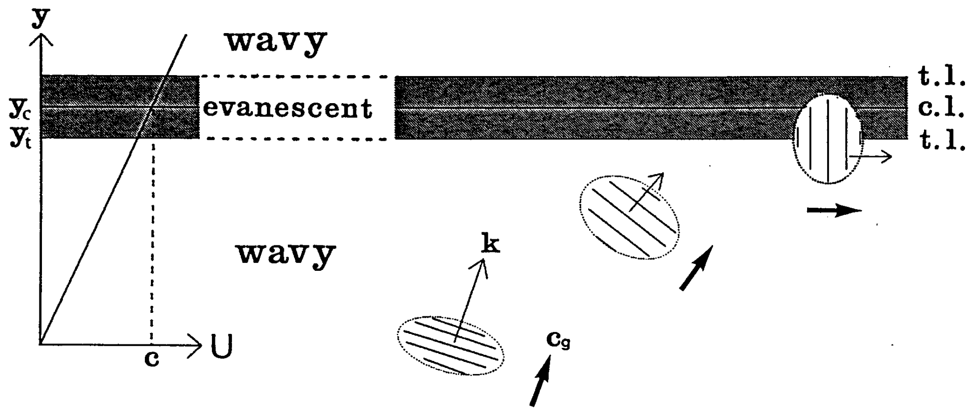

図 6: 浅水波の波束の伝播

$$
\begin{aligned}
2l\frac{dl}{dy} &= \frac{2\hat{\omega}}{gH_0}\left(k\frac{dU}{dy}\right) = -2k\frac{dU}{dy}\sqrt{\frac{k^2+l^2}{gH_0}} \\
\frac{dy}{dl} &= -\frac{l\sqrt{gH_0}}{2k\sqrt{k^2+l^2}U_y}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{l_1}^{l_2} \frac{\sqrt{k^2+l^2}}{\sqrt{gH_0}l}\left(-\frac{l\sqrt{gH_0}}{2k\sqrt{k^2+l^2}}\frac{1}{c_y}\right)dl \\
&= \frac{l_1-l_2}{2kU_y} \longrightarrow \frac{l_1}{2kU_y}
\end{aligned}
$$

波束は有限の時間で turning level に達することができる.

8.2 W.K.B. 近似の吟味

W.K.B. 近似を用いるには，波長 $\dfrac{2\pi}{K}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{k^2+l^2}}$ と波数の変化するスケール $\left|\dfrac{1}{k}\dfrac{dK}{dy}\right|^{-1}$ の比が十分小さいことが必要である．そこで turning level 付近での波数の変化を調べる．

波数の変化するスケールは

$$
\begin{aligned}
\frac{dK}{dy} &= \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\frac{dl}{dy} \\
&= \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\frac{-2\hat{\omega}k}{gH_0 l}U_y \\
&= \frac{(U-c)k^2}{\sqrt{k^2+l^2}}\frac{U_y}{gH_0}
\end{aligned}
$$

よって波長と波長に変化するスケールの比は，

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{K}}{\left|\frac{1}{K}\frac{dK}{dy}\right|^{-1}} &= \left|\frac{1}{K^2}\frac{dK}{dy}\right| \\
&= \left|\frac{1}{k^2+l^2}\frac{(U-c)k^2}{\sqrt{k^2+l^2}}\frac{U_y}{gH_0}\right| \\
&= \left|\frac{k^2}{(k^2+l^2)^{\frac{2}{3}}}\frac{U_y}{gH_0}(U-c)\right| \longrightarrow \left|\frac{U_y}{gH_0 k}\sqrt{gH_0}\right| = \frac{U_y}{\sqrt{gH_0}k}.
\end{aligned}
$$

$\dfrac{U_y}{\sqrt{gH_0}k} \ll 1$ であれば，turning level まで W.K.B. 近似が使える．

しかし，W.K.B. 近似では波束が turning level に達した後の事は何も言えない．この近似では turning level に達するまでの事しか言えず，turning level の向こう側の情報は何も入ってこない．

9 linear shear 流中の浅水波の Over-Reflection 解

linear shear 流に対して無限遠から $e^{ik(x-ct)}$ の型の波を励起，伝播させせたときの定常解を求める．透過波領域において critical level から遠ざかる方向に進む波しか存在しない，という境界条件を用いる．変位だけの式 (4) について $h=\hat{h}(y)e^{ik(x-ct)}$ を代入すると

$$\frac{d^2\hat{h}}{dy^2}-\frac{2}{U-c}\frac{dU}{dy}\frac{d\hat{h}}{dy}+k^2\left\{\frac{(U-c)^2}{gH_0}-1\right\}\hat{h}=0. \tag{38}$$

平均の深さ H_0，特徴的な流れの速度 U_0，シアーの強さ $\dfrac{dU}{dy}$ を用いて無次元化を行う．

$$(x,y)=L(x^*,y^*),\qquad t=\frac{L}{U_0}t^*,\qquad \hat{h}=H_0h^*,$$
$$U=U_0U^*,\qquad L=\frac{U_0}{dU/dy}.$$

これらを (17) に代入すると無次元化した変位の式が得られる．

$$\frac{d^2\hat{h}}{dy^2}-\frac{2}{y}\frac{d\hat{h}}{dy}+k^2\left\{Fr^2y^2-1\right\}\hat{h}=0. \tag{39}$$

ただし y 座標の原点を critical level $U-c=0$ に選んだ．Fr はフルード数 $Fr\equiv\dfrac{U^2}{gH_0}$ である．*は省略してある．

(18) を $y=0$ のまわりの級数解として求めると（Satomura(1981)）．

$$\hat{h}_1 = \sum_{n=0}^{\infty}A_ny^{2n+3}, \tag{40}$$
$$A_1=\frac{k^2}{10}A_0,\quad A_{n+1}=\frac{k^2}{(2n+5)(2n+2)}(A_n-Fr^2A_{n-1}),$$
$$\hat{h}_2 = \sum_{n=0}^{\infty}A_ny^{2n}, \tag{41}$$
$$B_1=-\frac{k^2}{2}B_0,\quad B_{n+1}=\frac{k^2}{(2n+2)(2n-1)}(B_n-Fr^2B_{n-1}).$$

となる．

$y\to\pm\infty$ における (18) の解の振舞いを調べる．$\hat{h}=\mid y\mid\tilde{h}$ と変数変換すると (18) は

$$\frac{d^2\tilde{h}}{dy^2} + \left\{ k^2(Fr^2y^2 - 1) - \frac{2}{y^2} \right\} \tilde{h} = 0. \tag{42}$$

この式は $y \to \pm\infty$ で

$$\frac{d^2\tilde{h}}{dy^2} + k^2Fr^2y^2\tilde{h} = 0. \tag{43}$$

に漸近する．これに W.K.B. 近似を適用して $y \to \pm\infty$ での漸近解が得られる．

$$\tilde{h}_+ = \mid P \mid^{-1/4} exp\left(i \int^y \sqrt{P} dy \right), \tag{44}$$

$$\tilde{h}_- = \mid P \mid^{-1/4} exp\left(-i \int^y \sqrt{P} dy \right). \tag{45}$$

ただし $P = k^2Fr^2y^2$ である．$\tilde{h}_+$ は critical level から離れる方向，$\tilde{h}_-$ は critical level に向かう方向に進む波を表わす．境界条件を用いて解を定めよう．透過波領域 $y \to \infty$ においては critical level から離れる方向に進む波しかないので

$$\tilde{h} \equiv \alpha\tilde{h}_1 + \beta\tilde{h}_2 \sim A\tilde{h}_+ \tag{46}$$

となる．ただし $\tilde{h}_{1,2}$ は $\hat{h}_{1,2}$ を $\mid y \mid$ で割り算したものであり，α, β, A は複素定数である．ここで $\tilde{h}_+$ について $\dfrac{d\tilde{h}_+}{dy} + \left(\dfrac{dP/dy}{4 \mid P \mid} + i\sqrt{P} \right) \tilde{h}_+ = 0$ が成り立つことから α と β の比が定まる．

$$\frac{\beta}{\alpha} = - \left[\frac{\frac{d\tilde{h}_1}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} + i\sqrt{P} \right) \tilde{h}_1}{\frac{d\tilde{h}_2}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} + i\sqrt{P} \right) \tilde{h}_2} \right]_{y=y_{obs}}. \tag{47}$$

y_{obs} は透過波側で W.K.B. 近似が十分成り立つ点である．

$Fr = 7.0, k = 4.0$ での結果を図 7 に示す．反射波の振幅が入射波より大きくなっている（Over-Reflection）．

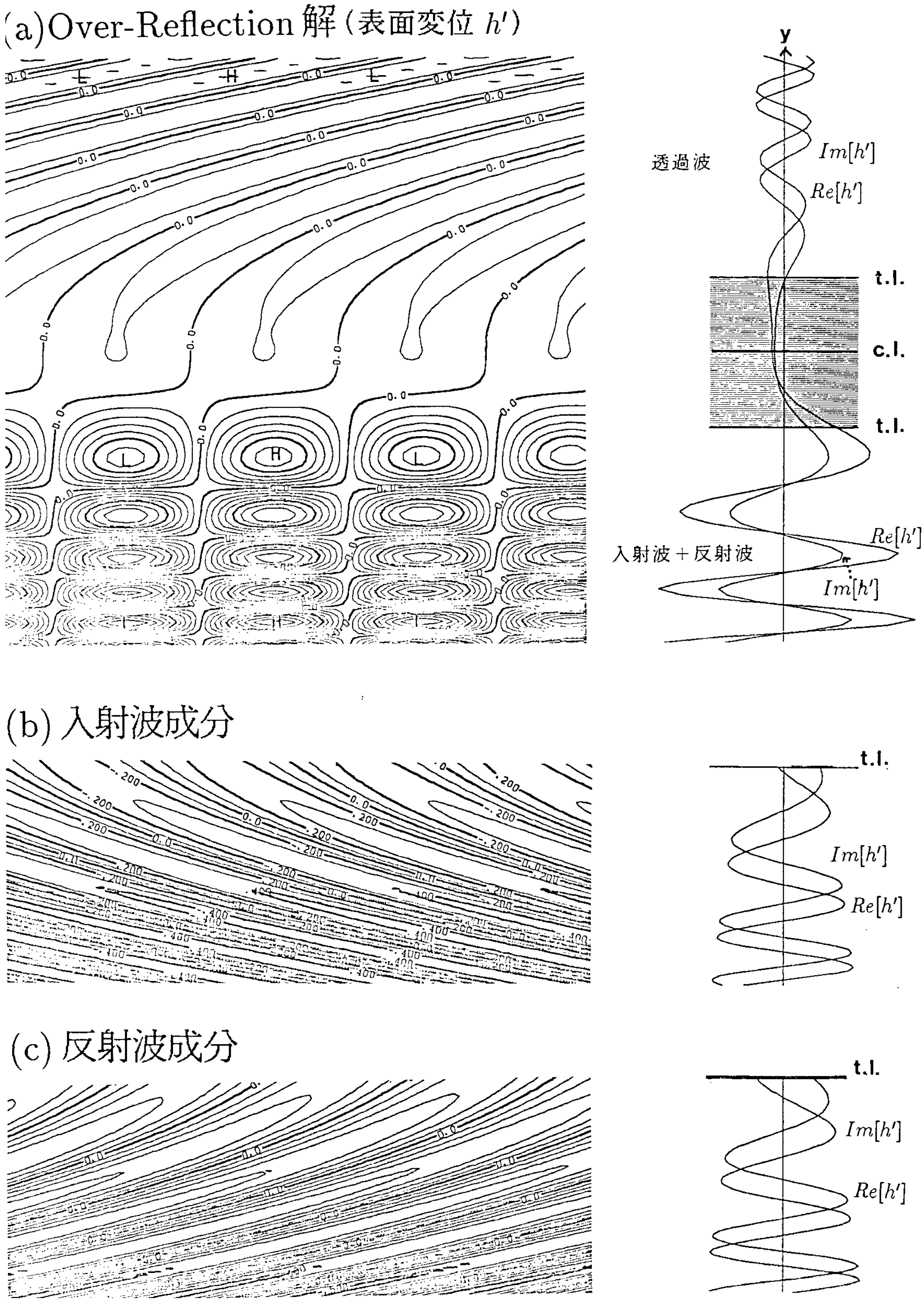

図 7: 浅水波の Over-Reflection 解

10　浅水波の wave action の保存則

(1)〜(3) よりエネルギーの式を作る．

$u \times (1) + v \times (2)$ より，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\} + uv\frac{dU}{dy} = -g\boldsymbol{v}\cdot\nabla h \tag{48}$$

$\dfrac{gh}{H_0} \times (3)$ より，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{g}{2H_0}h^2\right) + gh\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{49}$$

(27), (28) を足すことにより，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)E + \mathrm{div}(gh\boldsymbol{v}) + uv\frac{dU}{dy} = 0. \tag{50}$$

ただし E は擾乱のエネルギー

$$E \equiv \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+\frac{g}{H_0}h^2\right)$$

W.K.B. 解を用いることにより $O(\varepsilon^0)$ の展開から，

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{gk}{\hat{\omega}}h_0 \\ v_0 &= \frac{gl}{\hat{\omega}}h_0 \end{aligned}$$

ただし $\hat{\omega} \equiv \omega - Uk$ である．これを用いると擾乱のエネルギーの 1 波長平均 $\bar{E}$ は

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{gk}{\hat{\omega}}^2\right) + \left(\frac{gl}{\hat{\omega}}^2\right) + \frac{g}{H_0}\right\}\overline{h_0^2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{g(k^2+l^2)}{\hat{\omega}^2} + \frac{g}{H_0}\right\}\overline{h_0^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2g}{H_0}\overline{h_0^2} \\ &= \frac{g}{H_0}\overline{h_0^2} \end{aligned}$$

また，

$$\frac{k}{\hat{\omega}} = \frac{k}{\sqrt{gH(k^2+l^2)}} = \frac{c_{gx}}{gH_0}$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\overline{ghu}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g^2 k}{\hat{\omega}}\overline{h_0^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{c}_{gx}\frac{g}{H_0}\overline{h_0^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\hat{c}_{gx}\bar{E}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\overline{ghv}) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g^2 l}{\hat{\omega}}\overline{h_0^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{c}_{gy}\frac{g}{H_0}\overline{h_0^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(\hat{c}_{gy}\bar{E}).
\end{aligned}
$$

また波数保存則より

$$
\begin{aligned}
\frac{D_g\hat{\omega}}{Dt} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_{gx}\frac{\partial}{\partial x} + c_{gy}\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{\omega} \\
&= \frac{D_g\omega}{Dt} - U\frac{Dk}{dt} - k\frac{DU}{Dt} \\
&= -kc_{gy}\frac{dU}{dy}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\overline{uv}\frac{dU}{dy} &= -\frac{1}{kc_{gy}}\frac{D_g\hat{\omega}}{Dt}\overline{uv} \\
&= -\frac{1}{kc_{gy}}\frac{g^2 kl}{\hat{\omega}^2}\overline{h_0^2}\frac{D_g\hat{\omega}}{Dt} \\
&= -\frac{g\overline{h_0^2}}{H_0}\frac{1}{\hat{\omega}}\frac{D_g\hat{\omega}}{Dt} \\
&= -\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\frac{D_g\hat{\omega}}{Dt}
\end{aligned}
$$

これらより (29) の 1 波長平均をとると，

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{E} + \frac{\partial}{\partial x}(c_{gx}\bar{E}) + \frac{\partial}{\partial y}(c_{gy}\bar{E}) - \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_{gx}\frac{\partial}{\partial x} + c_{gy}\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{\omega} = 0,
$$

よって，浅水波の wave action 保存則がもとまる．

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_{gx}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c_{gy}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) = 0. \tag{51}
$$

11　参考文献

Satomura,T.,1981 : An investigation of shear instability in a shallow water. *J.Met.Soc.Japan*,**59**,148-167

Takehiro, S. and Hayashi, Y.-Y., 1992: Overreflection and shear instability in a shallow water. *J.Fluid.Mech.*, (in print).

Whitham,G.B.,1974 : Linear and nonlinear waves. A Wiley-Interscience Publication,636pp.

竹広真一, 1989 : 浅水波の Over-Reflection とシアー不安定.（修士論文）