

木星大気の静的安定度

神戸大学理学部地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室
学部4年 松村 佳明

2008/02/04

要旨

本論文では、木星大気の静的安定度、および乾燥断熱温度減率、湿潤断熱温度減率が、乾燥成分と湿潤成分とのモル比 X ($0 \leq X \leq 1$) の値が変化したときにどのように値が変わるのかを調べた。

まず、乾燥断熱温度減率、湿潤断熱温度減率、静的安定度の定式化を行い、それぞれの近似なしの式、凝縮成分が少ない場合の近似式、凝縮成分が多い場合の近似式を求め、その結果を図示した。それぞれの近似式は、 X の 1 次のオーダーの項まで導出した。さらに、近似式と近似なしの式との誤差が 1 割以内で収まる X の範囲を求めた。

目次

第1章	はじめに	3
第2章	静的安定度の定式化	4
2.1	静的安定度の定義	4
2.2	惑星大気の静的安定度の計算	6
2.2.1	気塊内で凝結が生じない場合	8
2.2.2	気塊内で凝結が生じる場合	8
2.2.3	気塊の分子量が変化しない場合	8
第3章	断熱温度減率・静的安定度の近似系	10
3.1	系の設定	10
3.2	断熱温度減率	11
3.2.1	乾燥断熱温度減率	12
3.2.2	湿潤断熱温度減率	13
3.3	静的安定度	17
第4章	木星の水雲を想定した数値計算	20
4.1	数値計算の準備	20

木星大気の静的安定度	2
4.2 計算結果	22
4.2.1 乾燥断熱温度減率	22
4.2.2 湿潤断熱温度減率	24
4.2.3 静的安定度	28
第5章 まとめ	31
5.1 まとめ	31
謝辞	33
参考文献	34

第1章 はじめに

本論文では, 杉山 (2005) で行われた静的安定度の計算のレビューを行う. 木星大気を, 乾燥成分が水素とヘリウムの混合気体 (モル比 $He/H = 0.095$), 湿潤成分が水で構成されているとした場合の静的安定度, および乾燥断熱温度減率, 湿潤断熱温度減率を, 乾燥成分と湿潤成分のモル比 $X (0 \leq X \leq 1)$ が変化したときにどのように値が変わっていくのかを調べる.

また, 杉山 (2005) で行われた計算とは異なる方法で近似式の導出を行った. 本論文では, 近似方程式をテーラー展開を用いて X の 1 次のオーダーの項まで求め, より精度の高い近似方程式の導出を行う. また, 近似方程式が近似なしの方程式との誤差が 1 割以内に収まる X の範囲を調べた.

本論文の構成は以下のとおりである. まず第 2 章では, 静的安定度の定義を行う. 第 3 章では, 乾燥断熱温度減率, 湿潤断熱温度減率, 静的安定度の定式化を行い, それぞれの近似なしの式, 凝縮成分が少ない場合の近似式, 凝縮成分が多い場合の近似式を求める. 第 4 章では, 前章で導かれた方程式に具体的な木星大気の数値を入れて計算し, その結果をグラフ化し考察する. 第 5 章はまとめである.

第2章 静的安定度の定式化

2.1 静的安定度の定義

本章では、パーセル法による静的安定度の定式化を述べる。パーセル法とは、気塊が周囲の大気に影響を与えずに運動すると考える手法のことである。気塊が上昇することによって、本来は気塊の周囲の大気の圧力と密度も影響を受けるはずだが、パーセル法ではその影響は小さいとして無視する。

気塊を断熱的に上昇させる過程を考える。気塊の密度と周囲の空気の密度差によって浮力が生じ、その浮力を復元力とする振動の振動数を浮力振動数 (N) と呼ぶ。つまり浮力振動数とは、密度成層した状態で、流体の塊（パーセル）を断熱的に上下させたときにおこる振動の振動数のことである。浮力振動数の自乗を静的安定度 (N^2) と呼ぶ。上下させたパーセルと周囲との密度差に起因する浮力の大きさが変位に比例するので、パーセルの運動方程式は単振動の運動方程式と同じものになる。 N が負の場合は不安定成層といい、振動せずに指数関数的に変位が増大する。

気塊とその周囲の大気を考える。気塊とその周囲の大気には以下のような関係が成立すると仮定する。ただし、分子量を M 、密度を ρ 、温度を T とおき、* が付いているものは気塊、付いていないものは周囲の大気の物理量とする。 z は大気の高さを表し、気塊を変位させる前の高度を z_0 とおく。変位前の高度からのずれを δz とする。

本論文では、以下のような仮定のもとで議論を行う。

- 気塊と周囲の大気は準静的に変化するものとする。このとき、以下の関係が成り立つ。

$$p = p^*. \quad (2.1.1)$$

- 大気は理想気体の状態方程式に従う。ただし、 R は普遍気体定数である。

$$p = \frac{\rho}{M} RT, \quad p^* = \frac{\rho^*}{M^*} RT^*. \quad (2.1.2)$$

- 周囲の大気は静水圧平衡の状態であり、 g を重力加速度とすると以下の式が成り立つ。

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (2.1.3)$$

- 気塊を変位させる前の高度 $z = z_0$ において、気塊の密度 ρ^* と周囲の大気の密度 ρ は等しい。

$$\rho|_{z=z_0} = \rho^*|_{z=z_0}. \quad (2.1.4)$$

- 気塊の分子量は変化しない。すなわち、雨として凝結物が気塊から分離することは無い。

$$\frac{dM^*}{dz} = 0. \quad (2.1.5)$$

以上の仮定を踏まえた上で、静的安定度を導いていく。鉛直方向の気塊の運動方程式、

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta z = -\frac{1}{\rho^*} \frac{dp}{dz} - g \quad (2.1.6)$$

を静水圧平衡の式を使って変形すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta z = \frac{(\rho - \rho^*)g}{\rho^*} \quad (2.1.7)$$

となる。次に、(2.1.2) を用いて (2.1.7) の右边を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{(\rho - \rho^*)g}{\rho^*} &= \frac{RT^*}{pM^*} \left(\frac{pM}{RT} - \frac{pM^*}{RT^*} \right) g \\ &= \frac{T^*}{M^*} \frac{MM^*}{TT^*} \left(\frac{M}{T} \frac{TT^*}{MM^*} - \frac{M^*}{T^*} \frac{TT^*}{MM^*} \right) g \\ &= \frac{Mg}{T} \left(\frac{T^*}{M^*} - \frac{T}{M} \right) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

となる。(2.1.8) の右边を $z = z_0$ のまわりでテーラー展開すると、以下のようになる。また、ここから特に断らない引数については $z = z_0$ での量とする。

$$\begin{aligned} \frac{Mg}{T} \left(\frac{T^*}{M^*} - \frac{T}{M} \right) \Big|_{z=z_0-\delta z} &= \left\{ \left(\frac{M}{T} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{M}{T} \right) \delta z + \mathcal{O}((\delta z)^2) \right\} \\ \times \left[\left(\frac{T^*}{M^*} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{T^*}{M^*} \right) \delta z - \left\{ \left(\frac{T}{M} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{T}{M} \right) \delta z \right\} + \mathcal{O}((\delta z)^2) \right] g \\ &= g \left(\frac{M}{T} \right) \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{T^*}{M^*} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{T}{M} \right) \right\} \delta z + \mathcal{O}((\delta z)^2). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

ただし, (2.1.2) に (2.1.4) の条件を考慮すると, z_0 地点で $\frac{T^*}{M^*} = \frac{T}{M}$ となることを利用した. さらに微分項を展開し (2.1.5) より $dM^*/dz = 0$ であることを利用すると,

$$\begin{aligned} \left. \frac{(\rho - \rho^*)g}{\rho^*} \right|_{z=z_0+\delta z} &= \frac{Mg}{T} \left\{ \frac{1}{M^*} \frac{dT^*}{dz} - \frac{T^*}{M^{*2}} \frac{dM^*}{dz} - \frac{1}{M} \frac{dT}{dz} + \frac{T}{M^2} \frac{dM}{dz} \right\} \delta z \\ &= \left\{ \frac{g}{T} \left(-\frac{dT}{dz} + \frac{M}{M^*} \frac{dT^*}{dz} \right) + g \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right) \right\} \delta z \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

となる. ここで

$$N^2 \equiv \left\{ \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} - \frac{M}{M^*} \frac{dT^*}{dz} \right) - g \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right) \right\} \quad (2.1.11)$$

と定義すると,

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta z = -N^2 \delta z \quad (2.1.12)$$

となる. 上の微分方程式の解を $\delta z \propto e^{\pm iNt}$ と推定すると,

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{\pm iNt} = -N^2 e^{\pm iNt} = -N^2 \delta z \quad (2.1.13)$$

となり, $\delta z \propto e^{\pm iNt}$ は上の微分方程式の解であることがわかる. $N^2 < 0$ のとき気塊は不安定で, 変位が時間とともに指数関数的に増加する. $N = 0$ のとき気塊の変位は時間が経過しても変わらず中立となる. $N^2 > 0$ のとき気塊は安定でその運動は周期 N の単振動となる.

2.2 惑星大気の静的安定度の計算

前節の議論より, 静的安定度を与えるためには, $z = z_0$ での以下の4つ量が必要である.

1. 気塊の分子量と大気の分子量

$$M, M_* \quad (2.2.1)$$

2. 大気の温度勾配

$$\frac{dT}{dz} \quad (2.2.2)$$

3. 大気の質量分布の変化率

$$\frac{dM}{dz} \quad (2.2.3)$$

4. 気塊の温度勾配

$$\frac{dT^*}{dz} \quad (2.2.4)$$

本節では、その4つの与え方を考察する。

1. 気塊と大気の分子量の関係について、理想気体の条件が成立し、かつ $z = z_0$ において気塊の温度と周囲の大気温度が等しい、すなわち $T = T^*$ であると仮定するならば、

$$M = M^* \quad (2.2.5)$$

が成立する。その時の静的安定度は、

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} - \frac{dT^*}{dz} \right) - g \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right) \quad (2.2.6)$$

と与えられる。

2. 大気の温度分布は、大気の湿潤断熱温度減率から与えられる。地球のように活発な対流を生じる大気での温度構造は湿潤断熱温度減率に従う温度構造になっている。これは、活発な対流があることにより水蒸気の凝結による潜熱の解放が起こるためである。他の惑星大気においても、活発な対流活動が存在すれば、温度構造は湿潤断熱温度減率的な構造になっている可能性がある。
3. 大気の分子量分布は、温度構造が湿潤断熱温度減率的になっているとすると、大気の湿潤断熱的に決まる分子量減率をそのまま用いる。地球大気の分子量はほぼ乾燥成分の分子量である。他の惑星大気においても分子量分布は湿潤断熱的に決まる分子量分布からもずれている可能性が高い。しかし本節では、水蒸気が凝結したときに起きる分子量が減少する効果を安定側に最大限に見積もるために、あえて上記の設定を用いる。
4. 気塊の温度変化は断熱温度減率によって与える。気塊内で凝縮が生じるか否かで、湿潤断熱温度減率または乾燥断熱温度減率が選ばれる。

多数の凝結成分が存在する系において、大気の温度分布と分子量分布の具体的な定式化をするのは困難である。そこで本節では3の気塊の温度変化 dT^*/dz の具体的な形式を与えるにとどめる。凝結成分と乾燥成分の2成分からなる大気の温度分布と分子量分布は簡単に与えることができるが、その定式化は次章で行うこととする。

2.2.1 気塊内で凝結が生じない場合

気塊内で凝結が生じない場合, 気塊の温度変化率 dT^*/dz は以下のように表すことができる^{*1}.

$$\frac{dT^*}{dz} = -\frac{Mg}{C_p}. \quad (2.2.7)$$

(2.2.7) を (2.2.6) に代入することで, 静的安定度は以下のように表現される.

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{C_p} \right) - g \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right). \quad (2.2.8)$$

気塊は飽和しているので, 上昇させると必ず凝結が生じるはずである. (2.2.8) で見積もられる静的安定度は, 飽和した気塊を凝結が生じないように下向きに変位させた時の量とみなすことができる.

2.2.2 気塊内で凝結が生じる場合

気塊内で凝結が生じる場合には, 気塊の断熱温度減率は湿潤断熱温度減率に等しくなる.

$$\frac{dT^*}{dz} = \frac{dT}{dz}. \quad (2.2.9)$$

(2.2.9) を (2.2.6) に代入することで, 静的安定度は以下のように表現される.

$$N^2 = -\frac{g}{M} \frac{dM}{dz}. \quad (2.2.10)$$

上の式は, 気塊と周囲の大気との分子量の差が浮力振動の復元力となり静的安定度を決定することを示している. これは, 気塊の凝結物は気塊から分離せず気塊の分子量は高度が変化したあとでも一定であると仮定しているのに対し, 周囲の大気は水蒸気が凝結することにより高度が上がるほど分子量が小さくなるためである.

2.2.3 気塊の分子量が変化しない場合

従来の研究では, 大気中の可凝結成分は十分に少ないと仮定し, 大気平均分子量と平均比熱は乾燥成分のそれと等しいとみなすことがままある. そこで, そのよ

^{*1}導出過程は第3章, (3.2.7) を参照.

うな場合についても式を求めておく。この場合, (2.2.6) の右辺第 2 項の分子量効果が無視できるので,

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{M_d g}{C_{pd}} \right) \quad (2.2.11)$$

と書ける。ただし, 凝縮成分が十分に少ないので, 気塊内で凝縮は生じず, 気塊の分子量と比熱は乾燥成分の値に近似した。すなわち静的安定度は湿潤断熱温度減率と乾燥断熱温度減率との差から見積もることができる。

第3章 断熱温度減率・静的安定度の近似系

3.1 系の設定

本章では、静的安定度と凝結成分気体のモル比との関係を調べるために、簡単な系を設定し、その時の断熱温度減率と静的安定度を議論する。

簡単のために、大気は乾燥成分と凝結成分の2成分から成るものとする。乾燥成分と凝結成分の分子量をそれぞれ M_d, M_v 、乾燥成分と凝結成分の定圧モル比熱をそれぞれ C_{pd}, C_{pv} 、乾燥成分に対する凝結成分のモル比を X とする。 $0 \leq X \leq 1$ の範囲で、その時の系全体の分子量 M と比熱 C_p は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
 M &= M_d(1 - X) + M_v X \\
 &= M_d - M_d X + M_v X \\
 &= M_d + (M_v - M_d) X \\
 &= M_d \left\{ 1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} X \right\}, \tag{3.1.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_p &= C_{pd}(1 - X) + C_{pv} X \\
 &= C_{pd} - C_{pd} X + C_{pv} X \\
 &= C_{pd} + (C_{pv} - C_{pd}) X \\
 &= C_{pd} \left\{ 1 + \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} X \right\}. \tag{3.1.2}
 \end{aligned}$$

また, $1 - X = Y$ と置いたとき, $Y (0 \leq Y \leq 1)$ 使って書いた式も示す.

$$\begin{aligned} M &= M_d Y + M_v (1 - Y) \\ &= M_d Y + M_v - M_v Y \\ &= M_v + (M_d - M_v) Y \\ &= M_v \left\{ 1 + \frac{M_d - M_v}{M_d} Y \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} C_p &= C_{pd} Y + C_{pv} (1 - Y) \\ &= C_{pd} Y + C_{pv} - C_{pv} Y \\ &= C_{pv} + (C_{pd} - C_{pv}) Y \\ &= C_{pv} \left\{ 1 + \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} Y \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

3.2 断熱温度減率

Weidenschilling and Lewis(1973), Atreya and Romani(1985) に従って断熱温度減率を定式化する. 熱力学第 1 法則は,

$$dU = \delta Q + \delta W + \delta Z \quad (3.2.1)$$

である. ここで, dU は内部エネルギーの変化, δQ は系に加えられる熱量, δW は系にされる仕事, δZ は化学エネルギーの変化である. 考えている系において気体は理想気体として取り扱うことができ, その変化は断熱的であるとすると, (3.2.1) の各項は以下のように書ける.

$$dU = C_V dT, \quad (3.2.2)$$

$$\delta Q = 0, \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \delta W &= -pdV \\ &= -d(pV) + V dp \\ &= -RdT + V dp \\ &= -RdT + V \left(\frac{-Mpg}{RT} \right) dz \quad (\text{静水圧平衡の式}) \\ &= -RdT - Mgz, \quad (pV = RT) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\delta Z = -\lambda dX. \quad (3.2.5)$$

ここで, C_V は大気の定積モル比熱の平均値, T は温度, p は圧力, V は気体分子の 1 モル当たりの体積. R は普遍気体定数, g は重力加速度, λ は大気の中の凝結成分の

モル当たりの凝結のエンタルピー, dX は凝結成分のモル比の変化である. (3.2.1) に (3.2.3)-(3.2.5) を代入することで,

$$C_p dT + Mgdz + \lambda dX = 0 \quad (3.2.6)$$

となる. 但し, C_p は大気 of 定圧モル比熱の平均値で, 理想気体の場合 $C_p = C_V + R$ であることを利用した.

3.2.1 乾燥断熱温度減率

(3.2.6) の潜熱による項を無視することで乾燥断熱温度減率が求まる.

$$\begin{aligned} C_p dT + Mgdz &= 0 \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{Mg}{C_p}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

分子量と比熱ををれぞれ (3.1.1), (3.1.2), また, (3.1.3), (3.1.4) を用いて表すと, 乾燥断熱温度減率は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= -\frac{Mg}{C_p} \\ &= -\frac{M_d g}{C_{pd}} \left\{ \frac{1 + \frac{(M_v - M_d)X}{M_d}}{1 + \frac{(C_{pv} - C_{pd})X}{C_{pd}}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= -\frac{Mg}{C_p} \\ &= -\frac{M_v g}{C_{pv}} \left\{ \frac{1 + \frac{(M_d - M_v)Y}{M_v}}{1 + \frac{(C_{pd} - C_{pv})Y}{C_{pv}}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

さらに凝結成分が少ないとする近似式と凝結成分が多いとする近似式も併せて導出する. その導出は以下の通りである.

凝結成分が少ない近似

(3.2.7) 式において, 十分に凝結成分が少ない場合, つまり

$$X \ll 1 \quad (3.2.10)$$

の場合を考える。その場合には, (3.2.8) を $X = 0$ 付近でテーラー展開して以下のように近似することができる。

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= -\frac{M_d g}{C_{pd}} \left(1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} X\right) \left(1 + \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} X\right)^{-1} \\ &= -\frac{M_d g}{C_{pd}} \left(1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} X\right) \left\{1 - \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} X + \mathcal{O}(X^2)\right\} \\ &= -\frac{M_d g}{C_{pd}} \left\{1 + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} - \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}}\right) X\right\} + \mathcal{O}(X^2) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

凝結成分が多い近似

(3.2.7) において十分に凝結成分の多い場合, すなわち

$$1 - X \ll 1 \quad (Y \ll 1) \quad (3.2.12)$$

の場合を考える。その場合には, (3.2.9) を $Y = 0$ 付近でテーラー展開して以下のように近似することができる。

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= -\frac{M_v g}{C_{pv}} \left(1 + \frac{M_d - M_v}{M_v} Y\right) \left(1 + \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} Y\right)^{-1} \\ &= -\frac{M_v g}{C_{pv}} \left(1 + \frac{M_d - M_v}{M_v} Y\right) \left\{1 - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} Y + \mathcal{O}(Y^2)\right\} \\ &= -\frac{M_v g}{C_{pv}} \left\{1 + \left(\frac{M_d - M_v}{M_v} - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}}\right) Y\right\} + \mathcal{O}(Y^2) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

3.2.2 湿潤断熱温度減率

dX をモル分率と分圧の関数として表すと以下のようなになる。

$$dX = \frac{1}{p} de - \left(\frac{e}{p^2}\right) dp. \quad (3.2.14)$$

ただし, e は凝結成分の飽和蒸気圧である。(3.2.14) にクラウジウス・クラペイロンの式

$$de = \frac{e \lambda dT}{RT^2} \quad (3.2.15)$$

と, 状態方程式 (2.1.2) と静水圧平衡 (2.1.3) から求まる式,

$$dp = -\frac{pMg}{RT} dz \quad (3.2.16)$$

を (3.2.14) に代入して変形すると,

$$\begin{aligned}
 dX &= \frac{1}{p} de - \frac{e}{p^2} dp \\
 &= \frac{1}{p} \left(\frac{e\lambda dT}{RT^2} \right) - \frac{e}{p^2} \left(-\frac{Mpg}{RT} dz \right) \\
 &= \frac{e}{p} \frac{\lambda}{RT^2} dT + \frac{eMg}{pRT} dz \\
 &= \frac{\lambda X}{RT^2} dT + \frac{MgX}{RT} dz
 \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

となる.

(3.2.6) に (3.2.17) を代入することで湿潤断熱温度減率が求まる.

$$\begin{aligned}
 C_p dT + Mg dz + \lambda dX &= 0 \\
 C_p dT + Mg dz + \lambda \left(\frac{\lambda X}{RT^2} dT + \frac{MgX}{RT} dz \right) &= 0 \\
 C_p \left(1 + \frac{\lambda^2 X}{C_p RT^2} \right) dT + Mg \left(1 + \frac{\lambda X}{RT} \right) dz &= 0 \\
 \frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{C_p} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{C_p RT^2}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

分子量と比熱をそれぞれ (3.1.1), (3.1.2), また, (3.1.3), (3.1.4) を用いて表現すると, 湿潤断熱温度減率は以下のように変形できる. 一部 C_p が置き換えていないところがあるが, これは後で扱う.

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{M_d g}{C_{pd}} \left\{ \frac{1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} X}{1 + \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} X} \right\} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{C_p RT^2}} \right), \tag{3.2.19}$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{M_v g}{C_{pv}} \left\{ \frac{1 + \frac{M_d - M_v}{M_v} Y}{1 + \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} Y} \right\} \left(\frac{1 + \frac{\lambda(1-Y)}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2(1-Y)}{C_p RT^2}} \right). \tag{3.2.20}$$

さらに, 従来の研究で用いられた凝結成分が少ないとする近似を求め, さらに凝結成分が多いとする近似式もあわせて導出する.

凝結成分が少ない近似

(3.2.18) 式において十分に凝結成分が少ない場合, つまり

$$X \ll 1 \tag{3.2.21}$$

を考える. その場合には, X に関する 2 次の微少量は十分に小さいものとして無視して近似する. まず, (3.2.19) の右辺の一部である $\lambda^2 X/C_p RT^2$ の部分を $X = 0$ 付近でテーラー展開して X が 2 次以上の項を落とすと,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2 X}{C_p RT^2} &= \frac{\lambda^2 X}{C_{pd} RT^2} \left(1 + \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} X\right)^{-1} \\ &= \frac{\lambda^2 X}{C_{pd} RT^2} \left\{1 - \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} X + \mathcal{O}(X^2)\right\} \\ &= \frac{\lambda^2 X}{C_{pd} RT^2} + \mathcal{O}(X^2).\end{aligned}\quad (3.2.22)$$

となる. (3.2.22) を使い, (3.2.19) の潜熱の効果による項をさらに $X = 0$ 付近でテーラー展開すると,

$$\begin{aligned}\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{C_p RT^2}} &= \left(1 + \frac{\lambda X}{RT}\right) \left\{1 - \frac{\lambda^2 X}{C_{pd} RT^2} + \mathcal{O}(X^2)\right\} \\ &= 1 + \left(\frac{\lambda X}{RT} - \frac{\lambda^2 X}{C_{pd} RT^2}\right) X + \mathcal{O}(X^2).\end{aligned}\quad (3.2.23)$$

となる. (3.2.19) に (3.2.11), (3.2.23) を代入して X の 2 次以上の項を落とすと, 以下のように近似できる.

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= -\frac{M_d g}{C_{pd}} \left[\left\{1 + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} - \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}}\right) X\right\} + \mathcal{O}(X^2) \right] \\ &\quad \left\{1 - \left(\frac{\lambda X}{RT} - \frac{\lambda^2 X}{C_{pd} RT^2}\right) X + \mathcal{O}(X^2)\right\} \\ &= -\frac{M_d g}{C_{pd}} \left\{1 + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} - \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} - \frac{\lambda}{RT} + \frac{\lambda^2}{C_{pd} RT^2}\right) X\right\} + \mathcal{O}(X^2).\end{aligned}\quad (3.2.24)$$

凝結成分が多い近似

(3.2.18) において十分に凝結成分の多い場合, つまり

$$1 - X \ll 1 \quad (Y \ll 1) \quad (3.2.25)$$

を考える. その場合には, Y に関する 2 次の微少量は十分に小さいものとして無視して近似することができる. まず, (3.2.20) の右辺の一部である $\lambda^2(1 - Y)/C_p RT^2$

の部分で $Y = 0$ 付近でテーラー展開して Y が 2 次以上の項を落とすと,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2(1-Y)}{C_p RT^2} &= \frac{\lambda^2(1-Y)}{C_{pv} RT^2} \left(1 + \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} Y\right)^{-1} \\ &= \frac{\lambda^2(1-Y)}{C_{pv} RT^2} \left\{1 - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} Y + \mathcal{O}(Y^2)\right\} \\ &= \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2} \left(1 - \frac{C_{pd}}{C_{pv}} Y\right) + \mathcal{O}(Y^2). \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

となる. 次に, (3.2.26) を $1 + \lambda^2(1-Y)/C_p RT^2$ に代入して形を書き換えると,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\lambda^2(1-Y)}{C_p RT^2} &= 1 + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2} \left(1 - \frac{C_{pd}}{C_{pv}} Y\right) + \mathcal{O}(Y^2) \\ &= \frac{C_{pv} RT^2 + \lambda^2}{C_{pv} RT^2} - \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2} \frac{C_{pd}}{C_{pv}} Y + \mathcal{O}(Y^2) \\ &= \frac{C_{pv} RT^2 + \lambda^2}{C_{pv} RT^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2 + \lambda^2} \frac{C_{pd}}{C_{pv}} Y\right) + \mathcal{O}(Y^2) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

となる. (3.2.27) を使い, (3.2.20) の潜熱の効果による項をさらに $Y = 0$ 付近でテーラー展開すると,

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{\lambda(1-Y)}{RT}\right) \left(1 + \frac{\lambda^2(1-Y)}{C_p RT^2}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{C_{pv} RT^2 + \lambda^2}{C_{pv} RT^2}\right) \left\{\left(1 + \frac{\lambda}{RT}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{RT + \lambda} Y\right)\right\} \\ &\quad \times \left\{\left(1 - \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2 + \lambda^2} \frac{C_{pd}}{C_{pv}} Y + \mathcal{O}(Y^2)\right)\right\} \\ &= \left(\frac{1 + \frac{\lambda}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2}}\right) \left\{1 - \left(\frac{\lambda}{RT + \lambda} - \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2 + \lambda^2} \frac{C_{pd}}{C_{pv}}\right) Y\right\} + \mathcal{O}(Y^2) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

となる. (3.2.20) に (3.2.13), (3.2.28) を代入して Y の 2 次以上の項を落とすと, 以下のように近似できる.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= \left[-\frac{M_v g}{C_{pv}} \left\{1 + \left(\frac{M_d - M_v}{M_v} - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}}\right) Y\right\} + \mathcal{O}(Y^2)\right] \\ &\quad \times \left[\left(\frac{1 + \frac{\lambda}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2}}\right) \left\{1 - \left(\frac{\lambda}{RT + \lambda} - \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2 + \lambda^2} \frac{C_{pd}}{C_{pv}}\right) Y\right\} + \mathcal{O}(Y^2)\right] \\ &= -\frac{M_v g}{C_{pv}} \left(\frac{1 + \frac{\lambda}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2}}\right) \left\{1 + \left(\frac{M_d - M_v}{M_v} - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} - \frac{\lambda}{RT + \lambda}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2 + \lambda^2} \frac{C_{pd}}{C_{pv}}\right) Y\right\} + \mathcal{O}(Y^2). \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

3.3 静的安定度

(3.1.1) より,

$$\frac{dM}{dX} = \frac{d}{dX} \{M_d + (M_v - M_d)X\} = M_v - M_d \quad (3.3.1)$$

であるので, 静的安定度の式 (2.2.8) は,

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{C_p} \right) - \frac{g}{M} \frac{dM}{dX} \frac{dX}{dM} \frac{dM}{dz} \\ &= \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{C_p} \right) - \frac{g(M_v - M_d)}{M} \frac{dX}{dz} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

と表現することができる. (3.3.2) に, (3.2.17) を

$$\frac{dX}{dz} = \frac{\lambda X}{RT^2} \frac{dT}{dz} + \frac{MgX}{RT} \quad (3.3.3)$$

のように変形して代入すると,

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{C_p} \right) - \frac{g(M_v - M_d)}{M} \left(\frac{\lambda X}{RT^2} \frac{dT}{dz} + \frac{MgX}{RT} \right) \\ &= \frac{g}{T} \left[\frac{Mg}{C_p} + \frac{dT}{dz} \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d)\lambda X}{M RT} \right\} \right] - \frac{g^2(M_v - M_d)X}{TR} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

となる. dT/dz に (3.2.19) または (3.2.20) を, 分子量と比熱に (3.1.1), (3.1.2), また, (3.1.3), (3.1.4) を代入して表現すると, 静的安定度は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T} \left[\frac{M_d g}{C_{pd}} \left\{ \frac{1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} X}{1 + \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} X} \right\} - \frac{M_d g}{C_{pd}} \left\{ \frac{1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} X}{1 + \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} X} \right\} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{C_p RT^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d)\lambda X}{M_d \left\{ 1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} X \right\}} \right\} \right] - \frac{g^2(M_v - M_d)X}{TR}, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T} \left[\frac{M_v g}{C_{pv}} \left\{ \frac{1 + \frac{M_d - M_v}{M_v} Y}{1 + \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} Y} \right\} - \frac{M_v g}{C_{pv}} \left\{ \frac{1 + \frac{M_d - M_v}{M_v} Y}{1 + \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} Y} \right\} \left(\frac{1 + \frac{\lambda(1-Y)}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2(1-Y)}{C_p RT^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d)\lambda(1-Y)}{M_v \left\{ 1 + \frac{M_d - M_v}{M_v} Y \right\}} \right\} \right] - \frac{g^2(M_v - M_d)(1-Y)}{TR}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

さらに凝結成分が少ないとする近似式と凝結成分が多いとする近似式も併せて導出する. その導出は以下の通りである.

凝結成分が少ない近似

凝結成分が少ない場合の近似式を求める。まず, (3.3.5) の次の部分を $X = 0$ 付近でテーラー展開すると,

$$\begin{aligned} \frac{(M_v - M_d) \frac{\lambda X}{RT}}{M_d \left(1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} X\right)} &= \frac{(M_v - M_d) \lambda X}{RT M_d} \left\{1 - \frac{M_v - M_d}{M_d} X + \mathcal{O}(X^2)\right\} \\ &= \frac{(M_v - M_d) \lambda X}{RT M_d} + \mathcal{O}(X^2) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

となる。 (3.3.5) に (3.3.7), さらに (3.2.11), (3.2.24) で得られた結果を代入して X の 2 次以上の項を無視すると, 凝結成分が少ない場合の静的安定度の近似式は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T} \frac{M_d g}{C_{pd}} \left\{1 + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} - \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}}\right) X\right\} \\ &\quad - \frac{g}{T} \frac{M_d g}{C_{pd}} \left\{1 + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} - \frac{C_{pv} - C_{pd}}{C_{pd}} + \frac{\lambda}{RT} - \frac{\lambda^2}{C_{pd} RT^2}\right) X\right\} \\ &\quad \left\{1 - \frac{(M_v - M_d) \lambda X}{RT M_d}\right\} - \frac{g^2 (M_v - M_d)}{TR} X + \mathcal{O}(X^2) \\ &= \frac{g^2}{RT} \left\{\frac{M_d \lambda}{C_{pd} T} \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} + \frac{\lambda}{C_{pd} T} - 1\right) - (M_v - M_d)\right\} X + \mathcal{O}(X^2). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

凝結成分が多い近似

凝結成分が多い場合の近似式を求める。まず, (3.3.6) の次の部分を $Y = 0$ の付近でテーラー展開すると,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(M_v - M_d) \frac{\lambda(1-Y)}{RT}}{M_v \left\{1 + \frac{M_d - M_v}{M_v} Y\right\}} &= \frac{(M_d - M_v) \lambda (1-Y)}{M_v RT} \left\{1 - \frac{M_d - M_v}{M_v} Y + \mathcal{O}(Y^2)\right\} \\ &= \frac{(M_d - M_v) \lambda}{M_v RT} \left(1 - \frac{M_d}{M_v} Y\right) + \mathcal{O}(Y^2). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

となる。 (3.3.6) に (3.3.9), さらに (3.2.13), (3.2.29) で得られた結果を代入して Y の 2 次以上の項を無視すると, 凝結成分が多い場合の静的安定度の近似式は以下のよ

うに与えられる.

$$\begin{aligned}
N^2 &= \frac{M_v g}{C_{pv}} \left\{ 1 + \left(\frac{M_d - M_v}{M_v} - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} \right) Y \right\} \\
&\quad - \frac{M_v g}{C_{pv}} \left(\frac{1 + \frac{\lambda}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2}} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{M_d - M_v}{M_v} - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} - \frac{\lambda}{RT + \lambda} + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2} \frac{C_{pd}}{C_{pv}} \right) Y \right\} \\
&\quad \times \left\{ 1 - \frac{(M_d - M_v)\lambda}{M_v RT} \left(1 - \frac{M_d}{M_v} Y \right) \right\} - \frac{g^2 (M_v - M_d)}{TR} (1 - Y) + \mathcal{O}(Y^2) \\
&= \frac{g}{T} \left[\frac{M_v g}{C_{pv}} \left\{ 1 - \left(\frac{1 + \frac{\lambda}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2}} \right) \left(1 - \frac{(M_v - M_d)\lambda}{M_v RT} \right) \right\} - \frac{(M_v - M_d)g}{R} \right] \\
&\quad + \frac{g}{T} \left[\frac{M_v g}{C_{pv}} \left(\frac{M_d - M_v}{M_v} - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} \right) - \frac{M_v g}{C_{pv}} \left(\frac{1 + \frac{\lambda}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2}} \right) \left\{ \left(1 - \frac{(M_v - M_d)\lambda}{M_v RT} \right) \right\} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{M_d - M_v}{M_v} - \frac{C_{pd} - C_{pv}}{C_{pv}} - \frac{\lambda}{RT + \lambda} + \frac{\lambda^2}{C_{pv} RT^2} \frac{C_{pd}}{C_{pv}} \right) + \frac{(M_v - M_d)\lambda}{M_v RT} \frac{M_d}{M_v} \right] \\
&\quad + \frac{(M_v - M_d)}{g} \left. \right] Y + \mathcal{O}(Y^2). \tag{3.3.10}
\end{aligned}$$

第4章 木星の水雲を想定した数値計算

4.1 数値計算の準備

本節では、木星の水雲を想定した計算例を示す。大気の乾燥成分として水素とヘリウム混合大気 (H/He=0.095)、湿潤成分として水を想定する。そして、温度、相変化のエンタルピーを固定し、水のモル比を変化させた場合の断熱温度減率と静的安定度の変化を調べる。

計算で用いる物理量について考察する。温度を固定した場合、相変化のエンタルピーはクラウジウス-クラペイロンの式と飽和蒸気圧の式から得られる。水の飽和蒸気圧として、蒸気圧に関する実験式である Antoine の式を利用する場合、その値は以下のように与えられる^{*1}。

$$\log e' = A - \frac{B}{C + T'} \quad (4.1.1)$$

ただし、 $A = 7.919$, $B = 1.637 \times 10^3$, $C = 2.249 \times 10^2$, e' は水の飽和蒸気圧 (mmHg), T' は温度 () である。上記の e', T' をそれぞれ SI 単位系 e (Pa), T (K) を用いて表す。 e については、1 気圧のとき $e' = 760.0$ mmHg, $e = 1.013 \times 10^5$ Pa より、

$$e' = \frac{760.0e}{1.013 \times 10^5} \quad (4.1.2)$$

となる。また、 T については

$$T' = T - 273.15 \quad (4.1.3)$$

となる。 e, T を使い、さらに自然対数に直して (4.1.1) を書き換えると以下のように

^{*1}化学便覧改訂第4版基礎編 P117, P124 より。

なる.

$$\begin{aligned} \log \frac{e}{1.013 \times 10^5} 760.0 &= \left(A - \frac{B}{C + T - 273.15} \right) \\ \frac{\ln(e/133)}{\ln 10} &= \left(A - \frac{B}{C + T - 273.15} \right) \\ \ln e - \ln 133 &= \left(A - \frac{B}{C + T - 273.15} \right) \ln 10 \\ \ln e &= \left(A - \frac{B}{C + T - 273.15} \right) \ln 10 + \ln 133. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

(4.1.4) を (3.2.15) に代入すると, 相変化のエンタルピーは以下のように表現される.

$$\begin{aligned} \lambda &= RT^2 \frac{d \ln e}{dT} \\ &= RT^2 \frac{B \ln 10}{(C + T - 273.15)^2}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

以上の議論を踏まえた上で計算に利用する物理量とパラメタをまとめると以下のようになる.

定数一覧

	乾燥成分	湿潤成分 (水)
分子量 (kg/mol)	2.323×10^{-3}	18.00×10^{-3}
比熱 (J/K mol)	27.66	33.50

重力加速度 (m/s ²)	23.20
気体定数 (J/K mol)	8.314

実験に用いるパラメタ

(4.1.5) を使ってある温度での相変化のエンタルピーの値を求めると, 以下のようになる.

	温度 (K)	相変化のエンタルピー (J/K mol)
case1	200	54417
case2	300	44492
case3	400	40518
case4	500	38384

4.2 計算結果

4.1 節で求めた数値の値を代入して、乾燥断熱温度減率、湿潤断熱温度減率、静的安定度の計算を行い、結果を図示した。なお、グラフの横軸は全て乾燥成分凝結成分とのモル比 X の値である。また、現実の木星大気では乾燥成分に対する可凝結成分の割合が少ないので、凝結成分が少ない場合の変化が良くわかるように片対数グラフとした。

4.2.1 乾燥断熱温度減率

図 4.2.1) で乾燥断熱温度減率をモル比の関数としてプロットした。近似なしの式 (3.2.7) と、近似式の誤差が 1 割以内で収まる範囲を求めたところ以下のようになった。

条件, 近似式	誤差が 1 割以内の範囲
$X \ll 1$; (3.2.11) 式	$0 \leq X \lesssim 0.6$
$1 - X \ll 1$ ($Y \ll 1$); (3.2.13) 式	$0.4 \lesssim X \leq 1$ ($0 \leq Y \lesssim 0.6$)

テーラー展開して X, Y の 2 次以上の項を落とした近似式でも、凝結成分が少ない場合、多い場合のともに、 $0 \leq X \lesssim 0.6$, $0 \leq Y \lesssim 0.6$ という広い範囲で精度良く近似することができる。

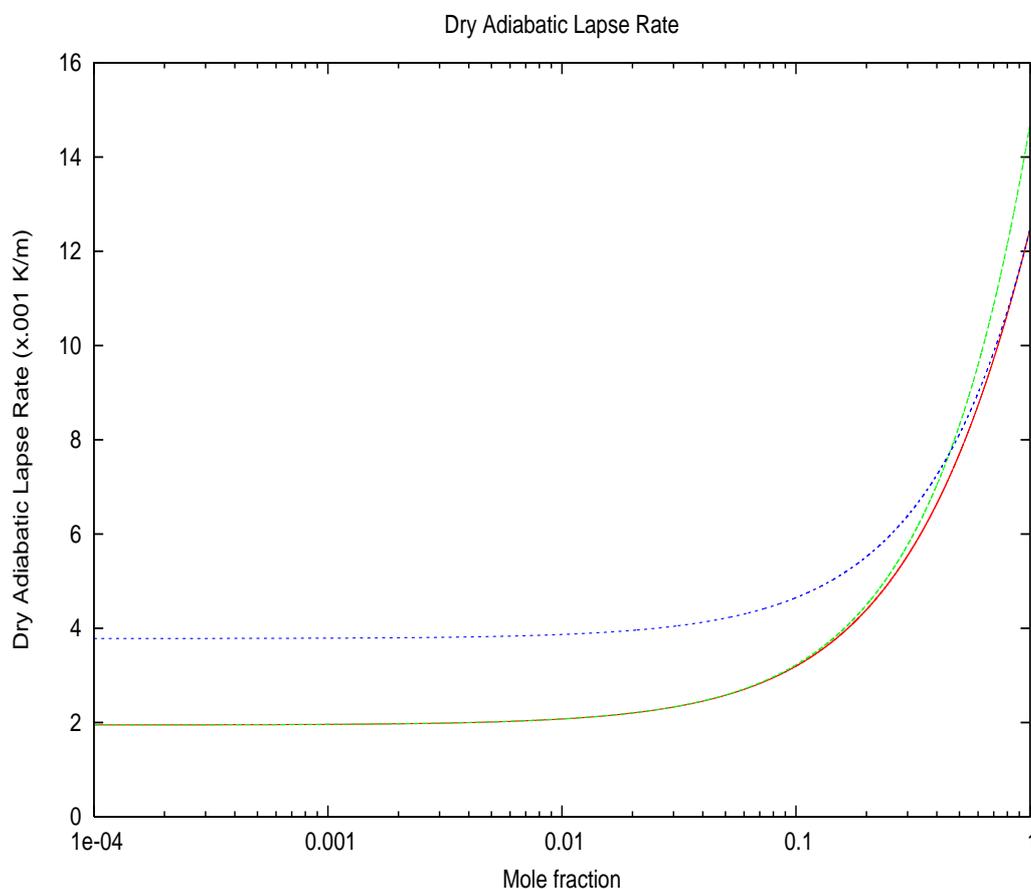


図 4.2.1: 乾燥断熱温度減率. モル比が0.1を越えたあたりから急激に値が大きくなる. 赤線: 近似なし (3.2.7) を用いた場合. 緑線: 凝結成分の少ない近似 (3.2.11) を用いた場合. 青線: 凝結成分の多い近似 (3.2.13) を用いた場合.

4.2.2 湿潤断熱温度減率

図 4.2.2 において, case2($T = 300K$) での湿潤断熱温度減率をモル比の関数としてプロットした. 凝結成分のモル比を増加させると相変化に伴う熱の解放によって湿潤断熱温度減率はしだいに小さくなる. しかし, モル比が 0.1 を越えたあたりから分子量の効果 (M が $M_d = 2.323 \times 10^{-3}$ から $M_d = 18 \times 10^{-3}$ までの変化) によって値が増加に転じる. これは, 気塊が上昇するとき気塊は断熱膨張をおこし周囲の大気に仕事をするが, その際, 周囲の大気の分子量が大きいほど多くの仕事を必要とし, 気塊の内部エネルギーが減少が大きくなるためである.

図 4.2.3 には, 相変化に伴う熱の解放の効果を見るために, (3.2.19) の右辺の $(1 + \lambda X/RT)/(1 + \lambda^2 X/C_p RT^2)$ をプロットした. モル比を増やしていくと値が小さくなっていくが, 0.1 を越えるあたりからは最大値に漸近するようになる.

図 4.2.4 には, case1 case4 の場合として, 温度 T を変化させた場合の湿潤断熱温度減率を示す. 温度が高いほど湿潤断熱温度減率の値は小さくなっている. これは, 水蒸気で飽和している大気は, 温度が高いほうが単位温度下がったときにより多くの凝結が発生し潜熱が放出され, 断熱温度減率が小さくなるためである.

近似なしの式 (3.2.19) と, 近似式の誤差が 1 割以内で収まる範囲を求めたところ以下ようになった.

条件, 近似式	誤差が 1 割以内の範囲
$X \ll 1$; (3.2.24) 式	$0 \leq X \lesssim 4.0 \times 10^{-3}$
$1 - X \ll 1$ ($Y \ll 1$); (3.2.29) 式	$0.13 \lesssim X \leq 1$ ($0 \leq Y \lesssim 0.87$)

凝結成分が多い場合の近似式は $0 \leq Y \lesssim 0.87$ というかなり広い範囲で精度良く近似できている. しかし, 少ない場合の近似式が近似なしの式との誤差が 1 割以内で収まる範囲は $0 \leq X \lesssim 4.0 \times 10^{-3}$ で, それ以降急激に近似なしの式の値と離れていく.

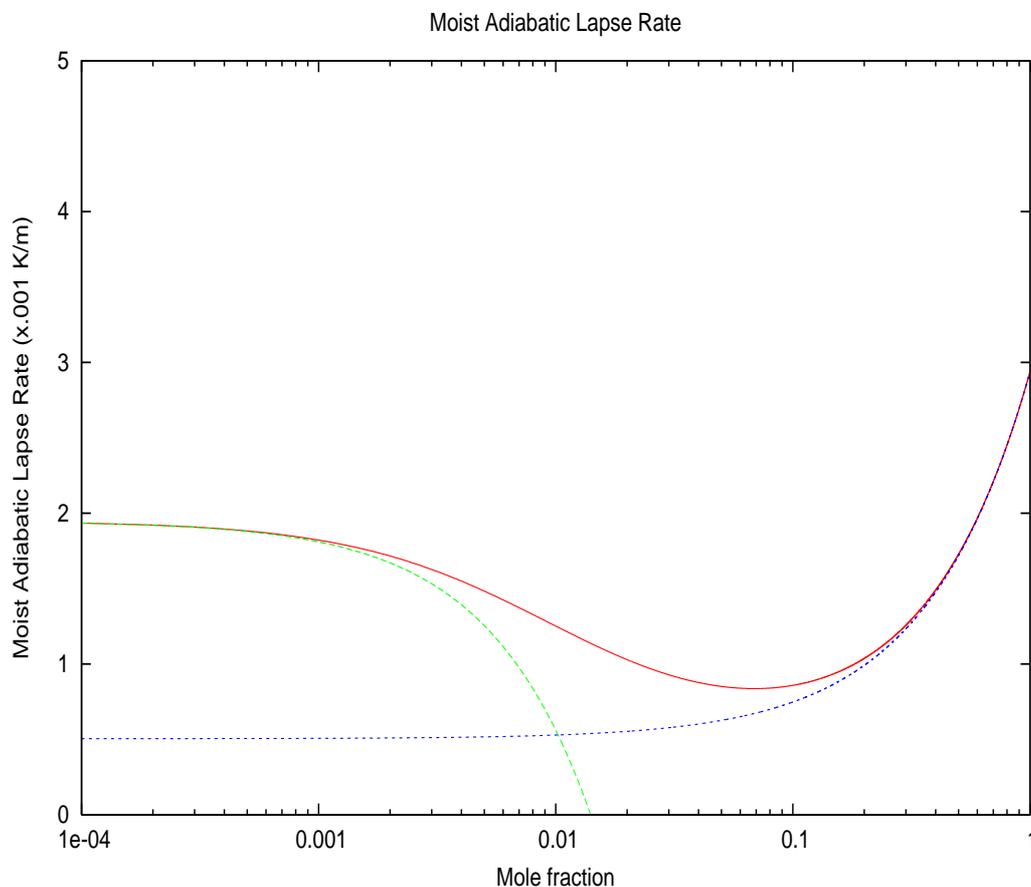


図 4.2.2: $T = 300K$ での湿潤断熱温度減率. 凝結成分のモル比を増加させると相変化に伴う熱の解放によって湿潤断熱温度減率は次第に小さくなる. しかし, モル比が 0.1 を越えたあたりから分子量の効果 (M が $M_d = 2.323 \times 10^{-3}$ から $M_d = 18 \times 10^{-3}$ までの変化) によって, 値が大きくなる. 赤線: 近似なし: (3.2.19) を用いた場合. 緑線: 凝結成分の少ない近似 (3.2.24) を用いた場合. 青線: 凝結成分の多い近似: (3.2.29) を用いた場合.

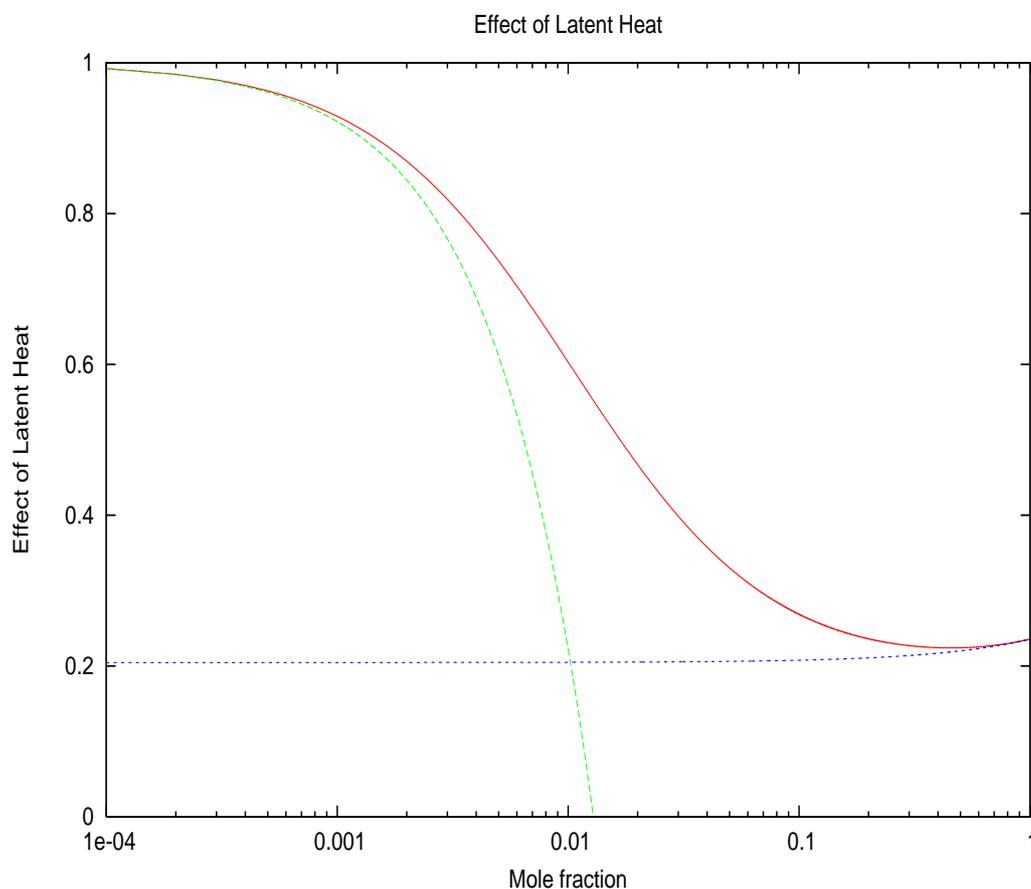


図 4.2.3: $(1 + \lambda X/RT)/(1 + \lambda^2 X/C_p RT^2)$ のプロット. この値は, 同じモル比での乾燥断熱温度減率に対する湿潤断熱温度減率の比の割合を示している. 赤線: 近似なしの場合. 緑線: 凝結成分の少ない条件が成立する場合 (3.2.23). 青線: 凝結成分の多い条件が成立する場合 (3.2.28).

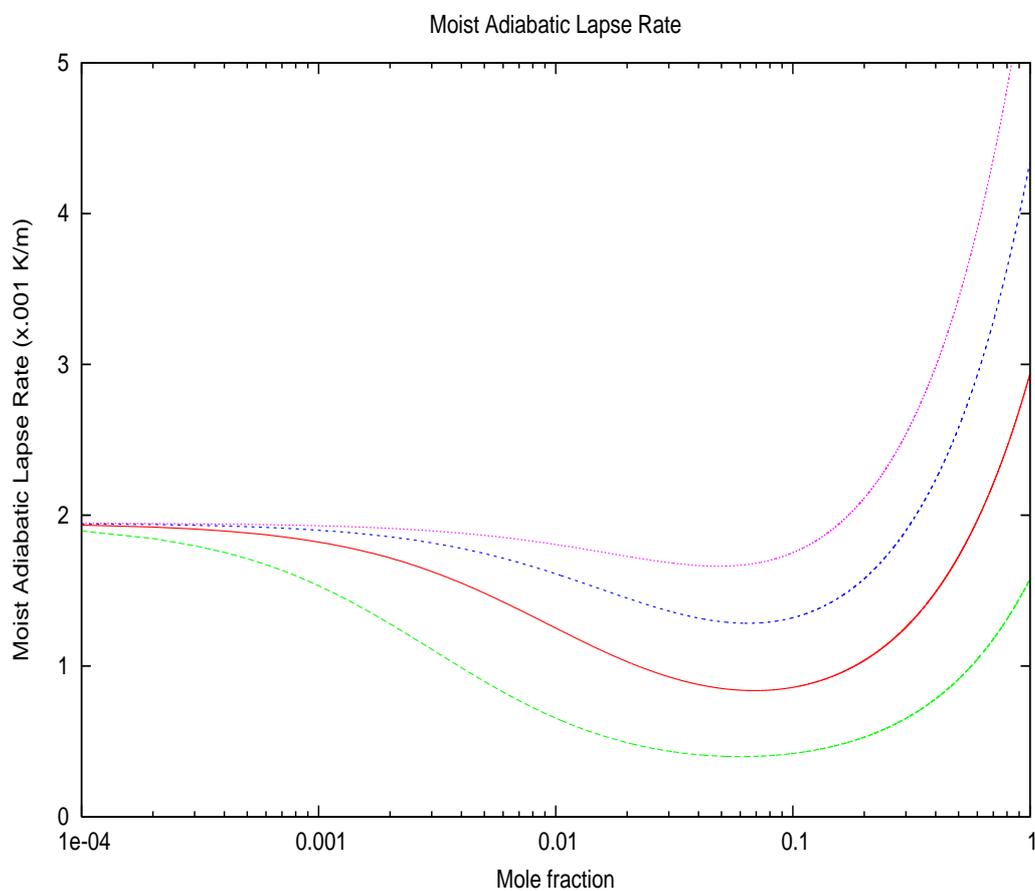


図 4.2.4: 温度 T を変化させた場合の湿潤断熱温度減率. 緑線は case1($T = 200K$), 赤線は case2($T = 300K$), 青線は case3($T = 400K$), 紫線は case4($T = 500K$).

4.2.3 静的安定度

図 4.2.5 において, case2($T = 300K$) での静的安定度をプロットした. 凝結成分のモル比を増加させると, 乾燥断熱温度減率はほぼ一定にもかかわらず湿潤断熱温度減率は緩やかに減少するので, 静的安定度の値はゆっくり増加する. しかしモル比が 0.1 を越えたあたりから分子量変化の効果 (M が $M_d = 2.323 \times 10^{-3}$ から $M_v = 18 \times 10^{-3}$ まで変化) によって, その値が急激に増加する. これは, 気塊からは凝結成分が乖離しないと仮定しているので, 凝結成分が多いほど, 気塊が上昇したときに周囲の大気との密度差 (気塊が上昇すると $\rho \leq \rho^*$ となる) が大きくなり, 気塊がより安定となるためである.

図 4.2.6 には, case1 case4 の場合として, 温度 T を変化させた場合の静的安定度を示す. 静的安定度は温度の逆数に比例するので, 温度が高いほど値は小さくなる.

近似なしの式 (3.3.5) と, 近似式の誤差が 1 割以内で収まる範囲を求めたところ以下ようになった.

条件, 近似式	誤差が 1 割以内の範囲
$X \ll 1$; (3.3.8) 式	$0 \leq X \lesssim 1.0 \times 10^{-3}$
$1 - X \ll 1$ ($Y \ll 1$); (3.3.10) 式	$0.4 \lesssim X \leq 1$ ($0 \leq Y \lesssim 0.6$)

凝結成分が多い場合の近似は $0 \leq Y \leq 0.6$ の広い範囲で精度良く近似されている. しかし, 凝結成分が少ない場合は, 誤差が 1 割以内に収まる範囲が $0 \leq X \leq 1.0 \times 10^{-3}$ と非常に小さく, 凝結成分がかなり少ない場合でないと精度良く近似することはできない.

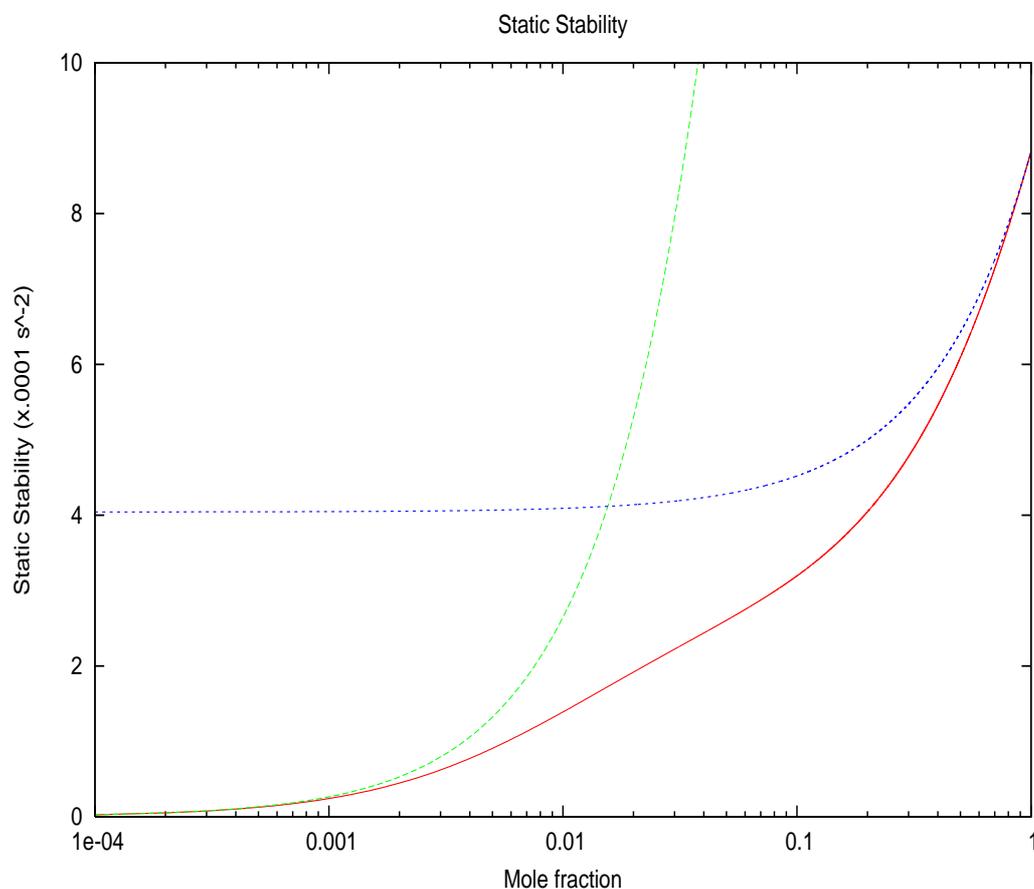


図 4.2.5: $T = 300K$ での静的安定度. 赤線; 近似なし (3.3.5), 緑線; 凝結成分の少ない場合の近似 (3.3.8), 青線; 凝結成分が多い場合の近似 (3.3.10).

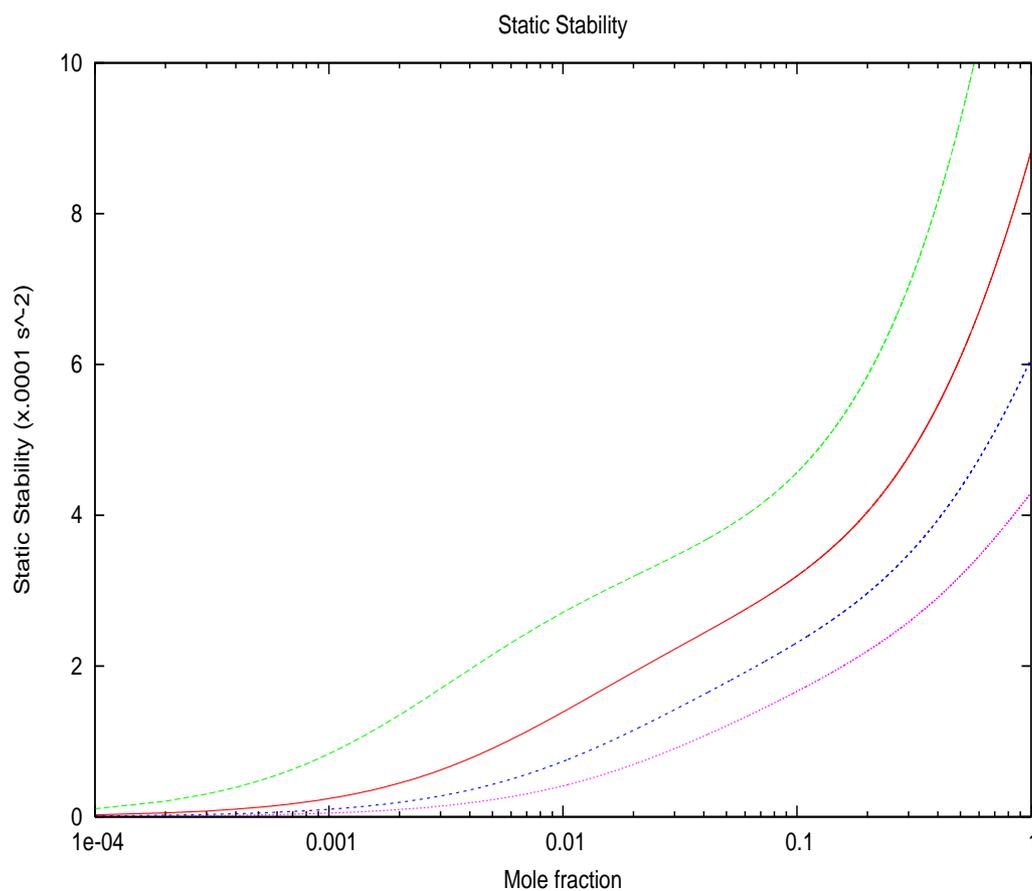


図 4.2.6: 温度 T を変化させた場合の静的安定度. 静的安定度は温度の逆数に比例するので, 温度が高くなるほど静的安定度の値は小さくなる. 緑線は case1($T = 200K$), 赤線は case2($T = 300K$), 青線は case3($T = 400K$), 紫線は case4($T = 500K$).

第5章 まとめ

5.1 まとめ

本論文では、木星大気の静的安定度、および乾燥断熱温度減率の湿潤断熱温度減率の定式化、数値計算を行い、その結果を図示した。また、1次の項までの近似式も導出し、近似なしの式との誤差が1割以内に収まる範囲を調べた。

定式化された、乾燥断熱温度減率、湿潤断熱温度減率、静的安定度の値は以下のようになる。

- ・乾燥断熱温度減率

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{C_p}$$

- ・湿潤断熱温度減率

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Mg}{C_p} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{C_p RT^2}} \right)$$

- ・静的安定度

$$N^2 = \frac{g}{T} \left[\frac{dT}{dz} \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d) \lambda X}{M RT} \right\} \right] - \frac{g}{T} \frac{(M_v - M_d) Mg X}{M R}$$

上記の3つの式の、近似なしの式、凝結成分が少ない条件 ($X \ll 1$) での近似式、凝結成分が多い条件 ($1 - X \ll 1$) での近似式を求め、それぞれ数値計算を行い結果を図示した。その結果、今回考えている系では凝結成分の割合が増えるほど静的安定度の値が大きくなることが分かった。

それぞれの近似式が、近似なしの方程式との誤差が1割以内で収まる範囲は以下の通りである。

- ・乾燥断熱温度減率, 近似なしの式; (3.2.7).

条件, 近似式	誤差が1割以内の範囲
$X \ll 1$; (3.2.11)	$0 \leq X \lesssim 0.6$
$1 - X \ll 1$ ($Y \ll 1$); (3.2.13)	$0.4 \lesssim X \leq 1$ ($0 \leq Y \lesssim 0.6$)

- ・湿潤断熱温度減率, 近似なしの式; (3.2.19).

条件, 近似式	誤差が1割以内の範囲
$X \ll 1$; (3.2.24)	$0 \leq X \lesssim 4.0 \times 10^{-3}$
$1 - X \ll 1$ ($Y \ll 1$); (3.2.29)	$0.13 \lesssim X \leq 1$ ($0 \leq Y \lesssim 0.87$)

- ・静的安定度, 近似なしの式 (3.3.5).

条件, 近似式	誤差が1割以内の範囲
$X \ll 1$; (3.3.8)	$0 \leq X \lesssim 1.0 \times 10^{-3}$
$1 - X \ll 1$ ($Y \ll 1$); (3.3.10)	$0.4 \lesssim X \leq 1$ ($0 \leq Y \lesssim 0.6$)

謝辞

指導教官である林 祥介教授には、本論分の題材を与えて頂きました。村上 真也氏には貴重なお時間を割いて頂き、論文を書く上での多大なご指導と助言を頂きました。さらに、近似方程式の導出や数値計算の際に全て検算して頂き、計算結果が正しいことも示してくださいました。

本論分の作成に当たり、地球および惑星大気科学研究室の皆様には数多くの助言、そして励ましを頂きました。改めてここで感謝致します。

参考文献

- Atreya, S.K. and Romani, P. N., 1985: Photochemistry and clouds of Jupiter, Saturn and Uranus, In *Recent Advances in Planetary Meteorology*, edited by G. E. Hunt, Cambridge Univ. Press, London, pp. 17-68.
- Weidenschilling, S. J. and Lewis, J. S., 1973: Atmospheric and cloud structure of the Jovian planet. *Icarus*, **20**, 456-476.
- 小倉義光, 1984: 一般気象学. 東京大学出版会, pp. 50-73.
- 小出昭一郎, 1980: 基礎物理学 2, 熱学. 東京大学出版会, pp. 1-46.
- 杉山耕一郎, 2005: 静的安定度の計算 (熱力学計算コード oboro 解説文書), <http://www.gfd-dennou.org/library/oboro/doc/Stability/pub/>
- 日本化学会, 1993: 化学便覧改訂第4版基礎編 II. pp. 117-124.