MHDにおける磁場に関する保存則

吉田茂生・竹広真一・佐々木洋平・林祥介

2002年7月12日

目 次

概 要

流体が完全導体とみなせる場合, 磁場の時間変化は完全導体の誘導方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{1}$$

によって記述される. これは完全流体の渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{2}$$

と同じ形をしているので, 完全流体の渦度に関する保存則は, 完全導体の磁場についても成立する.

ここでは完全導体の磁場に関する保存則である,

- Alfv́en の定理 (磁束の保存, 磁力線凍結)
- 磁気ヘリシティー, クロスヘリシティーの保存則

を導出する.

1　完全導体の誘導方程式

磁気流体力学 (以下, MHD) における磁場の時間変化は誘導方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \eta\nabla^2\boldsymbol{B} \tag{3}$$

及び磁場のソレノイダル条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

によって記述される. ここで $\boldsymbol{B}$ は磁束密度, $\boldsymbol{v}$ は速度ベクトルである. η は磁気拡散率であり, 透磁率 μ, 電気伝導度 σ を用いて

$$\eta \equiv \frac{1}{\mu\sigma} \tag{5}$$

と定義される[1]. ここでは (3) の右辺第 2 項が無視できる条件を考える.

(3) に対して時間のスケールを τ, 長さのスケールを l, 速度のスケールを $v \sim l/\tau$ としてスケーリングすると

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t_*} = \nabla\times(\boldsymbol{v}_* \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{R_m}\nabla^2\boldsymbol{B} \tag{6}$$

となる. ここで t_* は無次元化された時間を, $\boldsymbol{v}_*$ は無次元化された速度を表すとする. R_m は磁気レイノルズ数であり, 次式で定義される:

$$R_m \equiv \frac{lv}{\eta} = \frac{\tau_M}{\tau}. \tag{7}$$

$\tau_M \equiv l^2/\eta$ は磁気拡散時間と呼ばれる. すなわち磁気レイノルズ数は磁気拡散時間と系の時間スケールとの比を表している. これが十分大きい場合には, 誘導方程式 (3) の右辺第 2 項を無視することができる.

磁気レイノルズ数が大きい, すなわち磁気拡散時間が十分長い[2] ための条件は

- 磁気拡散率が十分小さい, すなわち電気伝導度 σ が十分大きい.
- 系の空間スケール l が十分大きい.

[1]磁気流体力学の定式化についてはシリーズ「磁気流体力学の定式化」を参照されたい.

[2]通常, 磁気レイノルズ数が十分大きい現象は磁気拡散時間が十分長い現象として解釈される. なぜならば, MHD で記述される現象の時間スケールは「光速が伝播する時間スケールよりも十分大きくなければならない」という条件が, 時間スケールに対する下限として存在する. そのため磁気レイノルズ数が大きい現象を時間スケールが十分小さい現象とは考えない.

のいずれか, もしくは両方である. この時, 磁場の時間変化は

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{8}$$

によって記述される. 特に電気伝導度が無限大 ($\sigma \to \infty$) の導体は完全導体と呼ばれるため, (8) は「完全導体の誘導方程式」と呼ばれる.

(8) は完全流体[3] に関する渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{9}$$

と同じ形をしている (ここで $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla\times\boldsymbol{v}$ は流体の渦度である). よって完全流体の渦度について成立する法則は (8) で記述される磁場についてもそのまま成立する事になる. 以下では, 完全導体の誘導方程式 (8) が成立する場合の磁場に関する保存則を導出する.

[3]本文書では粘性が存在しない流体を完全流体と呼ぶ. しかしながらプラズマ物理学の本の幾つかでは, 電気伝導度が無限大の場合の磁気流体を完全流体と呼び, 粘性が存在しない流体はそのまま非粘性流体と呼ぶこともあるので注意されたい.

2 種々の量の定義

前節で述べたように, 完全流体の渦度方程式について成立する事は完全導体の誘導方程式についても成立する. よってその類似性を比較しやすいように, 流体における渦線, 渦管, 循環にあたる量として, 磁力線, 磁力管, 磁束を定義する.

2.1 磁力線

磁力線は次式で定義される:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \tag{10}$$

ここで $dx,\ dy,\ dz$ は各々 x, y, z 方向の線素, B_x, B_y, B_z は各々磁場の x, y, z 成分である. すなわち, 磁力線は曲線上の各点において磁場が曲線の接線になるように定義される.

2.2 磁力管

磁力管は任意の閉曲線 C 上の各点を通る磁力線によって形成される曲面からなる. 磁力管の形成する面上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ における法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t)$ とするとき, (10) より

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t) \perp \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \tag{11}$$

が成立する.

2.3 磁束

磁束 Φ は任意の閉曲線 C によって囲まれる面積を S とするとき,

$$\Phi \equiv \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{12}$$

で定義される. ここで $\boldsymbol{A}$ は磁気ポテンシャルであり,

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{13}$$

をみたす.

2.4 磁力管の強さ

流体における渦管の強さに対応する量として磁力管の強さを定義する. 磁力管を輪切りにする断面 S_i で磁束 Φ_i 作る:

$$\Phi_i \equiv \int_{S_i} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14}$$

ここで磁力管中を任意の二つの断面 S_i, S_j $(i \neq j)$ によって切り取り, できた閉曲面 S で磁場を面積分すると,

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} &= \int_{S_i} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_i + \int_{S_{\text{側面}}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_{\text{側面}} - \int_{S_j} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_j \\ &= \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}\, dV \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

となる (途中の式変形ではガウスの定理を用いた). ここで (11) より, 磁力管の側面において

$$\int_{S_{\text{側面}}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_{\text{側面}} = 0 \tag{16}$$

となる. よって

$$\Phi_i = \int_{S_i} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_i = \int_{S_j} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_j = \Phi_j \tag{17}$$

となる. すなわち磁束 Φ_i は断面 S_i のとり方によらない磁力管固有の量である. これを磁力管の強さという.

3 Alfv́en の定理

Alfén の定理とは,

- 磁束 Φ がラグランジュ保存量であること.
- 磁力線が流体に凍結されていること.

の二つである. これらは保存量を磁力管に注目して記述するか, 磁力線に注目して記述するかの違いであり, 両者は同じ事を言い替えただけである.

3.1 磁束の保存

流体とともに動く系からみると磁束は不変である:

$$\frac{D}{Dt}\Phi = 0. \tag{18}$$

ここで D/Dt はラグランジュ微分

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{19}$$

である. (18) は磁束はラグランジュ保存量である, とも言う. 以下では (18) を示す.

流体に固定された面 $S = S(t)$ における磁束 Φ の時間変化を考えると,

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\Phi &= \frac{D}{Dt}\int_{S(t)} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}(t) \\
&= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\Big[\int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}(t+\delta t)\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S(t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S}\Big] \\
&= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\Big[\int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}(t+\delta t)\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S}\Big] \\
&\quad + \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\Big[\int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S(t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S}\Big] \\
&= \int_{S(t)} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} + \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\Big[\int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S(t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S}\Big]
\end{aligned} \tag{20}$$

となる. ここで $S(t+\delta t)$ と $S(t)$ とで囲まれる体積を V, その側面を $\tilde{S}$ とすると,

$$\int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S(t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[\int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S(t)} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\tilde{S}} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S}\Big] - \int_{\tilde{S}} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}\, dV - \oint_C \boldsymbol{B}(t)\cdot(\, d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{v}\delta t) \quad (\because\ d\tilde{\boldsymbol{S}} =\, d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{v}\delta t) \\
&= -\oint_C (\boldsymbol{v}\delta t\times\boldsymbol{B}(t))\cdot d\boldsymbol{l} \\
&= -\int_S \nabla\times(\boldsymbol{v}\delta t\times\boldsymbol{B}(t))\cdot d\boldsymbol{S}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となる. ここで 磁場のソレノイダル条件 (4) を用いた. このことから

$$
\frac{D}{Dt}\Phi = \int_{S(t)} \Big[\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(t))\Big]\cdot d\boldsymbol{S} \tag{22}
$$

となる. すなわち完全導体の誘導方程式 (8) が成立するなら磁束の保存 (18) が成立する.

以上の導出過程は面に固定された座標 (a,b,c) を用いる事で幾分簡単に行える. ある時刻に $c = const$ である面を選ぶ. このとき面素片ベクトルは

$$
dS_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial a}\frac{\partial x_k}{\partial b}\, da\, db \tag{23}
$$

となり, その時間発展は

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}dS_i &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial a}\frac{\partial x_k}{\partial b}\, da\, db + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial a}\frac{\partial v_k}{\partial b}\, da\, db \\
&= \varepsilon_{ijk}\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial a}\frac{\partial x_k}{\partial b} + \frac{\partial x_j}{\partial a}\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial b}\Big)\, da\, db \\
&= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_l}\Big(\frac{\partial x_l}{\partial a}\frac{\partial x_k}{\partial b} - \frac{\partial x_k}{\partial a}\frac{\partial x_l}{\partial b}\Big)\, da\, db \\
&= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_l}\Big(\delta_{ln}\delta_{km} - \delta_{lm}\delta_{kn}\Big)\frac{\partial x_n}{\partial a}\frac{\partial x_m}{\partial b}\, da\, db \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmr}\varepsilon_{lkr}\frac{\partial v_j}{\partial x_l}\frac{\partial x_n}{\partial a}\frac{\partial x_m}{\partial b}\, da\, db \\
&= \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\, dS_i - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dS_j
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_S \Big[\frac{D\boldsymbol{B}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{S} + \boldsymbol{B}\cdot\Big(\frac{D}{Dt}d\boldsymbol{S}\Big)\Big] \\
&= \int_S \Big[\Big\{\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{B})\Big\}\cdot d\boldsymbol{S} + B_i\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\, dS_i - B_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dS_j\Big] \\
&= \int_S \Big[\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\Big]\cdot d\boldsymbol{S}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

となる. 一方で (8) の右辺を展開すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \\
&= (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B},
\end{aligned}
$$

ここで磁場のソレノイダル条件 (4) を用いることで

$$
\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B}. \tag{25}
$$

よって, (24) と (25) を比較する事で (18) が成立する事がわかる.

3.2 磁力線の凍結

磁力線が流体に凍結されている事を示す.

「磁力線が流体に凍結されている」とは, 次の事を意味している. ある瞬間に限りなく接近した 2 つの流体粒子が 1 つの磁力線の上にあるならば, それらの流体粒子はいつでもその磁力線の上に存在している. さらにその磁力線の強さ $\boldsymbol{B}/\rho$ はそれら 2 つの粒子間の距離に比例して変化する. 直観的には, 磁力線が流体粒子に貼り付いて一緒に移動することを意味している.

完全導体の誘導方程式 (25) をラグランジュ微分を用いて書き直すと

$$\frac{D\boldsymbol{B}}{Dt} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B} \tag{26}$$

となる. ここで流体の連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{27}$$

より

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0\\
&\to \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0\\
&\to \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0
\end{aligned}$$

となるから, この式と (26) より $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ を消去する事で,

$$\frac{D}{Dt}\Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\Big) = \Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\nabla\Big)\boldsymbol{v} \tag{28}$$

が得られる.

この式は流体中の微小線素 $\delta\boldsymbol{r}$ の時間発展

$$\frac{D}{Dt}(\delta\boldsymbol{r}) = (\delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{29}$$

と同じ形をしている. 従って, ある時刻 $t = t_0$ において, $\boldsymbol{B}/\rho$ と $\delta\boldsymbol{r}$ という二つのベクトルの向きが一致しているならば, その後も常に一致しており, その長さは互いに比例して変化する事になる.

これを数学的に表すならば, ある時刻 $t = t_0$ に 位置 $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ において

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}(\boldsymbol{a}, t_0) = \alpha\delta\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}, t_0), \quad \alpha = const \tag{30}$$

ならば, 任意の時刻 t と 位置 $\boldsymbol{x}$ において

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}(\boldsymbol{x},t) = \alpha\delta\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t) \tag{31}$$

が成立することになる.

よって磁場の時間発展の形式的な解は

$$\frac{\dfrac{B_i(\boldsymbol{x},t)}{\rho(\boldsymbol{x},t)}}{\dfrac{B_j(\boldsymbol{a},t_0)}{\rho(\boldsymbol{a},t_0)}} = \frac{\delta r_i(\boldsymbol{x},t)}{\delta r_j(\boldsymbol{a},0)} \tag{32}$$

もしくは

$$\frac{B_i(\boldsymbol{x},t)}{\rho(\boldsymbol{x},t)} = \frac{B_i(\boldsymbol{a},t_0)}{\rho(\boldsymbol{a},t_0)}\frac{\partial x_i}{\partial a_j}, \quad \delta r_i(\boldsymbol{x},t) = \delta r_j(\boldsymbol{a},t_0)\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \tag{33}$$

となる.

次に磁力線をなしている線素 $\delta\boldsymbol{r}$ について $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{B_i}{\delta r_i}$ の時間発展を考えると:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\frac{B_i}{\delta r_i}\right) = \frac{1}{\delta r_i}\frac{D}{Dt}\left(\frac{B_i}{\rho}\right) - \frac{B_i}{\rho}\frac{1}{\delta r_i^2}\frac{D}{Dt}(\delta r_i). \tag{34}$$

ここで (28), (29) より,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta r_i}\frac{D}{Dt}\left(\frac{B_i}{\rho}\right) - \frac{B_i}{\rho}\frac{1}{\delta r_i^2}\frac{D}{Dt}(\delta r_i) &= \frac{1}{\delta r_i}\frac{B_j}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{B_i}{\rho}\frac{1}{\delta r_i^2}\delta r_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\
&= \frac{1}{\rho\delta r_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(B_j - B_i\frac{\delta r_j}{\delta r_i}\right) \\
&= 0 \quad \left(\because \frac{\delta r_j}{\delta r_i} = \delta_{ij}\right)
\end{aligned} \tag{35}$$

となる. よって

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\frac{B_i}{\delta r_i}\right) = 0. \tag{36}$$

が成立する.

(36) の直観的な意味は, 非圧縮性流体の場合を考えると理解しやすい. 流体が非圧縮性流体の場合には $\rho = const$ であるから, $B_i/\delta r_i$ が常に一定となる. つまり磁力線が伸びるとそれに比例して磁場が強くなる. このことは「磁力線は伸びると強くなる」と言われる.

4 ヘリシティの保存

境界で磁場の法線成分が存在しない場合に, 磁気ヘリシティ

$$\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,dV \tag{37}$$

及びクロスヘリシティ

$$\int \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\,dV = \int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}\,dV \tag{38}$$

がラグランジュ保存量であることを示す. 以下では, 流体は完全導体かつ非粘性順圧磁気流体であり, 保存力場中にあるとする.

先ず磁気ヘリシティについて考察する. 完全導体の誘導方程式 (8) を磁気ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と静電ポテンシャル ϕ を用いて書き直すと

$$\frac{D\boldsymbol{A}}{Dt} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - \nabla\phi \tag{39}$$

となる.

(28) 及び (39) より

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\boldsymbol{A}\Big) &= \boldsymbol{A}\cdot\frac{D}{Dt}\Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\Big) + \Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\Big)\cdot\frac{D\boldsymbol{A}}{Dt} \\
&= \boldsymbol{A}\cdot\Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\nabla\Big)\boldsymbol{v} + \Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\Big)\cdot\{(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{B}) + \nabla\phi\} \\
&= \Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\nabla\Big)(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - \phi).
\end{aligned} \tag{40}$$

これを全体積で積分すると

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\int_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,dV &= \int_V \frac{D}{Dt}\Big(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\rho}\Big)\rho\,dV \\
&= \int_V (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - \phi)\,dV \\
&= \int_S (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - \phi)\boldsymbol{B}\cdot\,d\boldsymbol{S} \\
&= 0. \quad (\because \boldsymbol{B}\cdot\,d\boldsymbol{S} = 0 \text{ on boundary})
\end{aligned} \tag{41}$$

よって磁気ヘリシティ(37) はラグランジュ保存量であることが示された[4].

[4]磁気ヘリシティはゲージ変換に対して不変である. ゲージ変換によってポテンシャルが各々

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' + \nabla\chi, \quad \phi \to \phi' + \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{42}$$

次にクロスヘリシティについて考察する. 流体が非粘性順圧磁気流体であるとした場合の運動方程式は

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\nabla P + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}, \quad P = \Omega + \int\frac{dp}{\rho} \tag{44}$$

となる. ここで ρ, p はそれぞれ流体の密度, 圧力, Ω は保存力場のポテンシャルである. また, $\boldsymbol{J}$ は電流密度ベクトルである.

(44) 及び (28) より

$$\frac{D}{Dt}\Big(\boldsymbol{u}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\Big) = \Big(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\nabla\Big)\Big(-P+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\Big). \tag{45}$$

これを全体積で積分すると

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\int_V \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}\,dV &= \int_V \frac{D}{Dt}\Big(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}}{\rho}\Big)\rho\,dV \\ &= \int_V (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\Big(-P+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\Big)\,dV \\ &= \int_S \Big(-P+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\Big)\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \\ &= 0. \quad (\because \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \text{ on boundary})\end{aligned} \tag{46}$$

よってクロスヘリシティ(38) はラグランジュ保存量であることが示された.

クロスヘリシティの物理的な意味は, 磁力線 C_B と 渦線 C_ω が一回絡んだ状況を考えると理解しやすい. C_B, C_ω 以外 では $\boldsymbol{B}=0, \boldsymbol{\omega}=0$ とする. この時, クロスヘリシティは

$$\begin{aligned}\int_V \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}\,dV &= \int_{V_1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}\,dV + \int_{V_2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}\,dV \\ &= \Phi\oint_{C_\omega}\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{l} + K\oint_{C_B}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} \\ &= 2\Phi K\end{aligned} \tag{47}$$

となる. ここで Φ は磁力線 C_B の強さ, K は渦線 C_ω の強さ (循環) である. よってクロスヘリシティが保存することより, ある時刻に一回絡んでいた磁力線と渦線は,

へ変換されたとしても, (39) は

$$\begin{aligned}&\frac{D\boldsymbol{A}'}{Dt} + \frac{D}{Dt}\nabla\chi = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}' + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\nabla\chi + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}') + \nabla\phi' + \nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} \\ &\rightarrow \frac{D\boldsymbol{A}'}{Dt} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}') + \nabla\phi'\end{aligned} \tag{43}$$

となり, その形を変えない. よって磁気ヘリシティの保存はゲージの取り方によらず成立する.

流れによって変形しても一回絡んだままであることになる. すなわちクロスヘリシティの保存は, 磁力線と渦線の「絡み」の数が保存する, という幾何学的な意味を持つ.

より一般に, 流体中に磁力線が $C_i, i = 1, 2, ...$ と無数に存在している場合を考えても,

$$\int_V \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{B}\, dV = \sum_i \Phi_i \oint_{C_i} \boldsymbol{u} \cdot\, d\boldsymbol{l} = \sum_i \Phi_i K_i. \tag{48}$$

ここで K_i は C_i により作られる面を通過する渦度のフラックスであり (44) より定数である事がわかる:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\oint_{C_i} \boldsymbol{u} \cdot\, d\boldsymbol{l} &= \oint_{C_i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}\right) \cdot\, d\boldsymbol{l} \\ &= \oint_{C_i}\left\{\frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}}{\rho} - \nabla\left(P + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right)\right\} \cdot\, d\boldsymbol{l} \\ &= 0 \quad (\because \boldsymbol{B} \parallel d\boldsymbol{l}) \end{aligned} \tag{49}$$

よって一般の場合でも, 磁力線の「絡み」の数が保存することとなる.

参考文献

Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.(著), 井上健夫, 安河内昂, 佐々木健 (共訳), 1962: 『電磁気学 – 連続媒質の電気力学 –』第 1 巻. ランダウリフシッツ理論物理学教程, 東京図書.

吉田茂生, 1990: 電磁流体力学入門. GFD ノート『電磁流体力学』第 2 章.

Moffatt,H.K, 1969: The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J.Fluid Mech.*, **35**, 117–129

謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっているものである. 原作版は吉田茂生による「電磁流体力学入門」(1990-07-03) であり, 竹広真一, 佐々木洋平, 吉田茂生, 林祥介によって「MHD における磁場に関する保存則」として書き直された (2002-07-12). セミナー参加者および校正とデバッグに協力してくれたすべての方々に感謝するものである.