線型波動概説

林 祥介

2014 年 04 月 11 日

1 線型波動理論

系を記述する微分方程式がめでたく得られたものとしよう. 系の振舞いを方程式の解の振舞いとして考察することができるようになったわけであるが, 往々にしてそれはたやすいことではない. しかしながら, 方程式系の適当な解がわかっている場合[1]にはその解の周り系を線型化することにより解の振舞いの考察が多少は楽になる. このような作戦を線型解析という.

一方, 方程式の解の考察するもう一つの方法として, 解の大方の形を想像してエイヤッと解いてみることもよく行なわれる. 解の形としてよく用いられるのが波の形である. 波は位相関数なるものを導入して表現される. このような作戦を波動解析という.

線型波動理論は上述の 2 つの作戦を合体させたものであり, 偏微分方程式の解の振舞いを解析するための極めて古典的な手法であり, 俗には WKB 近似とも称されている.

線型波動理論の組み立ては, フーリエ積分の漸近評価に端を発する. 無限空間での定数係数線型偏微分方程式の解をもとめるためには, フーリエ積分を用いれば便利な場合が多い. 定数係数線型方程式の解として形式的に得られるフーリエ積分を, 十分時間がたったとき, すなわち, t が大きいところで鞍点法/停留点法使って概ねの評価を行なうと波型の解

$$\phi = A(x,t)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{1}$$

が得られる. A を振幅関数, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t$ を位相関数という. この波型の解において $\boldsymbol{k}$ は $(\boldsymbol{x},t)$ の関数であり, ω と $\boldsymbol{k}$ との間には分散関係式

$$\omega = \omega(\boldsymbol{k}) \tag{2}$$

が存在していることに注意されたい. 群速度

$$c_g = \frac{d\omega(k)}{dk} \tag{3}$$

[1] 残念ながら多くの場合は, すべて静止している, とかの自明解でしかないが

は積分を評価する際の鞍点を与える場所として導入され, 振幅 A が移動する速度としての意味付けが与えられる.
線型波動理論で中心となるのは波線理論である. フーリエ積分を評価することにより波形の解が存在することを数学的に示すことができた. 波線理論では最初から波形の解が存在するものとして話を展開する. もはや, 方程式は定数係数である必要はなく, また, 領域も無限領域でていぎされている必要もない. ただし, 波数, 振動数が系の領域や場の変化に比べて十分に大きいことが必要とされる. 振幅, 波数, 振動数は $(\boldsymbol{x}, t)$ に関してゆっくり変化する関数としよう. このことを表現するために漸近展開という手法を用いる. $\varepsilon \ll 1$ なる微小パラメータを使って座標と時間とを

$$X \equiv \varepsilon x, \tag{4}$$
$$T \equiv \varepsilon t, \tag{5}$$

なる変数 (遅い変数, slow variable, という) に置き換え, 振幅 A, 位相関数 $theta$ については

$$A = \sum_n \varepsilon^n A_n(\boldsymbol{X}, T), \tag{6}$$
$$\Theta \equiv \varepsilon\theta(\boldsymbol{X}, T), \tag{7}$$

とみなせるものとして, 方程式を ε で展開するのである. 当然方程式の係数も $\boldsymbol{X}, T$ の関数であるものとする. かくして順次局所分散関係と波線方程式, 振幅方程式が得られる. 以上のようにして定数係数でない偏微分方程式に対しても波型の解を構築できるのである.
振幅 A_0 に関する発展方程式は $|A_0|^2$ (に適当な重みをかけた量) の保存形で書き表すことのできる場合が多い. このことは, 通常の物理系が変分原理で記述できることに起因している. ハミルトン関数を持ち, 変分原理で記述できるような系においては, 振幅と位相関数とによって記述できるような解に対してハミルトン関数を位相で平均してやることにより, 波の作用 (wave action) と呼ばれる保存量が存在することが示される. このようにして波型の解に対する基礎方程式を導出する方法を平均変分原理という. 系が並進対称性をもつ場合には波の作用は擬運動量と呼ばれる運動量の次元の量で書き換えることができる. また, 系が時間対称性をもつ場合には波の作用は擬エネルギーと呼ばれるエネルギーの次元の量に書き換えることもできる. これらをもって波が伝播するときにはエネルギー, そして, 運動量を運ぶという言い方がなされる. 実際, 大気の角運動量の輸送には波による擬運動量という形での輸送が大きな寄与をしているのである.

2 地球流体での典型的線型擾乱 (音波, 内部重力波, ロスビー波)

波動理論を用いれば一成分一相系の理想流体の (線型) 構造を語ることができる. 散逸のない一成分一相の世界は次の方程式で与えられる.

- 質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0 \tag{8}$$

- 運動量保存則

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j v_k = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{9}$$

- エネルギー保存則

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s v_j}{\partial x_j} = 0 \tag{10}$$

ただし, ρ は密度, v_i は速度ベクトル, p は圧力, Ω_i は系の回転角速度, Φ は重力場のポテンシャル (非自己重力系), $s = s(p, \rho)$ は単位質量あたりのエントロピーであり, その関数形 (熱力学関数) は流体の物性として与えられているものとする[1].
この世界は, 5 つの変数 $(\boldsymbol{v}, p, \rho)$ で記述されているので線型波動のモード数は全部で 5 個あるはずである. すなわち, 分散関係式は振動数 ω の 5 次方程式となる. しかし系に適当な非対称性のがないと 5 つのモードのうち 3 つは通常現れない. 地球流体でよく考察されるような状況では次のような形でモードが現れる.

1. 音波

   非対称性がなくとも必ず存在する粗密波である. 回転なし, 重力なしの世界において, 密度一定, 速度なしという解の周りで方程式を線型化すれば音波のみが得られる. このとき分散関係は

   $$\omega^3(\omega^2 - c_s^2|\boldsymbol{k}|^2) = 0. \tag{11}$$

   となる. ただし $c_s \equiv \sqrt{\partial p/\partial \rho}$ は音速である. $\omega = 0$ のモードは渦 $(\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0)$ に対応するモードである. 系になんらかの非対称性がないかぎり渦モードは分散しない.

[1] 通常は状態方程式と比熱とで構成される

2. **内部重力波**

   重力一定の世界において, 重力軸方向に密度成層が存在していると, 重力軸と直交する 2 つの軸の渦モードの縮退が解けて, 内部重力波と呼ばれるモードが発生する. 内部重力波は浮力を復元力とする波動である. 重力軸と平行でかつ一様な回転軸を入れても事情は変わらない. モードの構成は, 音波が 2 つと内部重力波が 2 つ, そして, $\omega = 0$ で縮退したままの重力軸と平行な軸を持つ渦モード ($\nabla\times\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{\Omega}$) となる.

3. **ロスビー波**

   ロスビー波と呼ばれるモードはただ世界が回転しているだけでは現れてはこない. 回転または成層に非一様性があれば最後の縮退が解けて $\omega \neq 0$ となる. ロスビー波はポテンシャル渦度保存則に根をもつ波動擾乱の総称名称である. ポテンシャル渦度保存則は流体特有の, しかしながら, 運動量保存則, エネルギー保存則と並ぶ基本的な保存則の一つ[2] である. ポテンシャル渦度保存則が形式的に

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla q \;\;=\;\; 0 \tag{12}$$

   と書き下されているものとしよう. ここで, q はポテンシャル渦度, $\boldsymbol{v}$ は流速場, $(t, \boldsymbol{x})$ は時間空間座標である. 系からロスビー波成分を抽出することはポテンシャル渦度と流速場との間に時間微分を含まない適当な作用素 $\mathcal{L}$ が (近似的に) 存在して

$$\boldsymbol{v} \;\;=\;\; \mathcal{L}(q) \tag{13}$$

   と書き表されるときに可能となる. このとき, (12) は q の t に関する 1 階の偏微分方程式となり, それが音波, 内部重力波ではない残りの一つのモードに対応しているのである. 線型化して波動擾乱が存在するためには, 線型化される基本場のポテンシャル渦度の勾配 ∇q が存在しなければならない. このような非対称性をもたらしものが存在するときに線型波動としてのロスビー波があわれることになる.

地球流体的な状況, すなわち, 惑星大気や海洋の運動を議論する際に必要となる流体の特性は以上の 5 つのモードの波動の特性によって多くが語られる. 大気海洋中の情報の伝播速度, 物の移流速度等はまさに波動特性が支配しているからである.

[2]流体のラベル対称性という. 理想流体の運動は「墨流し」に関して普遍であるということ. どのような色を仮想的につけてもその運動は変わらない. 質点力学でも同種粒子の交換, 質点の番号 i と j の入れ換え, に対して系は普遍である. 流体の場合はラベル i が連続写像なので話が難しい. 興味のある人は Salmon (1988) 等を参照されたい.

3　波動マニュアルの構成

線型波動の基礎　ここでは線型波動理論の基礎付けをおこなう.

線型波動各論　ここでは地球流体で登場する基本的な波動の性質を記述する.

- **音波**　成層のない場合の音波, 成層がある場合の音波の構造, そして, 方程式系から音波を除去する方法について記述する.
- **内部重力波 (非回転ブシネスク系)**　非回転系のブシネスク成層流体の特性として内部重力波を見る.
- **ロスビー波 (2 次元非発散 β 平面)**　β 平面上の 2 次元非発散系の特性としてロスビー波を見る.
- **浅水波 (非回転系)**　非回転系の浅水方程式系の特性として浅水波を見る. 浅水系は地球流体で登場する系の図式化としてよく用いられる系である.