2次元ベナール・レイリー型対流の数値シミュレーション

地球および惑星大気科学研究室　竹村和人

流体中において温度差が生じたとき，その差がある臨界値を超えると，流体はその温度差を解消するために運動を起こす現象を熱対流という．熱対流の最も簡単な例が，薄い流体層を下面から一様に加熱したときに生じるベナール・レイリー型対流である．本研究では，対流現象に関する研究の第一歩として，ベナール・レイリー型対流に焦点をあて，様々な数値実験を行った．

1．はじめに

レイリー（Rayliegh, 1916）は，レイリー数 Ra がある臨界値を超えると対流が発生することを発見した．

$$Ra = \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\kappa \nu}$$

α:体膨張係数　g:重力加速度　d:流体層の厚さ
κ:温度伝導率　ν:動粘性係数　Γ:鉛直方向の温度勾配

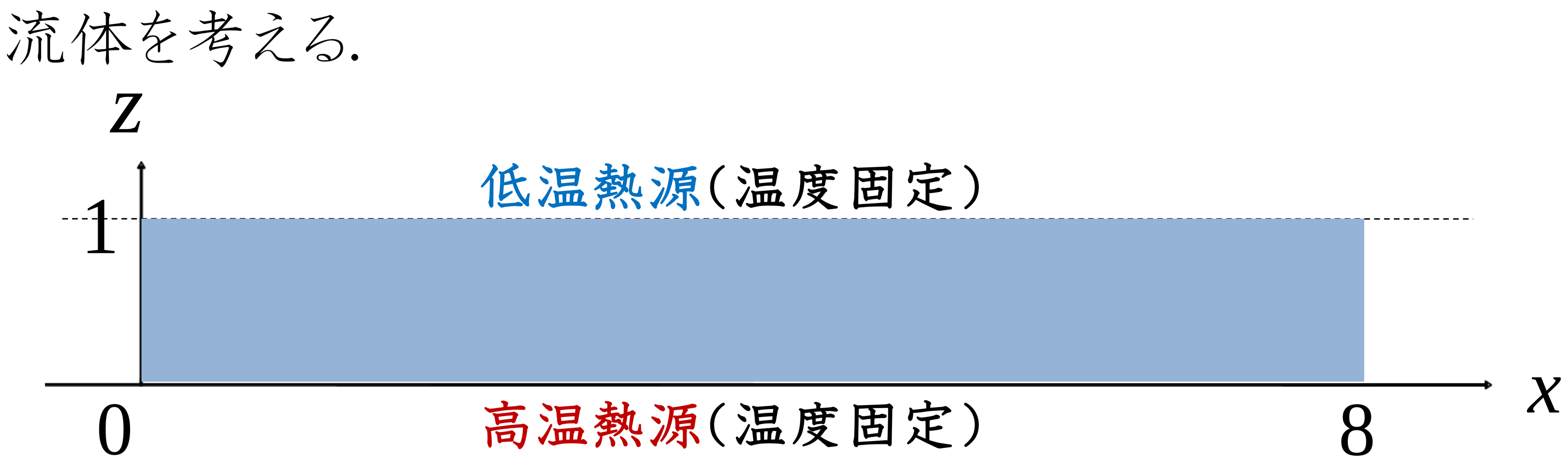
・流体層の上部・下部境界が応力なし条件である場合

$Ra < 657.5$・・・　いかなる擾乱も減衰 ➡ 熱伝導
$Ra > 657.5$・・・　発達する擾乱が存在 ➡ 熱伝導＋対流

➡ Raの値を臨界値よりも大きく設定した場合と小さく設定した場合について数値計算を行い，時間発展を求め，その結果が擾乱の発達基準に矛盾しないかどうかを確かめる．

2．系の設定と支配方程式

・2次元 x-z 平面の水路領域（$0 \le x \le 8,\ 0 \le z \le 1$）にブシネスク流体を考える．



渦度方程式（ y 成分）

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial z} = -PrRa\frac{\partial T}{\partial x} + Pr\nabla^2\eta$$

η：渦度の y 成分

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

ψ：流線関数

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z},\quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

熱力学方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 T$$

T：温度

渦度と流線関数の関係式

$$\eta = \nabla^2\psi$$

Pr：プラントル数　Ra：レイリー数

※各変数は擾乱成分
・基本場　速度 $\boldsymbol{u}$・・・静止状態
　　　　　温度T・・・熱伝導解

3．計算条件

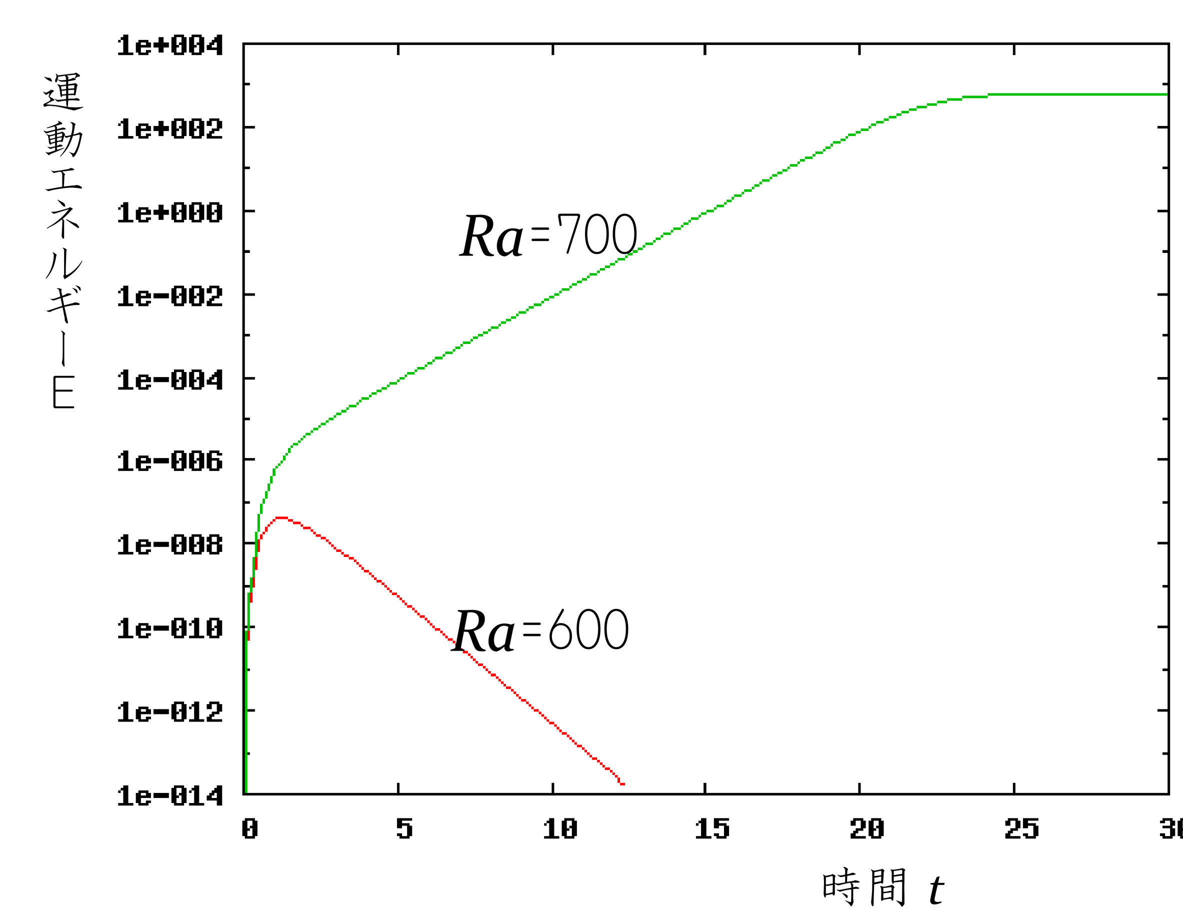
境界条件：側面境界　$x = 0,\ 8$　・・・周期的境界条件
　　　　　上下境界　$z = 0,\ 1$　・・・ 応力なし条件
初期条件：静止状態
　　　　　1 格子点に微小な温度のゆらぎを与えておく．
空間差分：2次精度の中央差分法　$\Delta d = 0.05$
　※移流項に関しては2次精度の Arakawa Jacobian
時間差分：2次精度の Adams- Bashforth法　$\Delta t = 0.0002$
プラントル数：　$\mathrm{Pr} = 1$

4．数値実験

レイリー数 Ra を 600 と 700 と設定し，時間発展問題を解き，それぞれの運動エネルギーの時間変化を調べた．
運動エネルギーの領域平均を E とすると，

$$E = \frac{1}{M}\sum_{\substack{m,n \\ (n \neq 0,20)}} (u^2 + w^2)$$

E: 運動エネルギーの領域平均
M: 和をとる格子点数
m, n：格子点位置を表すパラメータ
u, w：水平・鉛直速度



・Ra=600 のとき，運動エネルギーは時間とともにある程度増加した後，減少した．

・Ra=700 のとき，はじめのうち，運動エネルギーは大きく増加し，その後ほぼ定常状態となった．

1で述べた擾乱の発達基準と矛盾していない．

5．まとめ

・レイリー数を 600 として計算した結果，初期の微小な温度のゆらぎによる弱い流れが発生したものの，時間とともに減衰した．

・レイリー数を 700 として計算した結果，時間とともに流れは発達した後，ほぼ定常状態となった．

・上の二つの結果はレイリー（Rayliegh, 1916）が発見した擾乱の発達基準と矛盾していなかった．

6．参考文献

・Arakawa, A. ,1966: Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion. J.Comput. Phys., 1, pp119−143.
・木村　竜治，1983：気象学のプロムナード13　地球流体力学入門，東京堂出版，pp123−131.