

Fortran 90 数値解析ライブラリ (STPK) マニュアル (Ver.0.9.17.0)

辻野智紀

2017 年 10 月 24 日

目次

| | |
|----------------------|---|
| 第 1 章 概要 | 1 |
| 1.1 概要 | 1 |
| 1.1.1 本ライブラリの特徴 | 1 |
| 第 2 章 インストール・使用方法 | 2 |
| 2.1 インストール | 2 |
| 2.1.1 コンパイルオプション | 3 |
| 2.1.2 アンインストール | 4 |
| 2.2 使い方 | 5 |
| 2.2.1 OpenMP に関する諸注意 | 5 |
| 2.3 本ライブラリの使用にあたって | 5 |
| 第 3 章 サブルーチン一覧 | 7 |
| 3.1 algebra | 7 |
| 3.1.1 abst_2d | 7 |
| 3.1.2 abst_3d | 7 |
| 3.1.3 dot_prod_2d | 8 |
| 3.1.4 dot_prod_3d | 9 |

| | | |
|--------|----------------------------------|----|
| 3.1.5 | <code>rectangle_int</code> | 10 |
| 3.1.6 | <code>vec_prod_2d</code> | 10 |
| 3.1.7 | <code>vec_prod_3d</code> | 11 |
| 3.2 | <code>basis</code> | 12 |
| 3.2.1 | <code>c2i_convert</code> | 13 |
| 3.2.2 | <code>c2r_convert</code> | 13 |
| 3.2.3 | <code>i2c_convert</code> | 14 |
| 3.2.4 | <code>r2c_convert</code> | 14 |
| 3.2.5 | <code>rand_make</code> | 15 |
| 3.2.6 | <code>counter_day</code> | 15 |
| 3.2.7 | <code>counter_sec</code> | 16 |
| 3.2.8 | <code>time_zone_convert</code> | 16 |
| 3.2.9 | <code>check_array_size_1d</code> | 17 |
| 3.2.10 | <code>check_array_size_2d</code> | 17 |
| 3.2.11 | <code>check_array_size_3d</code> | 18 |
| 3.2.12 | <code>check_leap_year</code> | 19 |
| 3.3 | <code>derivation</code> | 19 |
| 3.3.1 | <code>curl</code> | 20 |
| 3.3.2 | <code>curl_3d</code> | 21 |
| 3.3.3 | <code>div</code> | 22 |
| 3.3.4 | <code>div_3d</code> | 23 |
| 3.3.5 | <code>grad_1d</code> | 24 |

| | | |
|--------|-----------------|----|
| 3.3.6 | grad_2d | 25 |
| 3.3.7 | grad_3d | 26 |
| 3.3.8 | grad4_1d | 28 |
| 3.3.9 | grad4_2d | 29 |
| 3.3.10 | grad4_3d | 30 |
| 3.3.11 | laplacian_1d | 31 |
| 3.3.12 | laplacian_2d | 31 |
| 3.3.13 | laplacian_3d | 33 |
| 3.3.14 | z_2_zeta | 34 |
| 3.3.15 | zast_2_w_2d | 34 |
| 3.3.16 | zast_2_w_3d | 36 |
| 3.4 | ellip_slv | 37 |
| 3.4.1 | Ellip_GauSei_2d | 37 |
| 3.4.2 | Ellip_Jacobi_2d | 40 |
| 3.4.3 | Ellip_GauSei_3d | 43 |
| 3.4.4 | Ellip_Jacobi_3d | 46 |
| 3.5 | ffts | 49 |
| 3.5.1 | c2r_ffttp_1d | 50 |
| 3.5.2 | ffttp_1d | 51 |
| 3.5.3 | ffttp_2d | 52 |
| 3.5.4 | prim_calc | 54 |
| 3.5.5 | r2c_ffttp_1d | 54 |

| | | |
|--------|---------------------------|----|
| 3.5.6 | rotate_calc | 56 |
| 3.6 | file_operate | 56 |
| 3.6.1 | auto_read_file | 57 |
| 3.6.2 | line_number_counter | 58 |
| 3.6.3 | read_file_grads | 58 |
| 3.6.4 | request_axis_grads | 59 |
| 3.6.5 | request_dim_grads | 60 |
| 3.6.6 | request_vardim_grads | 61 |
| 3.6.7 | read_file | 61 |
| 3.6.8 | read_file_3d | 62 |
| 3.6.9 | read_file_part | 63 |
| 3.6.10 | read_file_gtool3 | 64 |
| 3.6.11 | read_file_gtool3_header_c | 65 |
| 3.6.12 | read_file_gtool3_header_i | 65 |
| 3.6.13 | read_file_gtool3_header_r | 66 |
| 3.6.14 | read_file_text | 67 |
| 3.6.15 | read_mgdsst | 67 |
| 3.6.16 | write_file | 68 |
| 3.6.17 | write_file_3d | 69 |
| 3.7 | Geometry | 70 |
| 3.7.1 | rt_2_xy | 70 |
| 3.7.2 | xy_2_rt | 70 |

| | | |
|--------|--------------------|----|
| 3.8 | Map_Function | 71 |
| 3.8.1 | lat2mery | 71 |
| 3.8.2 | ll2lamdis | 72 |
| 3.8.3 | ll2lamxy | 73 |
| 3.8.4 | ll2merdis | 75 |
| 3.8.5 | ll2radi | 76 |
| 3.8.6 | ll2rt | 76 |
| 3.8.7 | lon2merx | 77 |
| 3.8.8 | rt2ll | 78 |
| 3.8.9 | vec2lam | 79 |
| 3.8.10 | x2merlon | 81 |
| 3.8.11 | xy2lamll | 81 |
| 3.8.12 | y2merlat | 83 |
| 3.9 | math_const | 83 |
| 3.9.1 | rotate_array | 84 |
| 3.10 | matrix_calc | 84 |
| 3.10.1 | Gau_Se | 84 |
| 3.10.2 | Jacobi_algebra | 86 |
| 3.10.3 | Jacobi_eigen | 87 |
| 3.10.4 | LU_devs | 87 |
| 3.10.5 | SOR_Gau_Se | 88 |
| 3.10.6 | SOR_Jacobi_algebra | 89 |

| | | |
|---------|------------------|-----|
| 3.10.7 | determ_2d | 90 |
| 3.10.8 | eigenvalue_power | 90 |
| 3.10.9 | gausss | 91 |
| 3.10.10 | tri_gauss | 91 |
| 3.10.11 | Householder | 92 |
| 3.10.12 | invert_mat | 93 |
| 3.10.13 | mat_dot | 94 |
| 3.10.14 | QR_method | 94 |
| 3.10.15 | schumit_norm | 95 |
| 3.10.16 | trans_mat | 96 |
| 3.11 | max_min | 96 |
| 3.11.1 | max_val_1d | 97 |
| 3.11.2 | max_val_2d | 97 |
| 3.11.3 | max_val_3d | 98 |
| 3.11.4 | min_val_1d | 98 |
| 3.11.5 | min_val_2d | 99 |
| 3.11.6 | min_val_3d | 99 |
| 3.12 | phys_const | 100 |
| 3.13 | poly_function | 101 |
| 3.13.1 | chebyshev | 101 |
| 3.13.2 | gegenbauer | 101 |
| 3.13.3 | hermite | 102 |

| | | |
|---------|------------------|-----|
| 3.13.4 | jacobi_poly | 103 |
| 3.13.5 | laguerre | 103 |
| 3.13.6 | legendre | 104 |
| 3.13.7 | sonine | 104 |
| 3.14 | special_function | 105 |
| 3.14.1 | Full_Ellip1_Func | 105 |
| 3.14.2 | Full_Ellip2_Func | 106 |
| 3.14.3 | bessj | 106 |
| 3.14.4 | bessy | 107 |
| 3.14.5 | beszero | 107 |
| 3.14.6 | beta_func | 108 |
| 3.14.7 | delta | 108 |
| 3.14.8 | df_bessj | 109 |
| 3.14.9 | df_bessy | 109 |
| 3.14.10 | epsilon | 110 |
| 3.14.11 | gamma_func | 110 |
| 3.14.12 | kaijo | 111 |
| 3.14.13 | sp_bessj | 111 |
| 3.14.14 | sp_bessy | 112 |
| 3.15 | statistics | 112 |
| 3.15.1 | Anomaly_1d | 112 |
| 3.15.2 | Anomaly_2d | 113 |

| | |
|---|-----|
| 3.15.3 Anomaly_3d | 114 |
| 3.15.4 auto_interpo_search_1d | 115 |
| 3.15.5 auto_interpo_search_2d | 115 |
| 3.15.6 auto_interpo_search_3d | 116 |
| 3.15.7 auto_interpolation_1d | 117 |
| 3.15.8 auto_interpolation_2d | 118 |
| 3.15.9 auto_interpolation_3d | 119 |
| 3.15.10 Cor_Coe_1d | 120 |
| 3.15.11 Cor_Coe_2d | 121 |
| 3.15.12 Cor_Coe_3d | 122 |
| 3.15.13 LSM_1d | 122 |
| 3.15.14 LSM_2d | 123 |
| 3.15.15 LSM_3d | 124 |
| 3.15.16 LSM_poly_1d | 124 |
| 3.15.17 LSM_poly_2d | 125 |
| 3.15.18 LSM_poly_3d | 126 |
| 3.15.19 LSM_multi | 126 |
| 3.15.20 Mean_1d | 127 |
| 3.15.21 Mean_2d | 128 |
| 3.15.22 Mean_3d | 129 |
| 3.15.23 Reg_Line_1d | 130 |
| 3.15.24 Reg_Line_2d | 130 |

| | |
|--|-----|
| 3.15.25 Reg_Line_3d | 131 |
| 3.15.26 covariance_1d | 131 |
| 3.15.27 covariance_2d | 132 |
| 3.15.28 covariance_3d | 133 |
| 3.15.29 interpo_search_1d | 133 |
| 3.15.30 interpo_search_2d | 134 |
| 3.15.31 interpo_search_3d | 135 |
| 3.15.32 interpolation_1d | 136 |
| 3.15.33 interpolation_2d | 137 |
| 3.15.34 interpolation_3d | 138 |
| 3.15.35 nearest_search_1d | 139 |
| 3.15.36 nearest_search_2d | 140 |
| 3.15.37 nearest_search_3d | 141 |
| 3.15.38 nearest_neighbor_search_1d | 141 |
| 3.15.39 nearest_neighbor_search_2d | 142 |
| 3.15.40 nearest_neighbor_search_3d | 142 |
| 3.15.41 stand_devi_1d | 143 |
| 3.15.42 stand_devi_2d | 144 |
| 3.15.43 stand_devi_3d | 144 |
| 3.15.44 Move_ave | 145 |
| 3.15.45 Move_anom | 146 |
| 3.16 Thermo_Advanced_Function | 147 |

| | | |
|--------|-------------------------|-----|
| 3.16.1 | CAPE | 147 |
| 3.16.2 | CIN | 148 |
| 3.16.3 | T_LFC | 149 |
| 3.16.4 | T_LNB | 149 |
| 3.16.5 | precip_water | 150 |
| 3.16.6 | qrsg_2_dbz | 151 |
| 3.16.7 | z_LCL | 152 |
| 3.16.8 | z_LFC | 153 |
| 3.16.9 | z_LNB | 154 |
| 3.17 | thermo_advanced_routine | 154 |
| 3.17.1 | Brunt_Freq | 155 |
| 3.17.2 | Ertel_PV | 155 |
| 3.17.3 | HEPV | 156 |
| 3.17.4 | HQGPV | 158 |
| 3.18 | thermo_const | 159 |
| 3.19 | thermo_function | 159 |
| 3.19.1 | Cefp | 160 |
| 3.19.2 | Cefv | 161 |
| 3.19.3 | Cl | 162 |
| 3.19.4 | DSE_Emanuel | 162 |
| 3.19.5 | eP_2_qv | 163 |
| 3.19.6 | eP_2_sh | 163 |

| | |
|------------------------------------|-----|
| 3.19.7 es_Bolton | 164 |
| 3.19.8 es_TD | 165 |
| 3.19.9 esi_Emanuel | 165 |
| 3.19.10 eT_2_RH | 166 |
| 3.19.11 exner_func_dry | 166 |
| 3.19.12 get_gamma_d | 167 |
| 3.19.13 goff_gratch | 167 |
| 3.19.14 goff_gratch_i | 168 |
| 3.19.15 hypsometric_form | 169 |
| 3.19.16 LH | 169 |
| 3.19.17 liquid_enthal | 170 |
| 3.19.18 moist_enthal | 170 |
| 3.19.19 MSE_Emanuel | 171 |
| 3.19.20 qvP_2_e | 172 |
| 3.19.21 qvT_2_Tv | 172 |
| 3.19.22 qvTP_2_RH | 173 |
| 3.19.23 qv_2_sh | 174 |
| 3.19.24 Reff | 174 |
| 3.19.25 rhoP_2_T | 175 |
| 3.19.26 rhoT_2_P | 175 |
| 3.19.27 RHTP_2_qv | 176 |
| 3.19.28 RHT_2_e | 176 |

| | |
|-------------------------|-----|
| 3.19.29 sh_2_qv | 177 |
| 3.19.30 tetens | 178 |
| 3.19.31 thetaP_2_T | 178 |
| 3.19.32 thetaT_2_P | 179 |
| 3.19.33 theta_dry | 179 |
| 3.19.34 theta_moist | 180 |
| 3.19.35 thetae_Bolton | 181 |
| 3.19.36 thetae_Emanuel | 181 |
| 3.19.37 thetaes_Bolton | 182 |
| 3.19.38 thetal_Emanuel | 182 |
| 3.19.39 thetalv_Emanuel | 183 |
| 3.19.40 thetaw_Emanuel | 184 |
| 3.19.41 TthetavP_2_qv | 185 |
| 3.19.42 thatavqvP_2_T | 186 |
| 3.19.43 TvT_2_qv | 186 |
| 3.19.44 qvTv_2_T | 187 |
| 3.19.45 TP_2_qvs | 187 |
| 3.19.46 TP_2_shs | 188 |
| 3.19.47 TP_2_rho | 189 |
| 3.19.48 Tq_2_Trho | 190 |
| 3.19.49 TqvP_2_TLCL | 190 |
| 3.19.50 TqvP_2_thetae | 191 |

| | |
|---|-----|
| 3.19.51 TqvP_2_thetaes | 192 |
| 3.19.52 TqvP_2_thetav | 192 |
| 3.19.53 TTd_2_RH_Bolton | 193 |
| 3.19.54 TTd_2_RH_tetens | 194 |
| 3.19.55 WSE_Emanuel | 194 |
| 3.19.56 rho_ocean | 195 |
| 3.19.57 D26 | 198 |
| 3.19.58 OHC | 199 |
| 3.20 Trajectory | 200 |
| 3.20.1 Backward_Traject_2d | 200 |
| 3.20.2 Backward_Traject_3d | 203 |
| 3.20.3 Forward_Traject_2d | 205 |
| 3.20.4 Forward_Traject_3d | 207 |
| 3.20.5 Stream_Line_2d | 210 |
| 3.20.6 Stream_Line_3d | 212 |
| 3.21 typhoon_analy | 214 |
| 3.21.1 grad_wind_pres | 214 |
| 3.21.2 hydro_grad_eqb | 215 |
| 3.21.3 Cart_conv_scal | 216 |
| 3.21.4 Cart_mean_scal | 218 |
| 3.21.5 tangent_conv_scal | 220 |
| 3.21.6 tangent_mean_anom_scal | 222 |

| | | |
|--------------|-----------------------------|------------|
| 3.21.7 | tangent_mean_anom_scal_Cart | 224 |
| 3.21.8 | tangent_mean_anom_vec | 226 |
| 3.21.9 | tangent_mean_scal | 228 |
| 3.21.10 | tangent_mean_vec | 231 |
| 3.21.11 | CPS_Hart | 232 |
| 3.21.12 | DC_Braun | 234 |
| 3.21.13 | SPLB_Kurihara | 235 |
| 3.21.14 | calc_taufl | 237 |
| 第 4 章 | サンプルプログラム | 239 |
| 4.1 | サンプルプログラムのコンパイル方法 | 239 |
| 4.2 | 各プログラムの説明 | 241 |
| 4.2.1 | cov | 241 |
| 4.2.2 | fft_test | 241 |
| 4.2.3 | fft_data | 242 |
| 4.2.4 | matrix_test | 245 |
| 4.2.5 | normal_poly | 245 |
| 4.2.6 | read_mgdsst_nc | 251 |
| 4.2.7 | thermo | 252 |
| 4.2.8 | thermo2 | 254 |
| 4.2.9 | time_check | 254 |
| 4.2.10 | traj_sample | 255 |
| 4.2.11 | wind | 256 |

| | | |
|--------------|---|------------|
| 4.2.12 | advection | 257 |
| 4.2.13 | diffusion | 258 |
| 4.2.14 | poison | 259 |
| 4.2.15 | adjust | 262 |
| 4.2.16 | Thorpe_2d | 266 |
| 4.2.17 | Thorpe_3d | 267 |
| 4.2.18 | SEQ | 268 |
| 4.2.19 | sound_analysis | 271 |
| 4.2.20 | NM01 | 275 |
| 4.2.21 | Karman | 283 |
| 4.2.22 | BAROVOR | 285 |
| 4.3 | Piecewise PV inversion を用いた台風ボーガス作成プログラム PPVI | 289 |
| 4.3.1 | 準地衡流 PV とその inversion | 289 |
| 4.3.2 | エルテルの PV とその inversion | 291 |
| 4.3.3 | エルテルの PV 方程式の線形化と Piecewise PV inversion | 312 |
| 4.3.4 | EPV inversion によるバランス鉛直風 inversion | 316 |
| 第 5 章 | 付録 | 331 |
| 5.1 | ellip_slv の付録 | 331 |
| 5.1.1 | 境界条件の設定 | 331 |
| 5.1.2 | 2 次元楕円型方程式の求解法 | 331 |
| 5.1.3 | 3 次元楕円型方程式の求解法 | 338 |
| 5.1.4 | デカルト座標系以外への適用 | 354 |

| | | |
|-------|-------------------------------------|-----|
| 5.2 | Thermo_Advanced_Function の付録 | 355 |
| 5.2.1 | レーダ反射強度の導出 | 355 |
| 5.3 | map_function の付録 | 361 |
| 5.3.1 | 球面三角法 | 361 |
| 5.3.2 | 直交座標系における基底ベクトルの変換 | 367 |
| 5.3.3 | 地図投影 | 369 |
| 5.3.4 | 地図投影に伴うベクトル成分変換 | 378 |
| 5.4 | Statistics の付録 | 383 |
| 5.4.1 | 最小自乗法 | 383 |
| 5.4.2 | 線形内挿 | 386 |
| 5.4.3 | スプライン補間 | 389 |
| 5.5 | Braun (2002) による熱帯低気圧の中心位置推定 | 393 |
| 5.6 | Kurihara et al. (1990) によるフィルタリング処理 | 395 |
| 5.7 | 付録：サンプル | 400 |
| 5.7.1 | 浅水方程式系の導出 | 400 |
| 5.7.2 | NM01 におけるモデルの詳細 | 403 |
| 5.7.3 | adjust におけるモデルの詳細 | 404 |
| 5.7.4 | adjust_2d におけるモデルの詳細 | 405 |
| | 参考文献 | 406 |

第1章 概要

1.1 概要

STPK ライブラリとは, Fortran 90 をベースとする数値解析ライブラリである。数値モデルの出力結果から様々な解析を行うために必要な処理をサブルーチンおよび関数という形で表現し、Fortran 90 のモジュールという概念を用いて用途別に関数を分類した関数集ライブラリである。Linux 系で動作するようにコーディングされているので、Linux 系のディストリビューションが多数を占める大学および研究機関の計算機、ワークステーション、果てはスーパーコンピュータにおいても問題なく動作することが期待される。また、近年計算機に使用されるプロセッサはデュアルコア、クアッドコアが当たり前となっている。そのような環境における高速な解析を実現するために、本ライブラリでは、OpenMP と呼ばれるスレッド並列命令を用いることで、一部処理の高速化を図っている。

1.1.1 本ライブラリの特徴

本ライブラリの特徴として以下のような事柄があげられる。

- lapack などの純粋な数学ライブラリと同様の処理を行う (例えば、連立一次方程式の求解や固有値問題) サブルーチンが充実している。これに関連して特に特殊関数を計算する関数、サブルーチンが非常に充実している。
- 流体力学において必須となる変数の空間微分等を計算するルーチンが充実している。
- 気象観測等の初期解析として必要となる熱力学関係の処理を行うルーチン (相当温度の計算等) が充実している。

以上のようなことから、本ライブラリを扱う上で必要な技能は、「プログラムのコンパイルができる」、「ルーチンと関数が適切に使える」のみである。これは、Fortran に限らず、プログラム言語を少し覚えて、簡単なプログラムなら書けるレベルとそれ以上のユーザーを対象としており、ライブラリとしての敷居が低いことが言えるであろう。

第2章 インストール・使用方法

2.1 インストール

本節では、STPK ライブラリのインストール方法を説明する。

1. tar.gz 形式のソースファイルを以下のコマンドで展開する。

```
$ tar zxvf ソースファイル.tar.gz
```

2. ソースファイルの中に `configure` ファイルが存在することを確認する。
3. コンパイル時に必要となる環境変数を設定する。ただし、用いるコンパイラによって設定する変数は様々であるので、ここでは以下のように例をあげておく。

—— Intel Fortran 版 ——

```
FC = ifort, FCFLAGS='-assume byterecl (必須) -convert big_endian  
-openmp'
```

—— gfortran 版 ——

```
FC = gfortran, FCFLAGS='-fconvert=big-endian -fopenmp'
```

—— Fujitsu Fortran 版 ——

```
FC = frt, FCFLAGS='-KOMP -Am (必須)'
```

—— g95 版 ——

```
FC = g95, FCFLAGS='-fendian=big'
```

このとき、使用するコンパイラや使用用途に応じて、コンパイルオプションをいくつか追加しなければならない場合がある。それについては、[2.1.1](#) 参照。

4. 展開ディレクトリ内において、`configure` スクリプトによって `Makefile` を作成する。

```
$ ./configure --prefix=インストール先ディレクトリ --includedir=モジュールファイルインストール先
```

これらは、デフォルトでは、`/usr/local` にインストールされる。

5. `make` する。

```
$ make
```

6. `make` が正常に終了したら、`make install` でインストールを行う。

2.1.1 コンパイルオプション

必須事項 1

本ライブラリには、ファイル入出力ルーチンとして、書式なしダイレクトアクセス形式のファイル入出力をサポートしており、入出力の際のレコード長さ単位は 1 バイトを仮定している。ゆえに、入出力ルーチンを使用する際にはこの点に注意すること。Intel Fortran コンパイラなど一部のコンパイラはデフォルトのレコード長さ単位が異なる場合がある。ifort の場合は、`"-assume byterecl"` をつけることで、レコード長さ単位を 1 バイトに設定することができるので必ずオプションをつけておくこと。

必須事項 2

本ライブラリの各手続きは大きくモジュール単位でまとめられている。Fujitsu Fortran コンパイラなど一部のコンパイラはデフォルトでモジュールファイルのコンパイルを行えないものがある。frt の場合は `"-Am"` をつけることでモジュールのコンパイルを行うことができるようになるので、必ずオプションをつけること。

注意事項 1

本ライブラリでは書式なしダイレクトアクセス形式ファイルの入出力をサポートしている。この形式のファイルの入出力の際、エンディアン (データをメモリ上に格納するときの方法) に注意しなければならない。このエンディアンは計算機依存なので、読み込もうとしているあるいは、書き込もうとしているファイルがどのようなエンディアンを仮定しているのかに十分注意しなければならない。各コンパイラでは、エンディアンに対するオプションが用意されており、`"-convert big_endian"`, `"-fconvert=big-endian"`, `"-fendian=big"` はともに、エンディアンに関する設定である。frt のように、コンパイル時ではなく実行時にエンディアンオプションを指定するものも存在する。

注意事項 2

本ライブラリは OpenMP 並列に対応しているが、ソースをビルドする際に、陽に

オプションを指定しなければこの機能を使用することはできない. 各コンパイラのコンパイルオプションで `"-openmp"`, `"-fopenmp"`, `"-KOMP"` は OpenMP を有効にするオプションである.

注意事項 3

`gfortran` におけるプリミティブな指定. `gfortran` には他のコンパイラが自動で設定, あるいは陰に仮定している事項が設定されていない場合がある. 以下は著者が遭遇したコンパイル時のエラーに対する対処法である.

- 1 行の文字数制限によるエラーが出た際には, `"-ffree-line-length-none"` を追加する.
- 定義されている型で扱える範囲を超えた値が入っているといわれる場合は, `"-fno-range-check"` を追加する.
- `basis` モジュール使用時, `time` 変数が参照されていない旨のエラーが出た場合は, `src/basis.f90` の `rand make` ルーチンにおいて, `time` 変数についている属性を `external` から `intrinsic` に変更して, ライブラリをビルドしなおす.

注意事項 4

OpenMP 使用時に Segmentation fault する場合, OpenMP 不使用の場合で同様のエラーが出るかをチェックする. 同様のエラーが出れば, プログラムの単なる実行時エラーである可能性が高い. しかし, 不使用時に正常終了する場合, OpenMP の各プライベートスレッドに用意されたメモリスタック容量が不足していることによるエラーの可能性が高い. この場合, OpenMP が用意している環境変数 `OMP_STACKSIZE` にメモリスタックの容量を陽に指定してみる (詳しくは [2.2](#) 参照).

注意事項 5

大規模データを解析する場合, サブルーチンで `stack` に確保されるメモリ容量が不足していることで Segmentation Fault が発生する可能性がある. その場合は, スタックに確保されるメモリ領域をヒープ領域に確保することで回避できるかもしれない. `ifort` の場合, コンパイルオプションとして `"-heap-arrays 数値"` の様に指定すれば, ヒープ領域にメモリ領域を作成することができる.

2.1.2 アンインストール

アンインストールは, インストール先のライブラリおよび, モジュールファイルを手動で削除すればよい. また, 展開ディレクトリ内の `config.log` 等の中間生成ファイルは `make distclean` を実行することで削除可能である.

2.2 使い方

ここでは、適切に本ライブラリのモジュールを組み込み、適切にサブルーチンを用いたソースファイルがあるとして、そのソースをコンパイルすることを考える。このとき、プログラムのコンパイルには、以下の形式を自身の環境に合わせて適宜書き換えれば OK である。

```
コンパイラ名 -I(includedir のパス) ソースファイル名 -L(prefix/lib のパス)
-lstpk
```

上を実行すると、`a.out` という実行形式のプログラムが作成されるはずである。ただし、コンパイル時のその他オプションはインストール時に `FCFLAGS` に設定したオプションをそのまま使用した方が無難である。

2.2.1 OpenMP に関する諸注意

本ライブラリはスレッド並列を行うことが可能な OpenMP という機能を実装している。この機能を有効にするためには、コンパイルオプションで指定しなければならない (これについては、[2.1](#) 参照)。OpenMP にはいくつか環境変数が用意されており、各自計算実行環境にあった値を設定しておく必要がある。以下は代表的な環境変数の設定方法である ^{*1}。

—— スレッド並列の数を指定する ——

```
$ export OMP_NUM_THREADS=NUM
NUM には、並列するスレッドの数を整数値で指定する。
```

—— スレッドが使用するプライベートスタック容量の指定 ——

```
$ export OMP_STACKSIZE=INT
INT には、プライベートスタック容量を単位 KB で整数値で指定する。例えば、INT が 512000 だった場合、512 MB がスタック容量として指定されたことになる。
```

2.3 本ライブラリの使用にあたって

本ライブラリは自由に使用、ソースコードの改変を行って頂いて構いません。また、本ライブラリを使用したことによって発生した損害等は開発者は一切責任を負いません。な

^{*1}OpenMP で提供されている環境変数については、例えば、[参照](#)。

お, 本ライブラリを用いた著作物を作成する際は「本研究の解析には数値解析ライブラリ STPK (Version.???; <http://www.gfd-dennou.org/library/davis/stpk>) を用いた」と表記して頂ければ幸いである. また, 引用文献として記述する場合は, 「辻野智紀. 2012. Fortran 90 数値解析ライブラリ (STPK) マニュアル」と記述して頂ければ幸いである.

第3章 サブルーチン一覧

3.1 algebra

幾何演算を主に担当するルーチン集。

3.1.1 abst_2d

機能

2次元ベクトルの絶対値を計算するルーチン。

書式

```
call abst_2d( x, y, dis )
```

引数

| | | | |
|-----|-----------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:, :)> | in | x 方向のベクトル成分. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | y 方向のベクトル成分. |
| dis | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | inout | 各点での絶対値. |

定義式

デカルト座標系で定義された 2 次元ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ の絶対値を計算する.

備考

特になし.

3.1.2 abst_3d

機能

3次元ベクトルの絶対値を計算するルーチン.

書式

```
call abst_3d( x, y, z, dis )
```

引数

| | | | |
|-----|---------------------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:, :, :)> | in | x 方向のベクトル成分. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | y 方向のベクトル成分. |
| z | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | z 方向のベクトル成分. |
| dis | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | inout | 各点での絶対値. |

定義式

デカルト座標系で定義された 3 次元ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の絶対値を計算する.

備考

特になし.

3.1.3 dot_prod_2d

機能

2 次元デカルト座標系の各格子点で定義される 2 次元ベクトルの内積を計算するルーチン.

書式

call dot_prod_2d(x, y, u, v, dot, [undef])

引数

| | | | |
|-------|-----------------------------|-------|-----------------|
| x | <R,DP(:, :)> | in | x 方向の 1 ベクトル成分. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | y 方向の 1 ベクトル成分. |
| u | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | x 方向の 2 ベクトル成分. |
| v | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | y 方向の 2 ベクトル成分. |
| dot | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | inout | 各点での内積値. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |

定義式

2 種類の 2 次元ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} がデカルト座標系では,

$$\mathbf{a} = (x, y), \mathbf{b} = (u, v)$$

と定義されたとき, これらの内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = xu + yv$$

となる. これらの変数とルーチンの引数の対応関係は以下のとおりである.

$$(x, y) \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, \quad (u, v) \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rightarrow \text{dot}.$$

ベクトルの成分が 1 つでも未定義である場合, その点での内積値は未定義となる.

備考

特になし.

3.1.4 dot_prod_3d

機能

デカルト座標系の各格子点で定義される 3 次元ベクトルの内積を計算するルーチン.

書式

call dot_prod_3d(x, y, z, u, v, w, dot, [undef])

引数

| | | | |
|-------|---------------------------------------|-------|-----------------|
| x | <R,DP(:, :, :)> | in | x 方向の 1 ベクトル成分. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | y 方向の 1 ベクトル成分. |
| z | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | z 方向の 1 ベクトル成分. |
| u | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | x 方向の 2 ベクトル成分. |
| v | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | y 方向の 2 ベクトル成分. |
| w | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | z 方向の 2 ベクトル成分. |
| dot | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | inout | 各点での内積値. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |

定義式

2 種類の 3 次元ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} がデカルト座標系では,

$$\mathbf{a} = (x, y, z), \quad \mathbf{b} = (u, v, w)$$

と定義されたとき, これらの内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = xu + yv + zw$$

となる. これらの変数とルーチンの引数の対応関係は以下のとおりである.

$$(x, y, z) \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \quad (u, v, w) \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rightarrow \text{dot}.$$

ベクトルの成分が 1 つでも未定義である場合, その点での内積値は未定義となる.

備考

特になし.

3.1.5 rectangle_int

機能

1 次元データを元に台形積分を行う.

書式

```
result = rectangle_int( x, y, bot, top, res [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------------|-------|---------|
| x | <R,DP(:)> | in | 積分変数座標. |
| y | <R,DP(size(x))> | in | 被積分関数. |
| bot | <R,DP> | in | 積分の下端. |
| top | <R,DP> | in | 積分の上端. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 積分値. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |

定義式

任意の変数 x とその変数についての関数 $f(x)$ の積分 :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

を台形積分 :

$$\sum_{k=2}^N \frac{1}{2} (x_k - x_{k-1}) (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

で計算する. ここで, N は $\frac{x_2 - x_1}{dx}$ である.

備考

- undef が設定されている場合は, その値をもつ点の両側の短冊領域は計算しない.
- bot, top の値は x で与えられる格子点上になければ, 不足分を短冊分割して足し合わせる.
- 必ず, bot < top でなければならない.

3.1.6 vec_prod_2d

機能

2 次元デカルト座標系の各格子点で定義される 2 次元ベクトルの外積を計算するルーチン.

書式

```
call vec_prod_2d( x, y, u, v, vecx, [undeff] )
```

引数

| | | | |
|--------|-----------------------------|-------|-----------------|
| x | <R,DP(:, :)> | in | x 方向の 1 ベクトル成分. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | y 方向の 1 ベクトル成分. |
| u | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | x 方向の 2 ベクトル成分. |
| v | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | y 方向の 2 ベクトル成分. |
| vec | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | inout | 各点での外積値. |
| undeff | <R,DP> | in | 未定義値. |

定義式

2 種類の 2 次元ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} がデカルト座標系では,

$$\mathbf{a} = (x, y), \mathbf{b} = (u, v)$$

と定義されたとき, これらの外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = xv - yu$$

となる. これらの変数とルーチンの引数の対応関係は以下のとおりである.

$$(x, y) \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, (u, v) \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{vec}.$$

ベクトルの成分が 1 つでも未定義である場合, その点での外積値は未定義となる.

2 次元平面で外積を計算する場合, その平面に直交する方向の大きさ成分のみが計算されることに注意する (intent(inout) が 1 種類しかないのはこのため).

備考

特になし.

3.1.7 vec_prod_3d

機能

デカルト座標系の各格子点で定義される 3 次元ベクトルの外積を計算するルーチン.

書式

```
call vec_prod_3d( x, y, z, u, v, w, vecx, vecy, vecz, [undeff] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|--|--------------------|-----------------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:, :, :)></code> | <code>in</code> | x 方向の 1 ベクトル成分. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>in</code> | y 方向の 1 ベクトル成分. |
| <code>z</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>in</code> | z 方向の 1 ベクトル成分. |
| <code>u</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>in</code> | x 方向の 2 ベクトル成分. |
| <code>v</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>in</code> | y 方向の 2 ベクトル成分. |
| <code>w</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>in</code> | z 方向の 2 ベクトル成分. |
| <code>vecx</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>inout</code> | 各点での x 方向の外積値. |
| <code>vecy</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>inout</code> | 各点での y 方向の外積値. |
| <code>vecz</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>inout</code> | 各点での z 方向の外積値. |
| <code>undeff</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 未定義値. |

定義式

2 種類の 3 次元ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} がデカルト座標系では,

$$\mathbf{a} = (x, y, z), \quad \mathbf{b} = (u, v, w)$$

と定義されたとき, これらの外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (yw - zv, zu - xw, xv - yu)$$

となる. これらの変数とルーチンの引数の対応関係は以下のとおりである.

$$(x, y, z) \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \quad (u, v, w) \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow (\mathbf{vecx}, \mathbf{vecy}, \mathbf{vecz}).$$

ベクトルの成分が 1 つでも未定義である場合, その点での外積値は未定義となる.

備考

特になし.

3.2 basis

本ライブラリを使用する上で必要となるルーチンのうち、どのモジュールにも当てはまらなかった基本的な数学処理関数集である。

本モジュールには予約変数があり、現在は以下の表のように与えられている。

```
type dtype ! 開始日の日付
integer :: year_d ! 西暦
integer :: month_d ! 月
integer :: day_d ! 日
integer :: hour_d ! 時
integer :: min_d ! 分
integer :: sec_d ! 秒
end type dtype
```

3.2.1 c2i_convert

機能

文字型を整数型に変換する。

書式

```
result = c2i_convert( cval )
```

引数

| | | | |
|------|----------|-------|----------|
| cval | <C(100)> | in | 変換する文字. |
| 戻り値 | <I> | inout | 変換された整数. |

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.2 c2r_convert

機能

文字型を実数型に変換する。

書式

```
result = c2r_convert( cval )
```

引数

| | | | |
|------|----------|-------|----------|
| cval | <C(100)> | in | 変換する文字. |
| 戻り値 | <R> | inout | 変換された実数. |

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.3 i2c_convert

機能

整数型を文字型に変換する。

書式

```
result = i2c_convert( ival, [forma] )
```

引数

| | | | |
|-------|--------|-------|----------|
| ival | <I> | in | 変換する整数. |
| forma | <C(*)> | in | 変換時の形式. |
| 戻り値 | <C> | inout | 変換された文字. |

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.4 r2c_convert

機能

実数型を文字型に変換する。

書式

```
result = r2c_convert( rval, [forma] )
```

引数

| | | | |
|-------|--------|-------|----------|
| rval | <R> | in | 変換する実数. |
| forma | <C(*)> | in | 変換時の形式. |
| 戻り値 | <C> | inout | 変換された文字. |

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.5 rand_make

機能

混合合同法を用いて擬似乱数を生成する。

書式

```
call rand_make( L, output )
```

引数

| | | | |
|--------|-----|-------|------------------|
| L | <I> | in | 出力する最大桁数 +1 の数値. |
| output | <I> | inout | 出力される乱数. |

定義式

混合合同法は、数列 x_n について、整数 a, b を用いて、

$$x_n = \text{mod}(ax_{n-1} + b, L)$$

という漸化式で表現される数列によって擬似乱数を生成するアルゴリズムである。ここで、 L は整数である。 a, b, L, x_0 については任意性が与えられているので、本ルーチンでは、

$$a = 11, b = 12$$

という値を採用した。また、 L は使用者が必要とする任意の桁数 +1 の数値で求められ、 x_0 は唯一性を重視するため、Fortran の組み込み関数である `time()` 関数を用いて得られる時刻を初期値として用いる。

備考

なし.

3.2.6 counter_day

機能

開始日から終了日までの日数をカウントする。

書式

```
result = counter_day( stime, etime )
```

引数

| | | | |
|-------|------------------|-------|-------------|
| stime | <type(datetime)> | in | カウント開始の年月日. |
| etime | <type(datetime)> | in | カウント終了の年月日. |
| 戻り値 | <I> | inout | カウントされた日数. |

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.7 counter_sec**機能**

開始日から終了日までの秒数をカウントする。

書式

```
result = counter_sec( stime, etime )
```

引数

| | | | |
|-------|------------------|-------|----------------|
| stime | <type(datetime)> | in | カウント開始の年月日時分秒. |
| etime | <type(datetime)> | in | カウント終了の年月日時分秒. |
| 戻り値 | <I> | inout | カウントされた秒数. |

定義式

なし.

備考

なし.

3.2.8 time_zone_convert**機能**

時間について, 任意の時間足し引きしたときの日時を返す。タイムゾーン変換等に用いる。

書式

```
call time_zone_convert( factor, itime, ctime )
```

引数

| | | | |
|---------------------|-------------------------------------|--------------------|-----------------|
| <code>factor</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 変換を行う時間 [hour]. |
| <code>itime</code> | <code><type(datetime)></code> | <code>in</code> | 変換前の年月日. |
| <code>ctime</code> | <code><type(datetime)></code> | <code>inout</code> | 変換後の年月日. |

定義式

なし.

備考

- 例えば, JST から UTC に変換する場合, `factor=-9` として, `itime` に JST の時刻を入力すると, `ctime` に UTC の時刻が返される.

3.2.9 `check_array_size_1d`

機能

配列のサイズをチェックする。

書式

```
result = check_array_size_1d( n, a )
```

引数

| | | | |
|----------------|---------------------------------|--------------------|-----------------------------|
| <code>n</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 1 次元配列 <code>a</code> の要素数. |
| <code>a</code> | <code><I*,R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 任意の 1 次元配列. |
| 戻り値 | <code><I></code> | <code>inout</code> | チェック結果 (後述). |

定義式

任意の 1 次元配列 `a` の要素数が引数 `n` の値と一致しているかどうかをチェックする. 等しければ 0, 異なっていれば 1 を返す.

備考

なし.

3.2.10 `check_array_size_2d`

機能

配列のサイズをチェックする。

書式

```
result = check_array_size_2d( n1, n2, a )
```

引数

| | | | |
|-----|-----------------|-------|-------------------------|
| n1 | <I> | in | 2 次元配列 a の第一要素数. |
| n2 | <I> | in | 2 次元配列 a の第二要素数. |
| a | <I*,R,DP(:, :)> | in | 任意の 2 次元配列. |
| 戻り値 | <I> | inout | チェック結果 (後述). |

定義式

任意の 2 次元配列 **a** の要素数が引数 **n1**, **n2** の値と一致しているかどうかをチェックする. チェック結果は以下のとおり:

戻り値 **0** : **n1**, **n2** とも, 要素数が一致.

戻り値 **1** : **n1** のみ, 要素数が一致.

戻り値 **2** : **n2** のみ, 要素数が一致.

戻り値 **3** : **n1**, **n2** とも, 要素数が不一致.

備考

なし.

3.2.11 check_array_size_3d**機能**

配列のサイズをチェックする。

書式

```
result = check_array_size_3d( n1, n2, n3, a )
```

引数

| | | | |
|-----|--------------------|-------|-------------------------|
| n1 | <I> | in | 3 次元配列 a の第一要素数. |
| n2 | <I> | in | 3 次元配列 a の第二要素数. |
| n3 | <I> | in | 3 次元配列 a の第三要素数. |
| a | <I*,R,DP(:, :, :)> | in | 任意の 3 次元配列. |
| 戻り値 | <I> | inout | チェック結果 (後述). |

定義式

任意の 3 次元配列 **a** の要素数が引数 **n1**, **n2**, **n3** の値と一致しているかどうかをチェックする. チェック結果は以下のとおり:

戻り値 **0** : 全要素で要素数が一致.

戻り値 **1** : **n1** のみ, 要素数が不一致.

戻り値 **2** : **n2** のみ, 要素数が不一致.

戻り値 **3** : **n1**, **n2** のみ, 要素数が不一致.

戻り値 4 : n3 のみ, 要素数が不一致.
戻り値 5 : n1, n3 のみ, 要素数が不一致.
戻り値 6 : n2, n3 のみ, 要素数が不一致.
戻り値 7 : 全要素で要素数が不一致.

備考

なし.

3.2.12 check_leap_year

機能

閏年かどうかをチェックする。

書式

```
result = check_leap_year( year )
```

引数

| | | | |
|------|-----|-------|--------------|
| year | <I> | in | チェックする西暦. |
| 戻り値 | <L> | inout | 閏年なら .true.. |

定義式

条件 1 西暦が 4 の倍数のとき, かつ 100 の倍数ではない.

条件 2 西暦が 400 の倍数のとき.

例外条件 西暦が 100 の倍数かつ, 400 の倍数ではないとき, 閏年ではない.

備考

なし.

3.3 derivation

微分演算を有限差分で計算するルーチン集。本モジュールに組み込まれているルーチンでは、すべての微分計算において、2 次精度の中心差分近似を用いて微分を評価する。なお、評価点の不足する計算領域の端においては、1 次精度に差分の近似を落とすことで処理をする。

なお、すべてのルーチンで用いられているスケール因子の主な座標系での値と、任意の座標系におけるスケール因子の導出方法については、??参照。

3.3.1 curl

機能

2次元ベクトルから渦度を計算する.

書式

```
call curl( x, y, u, v, val, [undef], [hx], [hy], [ord] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------------------|-------|-----------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x に対応するベクトル. |
| v | <R,DP(size(x),size(y))> | in | y に対応するベクトル. |
| val | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | 渦度. |
| undef | R,DP | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y))> | in | y 方向のスケール因子. |
| ord | L | in | 微分計算の順番を入れ替える (備考参照). |

定義式

互いに直交する基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) をもつ曲線座標 (x_1, x_2, x_3) における, 独立した 2 ベクトルの回転 curl を計算する:

$$\text{curl} \equiv \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x_2} \right]$$

ここで, $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ であり, h_1, h_2, h_3 はそれぞれ x_1, x_2, x_3 に対応するスケール因子である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : \mathbf{x}, \quad x_2 : \mathbf{y}, \quad u_1 : \mathbf{u}, \quad u_2 : \mathbf{v},$$

$$h_1 : \mathbf{hx}, \quad h_2 : \mathbf{hy}, \quad \text{curl} : \mathbf{val}$$

デカルト座標系の場合, $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ であるので、単純に

$$\text{curl} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

を計算することになる。

備考

- オプション ord は微分計算の後、正負を反転させるオプションであり、

.true. : 通常計算, .false. : 正負反転

となる。デフォルトは`.true.`。つまり、`false` を指定すれば、以下の計算を行うことと同義である。

$$\text{curl} \equiv -\mathbf{e}_3 \cdot \nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x_2} \right].$$

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.2 curl_3d

機能

3次元ベクトルから3次元渦度を計算する。

書式

```
call curl_3d( x, y, z, u, v, w, zeta, eta, xi, [undef], [hx], [hy], [hz]
)
```

引数

| | | | |
|-------|---------------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| z | <R,DP(:)> | in | 右手系第三座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | x に対応するベクトル. |
| v | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | y に対応するベクトル. |
| w | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | z に対応するベクトル. |
| zeta | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | x に対応する回転. |
| eta | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | y に対応する回転. |
| xi | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | z に対応する回転. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | y 方向のスケール因子. |
| hz | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | z 方向のスケール因子. |

定義式

互いに直交する基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) をもつ曲線座標 (x_1, x_2, x_3) における、独立

した 3 ベクトルの渦度 rot を計算する：

$$\begin{aligned} \text{div} \equiv \nabla \times \mathbf{u} = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\mathbf{e}_1 \left\{ \frac{\partial(h_3 u_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x_3} \right\} \right. \\ & + \mathbf{e}_2 \left\{ \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 u_3)}{\partial x_1} \right\} \\ & \left. + \mathbf{e}_3 \left\{ \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x_2} \right\} \right] = \zeta \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + \xi \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ であり、 h_1, h_2, h_3 はそれぞれ x_1, x_2, x_3 に対応するスケール因子である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : \mathbf{x}, \quad x_2 : \mathbf{y}, \quad x_3 : \mathbf{z},$$

$$u_1 : \mathbf{u}, \quad u_2 : \mathbf{v}, \quad u_3 : \mathbf{w},$$

$$h_1 : \mathbf{hx}, \quad h_2 : \mathbf{hy}, \quad h_3 : \mathbf{hz}$$

$$\zeta : \mathbf{zeta}, \quad \eta : \mathbf{eta}, \quad \xi : \mathbf{xi}.$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ であるので、単純に

$$\text{div} = \mathbf{e}_1 \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right\} + \mathbf{e}_2 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right\} + \mathbf{e}_3 \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.3 div

機能

2 次元ベクトルから発散を計算する。

書式

```
call div( x, y, u, v, val, [undef], [hx], [hy] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x に対応するベクトル. |
| v | <R,DP(size(x),size(y))> | in | y に対応するベクトル. |
| val | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | 発散. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y))> | in | y 方向のスケール因子. |

定義式

互いに直交する基底ベクトル (e_1, e_2) をもつ曲線座標 (x_1, x_2) における, 独立した 2 ベクトルの発散 div を計算する:

$$\text{div} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 u_2)}{\partial x_2} \right]$$

ここで, $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ であり, h_1, h_2 はそれぞれ x_1, x_2 に対応するスケール因子である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : \mathbf{x}, \quad x_2 : \mathbf{y}, \quad u_1 : \mathbf{u}, \quad u_2 : \mathbf{v},$$

$$h_1 : \text{hx}, \quad h_2 : \text{hy}, \quad \text{div} : \text{val}.$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1$ であるので、単純に

$$\text{div} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.4 div_3d

機能

3 次元ベクトルから発散を計算する。

書式

```
call div_3d( x, y, z, u, v, w, val, [undef], [hx], [hy], [hz] )
```

引数

| | | | |
|-------|---------------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| z | <R,DP(:)> | in | 右手系第三座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | x に対応するベクトル. |
| v | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | y に対応するベクトル. |
| w | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | z に対応するベクトル. |
| val | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | 発散. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | y 方向のスケール因子. |
| hz | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | z 方向のスケール因子. |

定義式

互いに直交する基底ベクトル ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) をもつ曲線座標 (x_1, x_2, x_3) における, 独立した 3 ベクトルの発散 div を計算する:

$$\text{div} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 u_3)}{\partial x_3} \right]$$

ここで, $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ であり, h_1, h_2, h_3 はそれぞれ x_1, x_2, x_3 に対応するスケール因子である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$\begin{aligned} x_1 &: \mathbf{x}, & x_2 &: \mathbf{y}, & x_3 &: \mathbf{z}, \\ u_1 &: \mathbf{u}, & u_2 &: \mathbf{v}, & u_3 &: \mathbf{w}, \\ h_1 &: \mathbf{hx}, & h_2 &: \mathbf{hy}, & h_3 &: \mathbf{hz} \\ \text{div} &: \mathbf{val}. \end{aligned}$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ であるので、単純に

$$\text{div} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.5 grad_1d

機能

2 次の中心差分近似を用いて、任意変数の勾配を計算する。

書式

```
call grad_1d( x, u, val, [undef], [hx] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------------|-------|----------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 空間座標. |
| u | <R,DP(size(x))> | in | x の各点で定義される変数. |
| val | <R,DP(size(x))> | inout | 勾配値. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x))> | in | x 方向のスケール因子. |

定義式

座標 (x_1) における変数 ϕ の勾配は

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

で定義される. ここで, h_1 は x_1 座標のスケール因子であり, デカルト座標の場合, $h_1 = 1$ である. この勾配を離散変数 ϕ_i , 離散化された位置座標 x_i に対して, 2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると, 離散点 x_i における勾配 G_i は

$$G_i = \frac{1}{h_i} \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2dx_i}$$

で計算される. ここで, h_i は x_i におけるスケール因子,

$$dx_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

である. このとき, 引数は以下の対応をする:

$$x_i : \mathbf{x}, \quad \phi_i : \mathbf{u}, \quad h_i : \mathbf{hx}, \quad G_i : \mathbf{val}.$$

ただし, この近似では領域の端において参照点がなくなるので, 端領域では 1 次精度の差分近似で計算される.

備考

- 未定義値が定義されている場合は, その値に対応する値が格子点に入っている場合, その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される.

3.3.6 grad_2d

機能

2 次の中心差分近似を用いて, 任意変数の独立 2 次元勾配ベクトルを計算する.

書式

```
call grad_2d( x, y, u, valx, valy, [undef], [hx], [hy] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 第一空間座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 第二空間座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 勾配を計算する変数. |
| valx | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | x 方向の勾配ベクトル. |
| valy | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | y 方向の勾配ベクトル. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y))> | in | y 方向のスケール因子. |

定義式

基底ベクトル (e_1, e_2) で定義される座標 (x_1, x_2) における変数 u を計算する :

$$\text{grad} = \frac{e_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{e_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad u : u, \quad h_1 : hx, \quad h_2 : hy,$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} : \text{valx}, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} : \text{valy}.$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1$ であるので、単純に

$$\text{grad} = e_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.7 grad_3d

機能

2 次の中心差分近似を用いて、任意変数の独立 3 次元勾配ベクトルを計算する。

書式

```
call grad_3d( x, y, z, u, valx, valy, valz, [undef], [hx], [hy], [hz]
)
```

引数

| | | | |
|-------|---------------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 第一空間座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 第二空間座標. |
| z | <R,DP(:)> | in | 第三空間座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 勾配を計算する変数. |
| valx | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | x 方向の勾配ベクトル. |
| valy | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | y 方向の勾配ベクトル. |
| valz | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | z 方向の勾配ベクトル. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | y 方向のスケール因子. |
| hz | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | z 方向のスケール因子. |

定義式

基底ベクトル (e_1, e_2, e_3) で定義される座標 (x_1, x_2, x_3) における変数 u を計算する：

$$\text{grad} = \frac{e_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{e_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{e_3}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad x_3 : z, \quad u : u, \quad h_1 : hx, \quad h_2 : hy, \quad h_3 : hz$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} : \text{valx}, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} : \text{valy}, \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} : \text{valz}$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1$ であるので、単純に

$$\text{grad} = e_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.8 grad4_1d

機能

4 次の中心差分近似を用いて任意変数の勾配を計算する.

書式

```
call grad4_1d( x, u, val, [undef], [hx] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------------|-------|----------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 空間座標. |
| u | <R,DP(size(x))> | in | x の各点で定義される変数. |
| val | <R,DP(size(x))> | inout | 勾配値. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x))> | in | x 方向のスケール因子. |

定義式

座標 (x_1) における変数 ϕ の勾配は

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

で定義される. ここで, h_1 は x_1 座標のスケール因子であり, デカルト座標の場合, $h_1 = 1$ である. この勾配を離散変数 ϕ_i , 離散化された位置座標 x_i に対して, 2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると, 離散点 x_i における勾配 G_i は

$$G_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{2}{3} \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{dx_i} - \frac{\phi_{i+2} - \phi_{i-2}}{12dx_i} \right]$$

で計算される. ここで, h_i は x_i におけるスケール因子,

$$dx_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

である. このとき, 引数は以下の対応をする:

$$x_i : \mathbf{x}, \quad \phi_i : \mathbf{u}, \quad h_i : \mathbf{hx}, \quad G_i : \mathbf{val}.$$

ただし, この近似では領域の端において参照点がなくなるので, 端領域では 1, 2 次精度の差分近似で計算される.

備考

- 未定義値が定義されている場合は, その値に対応する値が格子点に入っている場合, その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される.

3.3.9 grad4_2d

機能

4 次の中心差分近似を用いて, 任意変数の独立 2 次元勾配ベクトルを計算する.

書式

```
call grad4_2d( x, y, u, valx, valy, [undef], [hx], [hy] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 第一空間座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 第二空間座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 勾配を計算する変数. |
| valx | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | x 方向の勾配ベクトル. |
| valy | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | y 方向の勾配ベクトル. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y))> | in | y 方向のスケール因子. |

定義式

基底ベクトル (e_1, e_2) で定義される座標 (x_1, x_2) における変数 u を計算する :

$$\text{grad} = \frac{e_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{e_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad u : u, \quad h_1 : hx, \quad h_2 : hy,$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} : \text{valx}, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} : \text{valy}.$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1, h_2 = 1$ であるので、単純に

$$\text{grad} = e_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.10 grad4_3d

機能

4 次の中心差分近似を用いて, 任意変数の独立 3 次元勾配ベクトルを計算する.

書式

```
call grad4_3d( x, y, z, u, valx, valy, valz, [undef], [hx], [hy], [hz]
)
```

引数

| | | | |
|-------|---------------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 第一空間座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 第二空間座標. |
| z | <R,DP(:)> | in | 第三空間座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 勾配を計算する変数. |
| valx | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | x 方向の勾配ベクトル. |
| valy | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | y 方向の勾配ベクトル. |
| valz | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | z 方向の勾配ベクトル. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | y 方向のスケール因子. |
| hz | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | z 方向のスケール因子. |

定義式

基底ベクトル (e_1, e_2, e_3) で定義される座標 (x_1, x_2, x_3) における変数 u を計算する:

$$\text{grad} = \frac{e_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{e_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{e_3}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : x, \quad x_2 : y, \quad x_3 : z, \quad u : u, \quad h_1 : hx, \quad h_2 : hy, \quad h_3 : hz$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} : \text{valx}, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} : \text{valy}, \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} : \text{valz}$$

デカルト座標系の場合、 $h_1 = 1$ であるので、単純に

$$\text{grad} = e_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

を計算することになる。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.11 laplacian_1d

機能

2 次の中心差分近似を用いて, 任意変数の 1 次元座標ラプラシアンを計算する.

書式

```
call laplacian_1d( x, u, val, [undef], [hx] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------------|-------|----------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 空間座標. |
| u | <R,DP(size(x))> | in | x の各点で定義される変数. |
| val | <R,DP(size(x))> | inout | 2 階勾配値. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x))> | in | x 方向のスケール因子. |

定義式

座標 (x_1) における変数 u の 2 階微分を計算する :

$$\text{laplacian} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{h_1} \right)^2.$$

ここで, h_1 はスケール因子である. この勾配を離散変数 u_i , 離散化された位置座標 x_i に対して, 2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると, 離散点 x_i におけるラプラシアン G_i は

$$G_i = \frac{1}{h_i^2} \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{dx_i^2} + Geo.$$

で計算される. ここで, $Geo.$ はスケール因子の空間微分に関連する項であり, 常に 1 階微分で構成されている. この項も同様に 2 次精度の中心差分近似を用いる. このとき, 引数は以下の対応をする :

$$x_i : \mathbf{x}, \quad u_i : \mathbf{u}, \quad G_i : \mathbf{val}, \quad h_1 : \mathbf{hx}.$$

備考

- 未定義値が定義されている場合は, その値に対応する値が格子点に入っている場合, その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される.

3.3.12 laplacian_2d

機能

2 次の中心差分近似を用いて, 任意変数の 2 次元座標ラプラシアンを計算する.

書式

```
call laplacian_2d( x, y, u, val, [undef], [hx], [hy] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------------------|-------|-------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 空間座標第一成分. |
| y | <R,DP(:)> | in | 空間座標第二成分. |
| u | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x, y の各点で定義される変数. |
| val | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | 2 階勾配値. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y))> | in | y 方向のスケール因子. |

定義式

座標 (x_1, x_2) における変数 u の 2 階微分を計算する :

$$\begin{aligned} \text{laplacian} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\ &\quad + \frac{1}{2h_2^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{1}{2h_1^2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \end{aligned}$$

ここで、 h_1, h_2 はスケール因子である。この勾配を離散変数 $u_{i,j}$, 離散化された位置座標 x_i, x_j に対して、2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると、離散点 x_i, x_j におけるラプラシアン $G_{i,j}$ は

$$G_{i,j} = \frac{1}{h_1^2} \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{dx_i^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{dx_j^2} + Geo.$$

で計算される。ここで、 $Geo.$ はスケール因子の空間微分に関連する項であり、常に 1 階微分で構成されている。この項も同様に 2 次精度の中心差分近似を用いる。このとき、引数は以下の対応をする :

$$x_i : \mathbf{x}, \quad x_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad G_{i,j} : \mathbf{val}, \quad h_1 : \mathbf{hx}, \quad h_2 : \mathbf{hy}.$$

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.13 laplacian_3d

機能

2 次の中心差分近似を用いて、任意変数の 3 次元座標ラプラシアンを計算する。

書式

```
call laplacian_3d( x, y, z, u, val, [undef], [hx], [hy], [hz] )
```

引数

| | | | |
|-------|---------------------------------|-------|----------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 空間座標第一成分. |
| y | <R,DP(:)> | in | 空間座標第二成分. |
| z | <R,DP(:)> | in | 空間座標第三成分. |
| u | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | x, y, z の各点で定義される変数. |
| val | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | 2 階勾配値. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |
| hx | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | x 方向のスケール因子. |
| hy | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | y 方向のスケール因子. |
| hz | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | z 方向のスケール因子. |

定義式

座標 (x_1, x_2, x_3) における変数 u の 2 階微分を計算する：

$$\begin{aligned} \text{laplacian} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \\ &\quad + \frac{1}{2h_2^2 h_3^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right)^2 + \frac{1}{2h_3^2 h_1^2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)^2 + \frac{1}{2h_1^2 h_2^2} \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \right)^2 \end{aligned}$$

ここで、 h_1 はスケール因子である。この勾配を離散変数 $u_{i,j,k}$ 、離散化された位置座標 x_i, x_j, x_k に対して、2 次精度の中心差分近似を用いて適用すると、離散点 x_i, x_j, x_k におけるラプラシアン $G_{i,j,k}$ は

$$G_{i,j,k} = \frac{u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k}}{dx_i^2} + \frac{u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k}}{dx_j^2} + \frac{u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k}}{dx_k^2} + Geo.$$

で計算される。ここで、 $Geo.$ はスケール因子の空間微分に関連する項であり、常に 1 階微分で構成されている。この項も同様に 2 次精度の中心差分近似を用いる。このとき、引数は以下の対応をする：

$$x_i : \mathbf{x}, \quad x_j : \mathbf{y}, \quad x_k : \mathbf{z}, \quad u_{i,j,k} : \mathbf{u}, \quad G_{i,j,k} : \mathbf{val}, \quad h_1 : \mathbf{hx}, \quad h_2 : \mathbf{hy}, \quad h_3 : \mathbf{hz}.$$

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される。

3.3.14 z_2_zeta

機能

デカルト座標系鉛直高度座標に対応する terrain following 座標系（以下, terrain 系）鉛直高度座標を求める。物理的な位置は変化しない。

書式

```
result=z_2_zeta( z, zf, zt )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|------------------|
| z | <R> | in | 地表面高度 [m]. |
| zf | <R> | in | 地表面高度 [m]. |
| zt | <R> | in | 最上端高度 [m]. |
| 戻り値 | <R> | inout | terrain 系高度 [m]. |

定義式

terrain 系鉛直座標 ζ はデカルト系鉛直座標 z を用いて

$$\zeta(x, y, z) \equiv \frac{z_{top} [z - z_{sfc}(x, y)]}{z_{top} - z_{sfc}(x, y, z)}$$

で定義されている。

備考

特になし。

3.3.15 zast_2_w_2d

機能

terrain following 座標系（以下, terrain 系）で定義されるある 1 高度層において、デカルト座標系で定義される鉛直風速を terrain following 座標系で定義される鉛直風速に変換する。ただし、ここでは座標点の変換は行わない。あくまで terrain 系の格子点におけるデカルト座標系風速を terrain 系成分に変換するのみである。本ルーチンは terrain 系格子点上に定義されたデカルト座標系風速成分を terrain 系風速成分に変換するルーチンである ^{*1}。

^{*1} 定義されている格子座標と定義されているベクトル成分の座標系が異なっていることに注意。

書式

```
call zast_2_w_2d( x, y, zeta, zf, zt, u, v, w, wh, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|----------------------|-------|-----------------------------------|
| x | <R(:)> | in | デカルト系第一座標. |
| y | <R(:)> | in | デカルト系第二座標. |
| zeta | <R(size(x),size(y))> | in | terrain 系の任意 1 層 における鉛直高度 [m]. |
| zf | <R(size(x),size(y))> | in | 地表面高度 [m]. |
| zt | <R(size(x),size(y))> | in | 最上端高度 [m]. |
| u | <R(size(x),size(y))> | in | zeta に対応する東西風速 [m/s]. |
| v | <R(size(x),size(y))> | in | zeta に対応する南北風速 [m/s]. |
| w | <R(size(x),size(y))> | in | zeta に対応する鉛直風速 [m/s]. |
| wh | <R(size(x),size(y))> | inout | 変換後の鉛直風速 [m/s]. |
| undef | R | in | 未定義値. |

定義式

本ルーチンは水平方向にはデカルト座標系のみを想定している。今後拡張予定。
terrain 系格子点上において、デカルト座標系で定義されている東西、南北、鉛直風速を (u, v, w) とし、terrain 系における高度座標を ζ とする。このとき、デカルト座標系の鉛直風速成分を terrain 系鉛直風速成分 W に変換するには以下のような変換式を用いる：

$$W = \frac{1}{G^{1/2}} [w + J_{31}u + J_{32}v],$$

$$G^{1/2} \equiv \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 - \frac{z_{sfc}(x, y)}{z_{top}},$$

$$J_{31} \equiv \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x, y)}{\partial x}, \quad J_{32} \equiv \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x, y)}{\partial y}.$$

ここで、terrain 系鉛直座標 ζ は

$$\zeta(x, y, z) \equiv \frac{z_{top} [z - z_{sfc}(x, y)]}{z_{top} - z_{sfc}(x, y, z)}$$

と定義される。ここで、 x, y, z はデカルト座標系、 z_{top}, z_{sfc} はそれぞれデカルト座標の鉛直方向定義域上端、地表面高度を表す。このとき実際のプログラムにおける引数は以下の対応をする：

$$(u, v, w) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$\zeta(x, y) : \mathbf{zeta}(\mathbf{size}(\mathbf{x}), \mathbf{size}(\mathbf{y})), \quad (x, y) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$z_{sfc}(x, y) : \mathbf{zf}(\mathbf{size}(\mathbf{x}), \mathbf{size}(\mathbf{y})), \quad z_{top} : \mathbf{zt}(\mathbf{size}(\mathbf{x}), \mathbf{size}(\mathbf{y}))$$

備考

- 定義式の導出は付録??参照.
- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される.

3.3.16 zast_2_w_3d

機能

terrain following 座標系（以下, terrain 系）で定義されるある 1 高度層において、デカルト座標系で定義される鉛直風速を terrain following 座標系で定義される鉛直風速に変換する。ただし、ここでは座標点の変換は行わない。あくまで terrain 系の格子点におけるデカルト座標系風速を terrain 系成分に変換するのみである。本ルーチンは terrain 系格子点上に定義されたデカルト座標系風速成分を terrain 系風速成分に変換するルーチンである ^{*2}.

書式

```
call zast_2_w_3d( x, y, zeta, zf, zt, u, v, w, wh, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|---|-------|--------------------|
| x | <R(size(zeta,1))> | in | デカルト系第一座標. |
| y | <R(size(zeta,2))> | in | デカルト系第二座標. |
| zeta | <R(:, :, :)> | in | terrain 系の鉛直高度 [m] |
| zf | <R(size(zeta,1),size(zeta,2))> | in | 地表面高度 [m]. |
| zt | <R(size(zeta,1),size(zeta,2))> | in | 最上端高度 [m]. |
| u | <R(size(zeta,1),size(zeta,2),size(zeta,3))> | in | zeta に対応する東西風速 |
| v | <R(size(zeta,1),size(zeta,2),size(zeta,3))> | in | zeta に対応する南北風速 |
| w | <R(size(zeta,1),size(zeta,2),size(zeta,3))> | in | zeta に対応する鉛直風速 |
| wh | <R(size(zeta,1),size(zeta,2),size(zeta,3))> | inout | 変換後の鉛直風速 [m/s] |
| undef | R | in | 未定義値. |

定義式

本ルーチンは水平方向にはデカルト座標系のみを想定している。今後拡張予定。
terrain 系格子点上において、デカルト座標系で定義されている東西、南北、鉛直風速を (u, v, w) とし、terrain 系における高度座標を ζ とする。このとき、デカルト座標系の鉛直風速成分を terrain 系鉛直風速成分 W に変換するには以下のような変換式を用いる：

$$W = \frac{1}{G^{1/2}} [w + J_{31}u + J_{32}v],$$

$$G^{1/2} \equiv \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 - \frac{z_{sfc}(x, y)}{z_{top}},$$

^{*2}定義されている格子座標と定義されているベクトル成分の座標系が異なっていることに注意.

$$J_{31} \equiv \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x, y)}{\partial x}, \quad J_{32} \equiv \left(\frac{\zeta}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x, y)}{\partial y}.$$

ここで、terrain 系鉛直座標 ζ は

$$\zeta(x, y, z) \equiv \frac{z_{top} [z - z_{sfc}(x, y)]}{z_{top} - z_{sfc}(x, y, z)}$$

と定義される。ここで、 x, y, z はデカルト座標系、 z_{top}, z_{sfc} はそれぞれデカルト座標の鉛直方向定義域上端、地表面高度を表す。このとき実際のプログラムにおける引数は以下の対応をする：

$$(u, v, w) : (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$\zeta(x, y, z) : \text{zeta}(\text{size}(\mathbf{x}), \text{size}(\mathbf{y}), \text{size}(\text{zeta}, 3)), \quad (x, y) : (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$z_{sfc}(x, y) : \text{zf}(\text{size}(\mathbf{x}), \text{size}(\mathbf{y})), \quad z_{top} : \text{zt}(\text{size}(\mathbf{x}), \text{size}(\mathbf{y}))$$

備考

- 定義式の導出は付録??参照.
- 未定義値が定義されている場合は、その値に対応する値が格子点に入っている場合、その格子を処理格子として使用している格子点での計算値がすべて未定義値として設定されて返される.

3.4 ellip_slv

楕円型偏微分方程式を計算するモジュール。現在、2, 3 次元デカルト座標系における一般的な楕円型偏微分方程式の反復法による計算ルーチンをサポートしている。

なお、本モジュールで使用されている計算法・離散化については、[5.1](#) 参照。

3.4.1 Ellip_GauSei_2d

機能

ガウスザイデル法（逐次反復法）を用いて、2 次元の楕円型非斉次 2 階線形偏微分方程式を計算する。本ルーチンは内部領域に任意の未定義領域を含む場合でも計算することが可能である。そのような計算を行う場合はオプション引数 `inner_bound` を設定すること。

書式

```
call Ellip_GauSei_2d( x, y, rho, eps, boundary, psi, &
& [bound_opt], [a], [b], [c], [d], [e], [f], &
& [undef], [inner_bound], [init_flag], [ln] )
```

引数

| | | | |
|-------------|-------------------------|-------|---------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| rho | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 非斉次方程式の強制項 (後述). |
| eps | <R,DP> | in | 反復法の収束条件 (後述). |
| boundary | <C(4)> | in | 4 辺の境界条件を与える (後述). |
| psi | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | ポアソン方程式の解. |
| bound_opt | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 境界での値 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| a | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 1 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| b | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 2 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| c | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 3 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| d | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 4 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| e | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 5 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| f | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 6 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| undef | <R,DP> | in | 内部領域の値 (後述). デフォルト: ゼロ. |
| inner_bound | <I(size(x),size(y))> | in | 内部境界判別整数 (付録). デフォルト: すべてゼロ. |
| init_flag | <L> | in | 応答をゼロで初期化するか (後述). |
| ln | <I> | in | 反復回数 (後述). |

定義式

求める未知変数を ψ としたとき、以下の偏微分方程式を計算する。

$$a(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y) \psi(x, y) = \rho(x, y).$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x : \mathbf{x}, \quad y : \mathbf{y}, \quad \rho : \mathbf{rho}, \quad \psi : \mathbf{psi}.$$

$$a : \mathbf{a}, \quad b : \mathbf{b}, \quad c : \mathbf{c}, \quad d : \mathbf{d}, \quad e : \mathbf{e}, \quad f : \mathbf{f}.$$

なお、具体的な差分式、境界条件の計算式は付録参照。

備考

- 非斉次強制項 ρ および, f は計算領域すべてについてゼロと設定すると、ラプラス方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 f をゼロと設定すると、純ポアソン方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 ρ をゼロと設定すると、ヘルムホルツ方程式を計算することに相当する。
- 本ルーチンの収束条件は、反復の 1 ステップ前後での絶対誤差の最大値が閾値以下になったときに計算を終了するように設定しており、オプション引数 `eps` はその誤差の値を設定する。
- 本ルーチンでは、4 辺の境界条件を

1 : 固定端境界 (ディリクレ型), 2 : 自由端境界 (ノイマン型), 3 : 周期境界条件

という 3 種類の数字で設定することができる。ここで、別のオプション引数 `bound_opt` を設定しておけば、その値で境界を強制することができる (固定端の場合は、引数の値そのものが用いられ、自由端の場合は、境界を法線方向に流れるフラックスの値として引数の値が使用される。もちろん、周期境界ではこの値は設定しても反映されない)。この引数は 4 文字の文字型であり、それぞれの順番は図 5.1 左のような対応をしている。

- 境界条件は自由に設定できるが、周期境界条件を設定した場合、その境界に隣接する反対側の境界も同一の境界条件の値を設定しておかなければならない。例えば、 x 軸に平行な境界を周期境界とするのであれば、`boundary` の 1, 3 文字目は '3' でなければならない。そのようにされていない場合には、エラーを返す仕様になっている。
- 境界が固定端か自由端の場合、`bound_opt` で設定される値のうち、境界上に存在する配列要素^{*3}の値を参照して、固定端の場合はその値を直接固定端での値として、自由端の場合は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g$$

という境界条件である場合、 f, g の値に相当する。つまり、このオプションにおいて、実際にルーチンではほとんどの配列が使用されないことになる。

- 境界の隅における境界条件の優先順位は、固定境界 (1), 周期境界 (3), 自由境界 (2) の順番となっている。つまり、`bound(1:2)='12'` と設定されている場合、両方に属する点 $i=1, j=1$ は固定境界 (1) で計算される ('2' で設定される自由境界より優先度が高いため)。
- 偏微分方程式の各係数の値を表す `a, b, c, d, e, f` であるが、この値を省略すると、最高階の微分演算子に係る係数はすべて 1 に設定され、その他はすべてゼロに設定される (すなわち、純ポアソン方程式の計算となる)。これは、最

^{*3}つまり、`bound_opt(1,:), bound_opt(size(x,:),:), bound_opt(:,1), bound_opt(:,size(y)))` に設定されている値のこと。

高階の微分演算子までゼロに設定すると、方程式が特異系になり、この方法で処理すべき方程式の形ではなくなるための措置である。

- 偏微分方程式の係数は空間変化している場合でも計算することは可能であり、空間格子点が等間隔座標でない場合でも計算は可能である。
- 引数 `undef` は内部領域に未定義域を含む場合に、未定義域での応答に対して与えられる値。
- 引数 `inner_bound` は境界格子についてゼロでない値、また内部未定義域に対して 10 という値が与えられる。ユーザーはこの引数を設定することで、内部領域に任意の形の閉じた未定義域を与えて計算することができる。具体的にどのような境界でどのような値を与えるかについては、5.1 を参照。
- 引数 `init_flag` は引数 `psi` を最初にゼロに初期化するかどうかのフラグであり、`.true.` のとき、初期化を行う。デフォルトは `.true.` となる。これは、最初に `psi` の分布がある程度応答の場に類似していれば、反復計算する回数が少なくなることから高速化用のフラグである。ただし、応答の場がある程度予測される場合や既に応答の場がわかっている状態から少し遷移した状態の応答を求めるといった限定的な場合にしか、`.false.` は選ばないほうがよい。
- 引数 `ln` は収束判定条件 `eps` の値に関係なく、`ln` 回反復を繰り返し替えた後、強制的に終了し、反復終了時点での応答の分布を返す。

3.4.2 Ellip_Jacobi_2d

機能

ヤコビ法を用いて、2次元の楕円型非斉次2階線形偏微分方程式を計算する。OpenMPによる並列処理が可能。本ルーチンは内部領域に任意の未定義領域を含む場合でも計算することが可能である。そのような計算を行う場合はオプション引数 `inner_bound` を設定すること。

書式

```
call Ellip_Jacobi_2d( x, y, rho, eps, boundary, psi, &  
& [bound_opt], [a], [b], [c], [d], [e], [f], &  
& [undef], [inner_bound], [init_flag], [ln] )
```

引数

| | | | |
|-------------|-------------------------|-------|---------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| rho | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 非斉次方程式の強制項 (後述). |
| eps | <R,DP> | in | 反復法の収束条件 (後述). |
| boundary | <C(4)> | in | 4 辺の境界条件を与える (後述). |
| psi | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | ポアソン方程式の解. |
| bound_opt | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 境界での値 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| a | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 1 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| b | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 2 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| c | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 3 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| d | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 4 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| e | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 5 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| f | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 係数 6 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| undef | <R,DP> | in | 内部領域の値 (後述). デフォルト: ゼロ. |
| inner_bound | <I(size(x),size(y))> | in | 内部境界判別整数 (付録). デフォルト: すべてゼロ. |
| init_flag | <L> | in | 応答をゼロで初期化するか (後述). |
| ln | <I> | in | 反復回数 (後述). |

定義式

求める未知変数を ψ としたとき、以下の偏微分方程式を計算する。

$$a(x,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial y}+f(x,y)\psi(x,y)=\rho(x,y).$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x : \mathbf{x}, \quad y : \mathbf{y}, \quad \rho : \mathbf{rho}, \quad \psi : \mathbf{psi}.$$

$$a : \mathbf{a}, \quad b : \mathbf{b}, \quad c : \mathbf{c}, \quad d : \mathbf{d}, \quad e : \mathbf{e}, \quad f : \mathbf{f}.$$

なお、具体的な差分式、境界条件の計算式は付録参照。

備考

- 非斉次強制項 ρ および、 f は計算領域すべてについてゼロと設定すると、ラプラス方程式を計算することに相当する。

- 計算領域すべてについて、 f をゼロと設定すると、純ポアソン方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 ρ をゼロと設定すると、ヘルムホルツ方程式を計算することに相当する。
- 本ルーチンの収束条件は、反復の1ステップ前後での絶対誤差の最大値が閾値以下になったときに計算を終了するように設定しており、オプション引数 `eps` はその誤差の値を設定する。
- 本ルーチンでは、4 辺の境界条件を

1 : 固定端境界 (ディリクレ型), 2 : 自由端境界 (ノイマン型), 3 : 周期境界条件

という3種類の数字で設定することができる。ここで、別のオプション引数 `bound_opt` を設定しておけば、その値で境界を強制することができる (固定端の場合は、引数の値そのものが用いられ、自由端の場合は、境界を法線方向に流れるフラックスの値として引数の値が使用される。もちろん、周期境界ではこの値は設定しても反映されない)。この引数は4文字の文字型であり、それぞれの順番は図 5.1 左のような対応をしている。

- 境界条件は自由に設定できるが、周期境界条件を設定した場合、その境界に隣接する反対側の境界も同一の境界条件の値を設定しておかなければならない。例えば、 x 軸に平行な境界を周期境界とするのであれば、`boundary` の1, 3文字目は '3' でなければならない。そのようにされていない場合には、エラーを返す仕様になっている。
- 境界が固定端か自由端の場合、`bound_opt` で設定される値のうち、境界上に存在する配列要素^{*4}の値を参照して、固定端の場合はその値を直接固定端での値として、自由端の場合は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g$$

という境界条件である場合、 f, g の値に相当する。つまり、このオプションにおいて、実際にルーチンではほとんどの配列が使用されないことになる。

- 境界の隅における境界条件の優先順位は、固定境界 (1), 周期境界 (3), 自由境界 (2) の順番となっている。つまり、`bound(1:2)='12'` と設定されている場合、両方に属する点 $i=1, j=1$ は固定境界 (1) で計算される ('2' で設定される自由境界より優先度が高いため)。
- 偏微分方程式の各係数の値を表す `a, b, c, d, e, f` であるが、この値を省略すると、最高階の微分演算子に係る係数はすべて1に設定され、その他はすべてゼロに設定される (すなわち、純ポアソン方程式の計算となる)。これは、最高階の微分演算子までゼロに設定すると、方程式が特異系になり、この方法で処理すべき方程式の形ではなくなるための措置である。

^{*4}つまり、`bound_opt(1,:), bound_opt(size(x,:),:), bound_opt(:,1), bound_opt(:,size(y)))` に設定されている値のこと。

- 偏微分方程式の係数は空間変化している場合でも計算することは可能であり、空間格子点が等間隔座標でない場合でも計算は可能である。
- 引数 `undef` は内部領域に未定義域を含む場合に、未定義域での応答に対して与えられる値。
- 引数 `inner_bound` は境界格子についてゼロでない値、また内部未定義域に対して 10 という値が与えられる。ユーザーはこの引数を設定することで、内部領域に任意の形の閉じた未定義域を与えて計算することができる。具体的にどのような境界でどのような値を与えるかについては、5.1 を参照。
- 引数 `init_flag` は引数 `psi` を最初にゼロに初期化するかどうかのフラグであり、`.true.` のとき、初期化を行う。デフォルトは `.true.` となる。これは、最初に `psi` の分布がある程度応答の場に類似していれば、反復計算する回数が少なくなることから高速化用のフラグである。ただし、応答の場がある程度予測される場合や既に応答の場がわかっている状態から少し遷移した状態の応答を求めるといった限定的な場合にしか、`.false.` は選ばないほうがよい。
- 引数 `ln` は収束判定条件 `eps` の値に関係なく、`ln` 回反復を繰り返し替えた後、強制的に終了し、反復終了時点での応答の分布を返す。

3.4.3 Ellip_GauSei_3d

機能

ガウスザイデル法（逐次反復法）を用いて、3 次元の楕円型非斉次 2 階線形偏微分方程式を計算する。本ルーチンは内部領域に任意の未定義領域を含む場合でも計算することが可能である。そのような計算を行う場合はオプション引数 `inner_bound` を設定すること。

書式

```
call Ellip_GauSei_3d( x, y, rho, eps, boundary, psi, &  
& [bound_opt], [xa], [ya], [za], &  
& [a], [b], [c], [d], [e], [f], [g], &  
& [undef], [inner_bound], [init_flag], [ln] )
```

引数

| | | | |
|-------------|---------------------------------|-------|---------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| z | <R,DP(:)> | in | 右手系第三座標. |
| rho | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 非斉次方程式の強制項 (後述). |
| eps | <R,DP> | in | 反復法の収束条件 (後述). |
| boundary | <C(8)> | in | 8 面の境界条件を与える (後述). |
| psi | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | ポアソン方程式の解. |
| bound_opt | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 境界での値 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| xa | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 1 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| ya | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 2 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| za | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 3 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| a | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 4 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| b | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 5 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| c | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 6 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| d | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 7 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| e | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 8 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| f | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 9 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| g | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 10 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| undef | <R,DP> | in | 内部領域の値 (後述). デフォルト: ゼロ. |
| inner_bound | <I(size(x),size(y),size(z))> | in | 内部境界判別整数 (付録). デフォルト: すべてゼロ. |
| init_flag | <L> | in | 応答をゼロで初期化するか (後). |
| ln | <I> | in | 反復回数 (後述). |

定義式

求める未知変数を ψ としたとき、以下の偏微分方程式を計算する。

$$\begin{aligned}
& X(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Y(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + Z(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + a(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + b(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + c(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \\
& + d(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + g(x, y, z) \psi(x, y, z) = \rho(x, y, z).
\end{aligned}$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$\begin{aligned} x : x, \quad y : y, \quad z : z, \quad \rho : \text{rho}, \quad \psi : \text{psi}, \\ X : \text{xa}, \quad Y : \text{ya}, \quad Z : \text{za}, \\ a : a, \quad b : b, \quad c : c, \quad d : d, \quad e : e, \quad f : f, \quad g : g. \end{aligned}$$

備考

- 非斉次強制項 ρ および, g は計算領域すべてについてゼロと設定すると、ラプラス方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 g をゼロと設定すると、純ポアソン方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 ρ をゼロと設定すると、ヘルムホルツ方程式を計算することに相当する。
- 本ルーチンの収束条件は、反復の1ステップ前後での絶対誤差の最大値が閾値以下になったときに計算を終了するように設定しており、オプション引数 `eps` はその誤差の値を設定する。
- 本ルーチンでは、6面の境界条件を

1 : 固定端境界 (ディリクレ型), 2 : 自由端境界 (ノイマン型), 3 : 周期境界条件

という3種類の数字で設定することができる。ここで、別のオプション引数 `bound_opt` を設定しておけば、その値で境界を強制することができる (固定端の場合は、引数の値そのものが用いられ、自由端の場合は、境界を法線方向に流れるフラックスの値として引数の値が使用される。もちろん、周期境界ではこの値は設定しても反映されない)。この引数は4文字の文字型であり、それぞれの順番は図 5.1 右のような対応をしている。

- 境界条件は自由に設定できるが、周期境界条件を設定した場合、その境界に隣接する反対側の境界も同一の境界条件の値を設定しておかなければならない。例えば、 x 軸に平行な境界を周期境界とするのであれば、`boundary` の1, 3文字目は '3' でなければならない。そのようにされていない場合には、エラーを返す仕様になっている。
- 境界が固定端か自由端の場合、`bound_opt` で設定される値のうち、境界上に存在する配列要素^{*5}の値を参照して、固定端の場合はその値を直接固定端での値として、自由端の場合は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = h$$

という境界条件である場合、 f, g, h の値に相当する。つまり、このオプションにおいて、実際にルーチンではほとんどの配列が使用されないことになる。

^{*5}つまり、`bound_opt(1,:)`, `bound_opt(size(x),:)`, `bound_opt(:,1)`, `bound_opt(:,size(y))` に設定されている値のこと。

- 境界の隅における境界条件の優先順位は、固定境界 (1), 周期境界 (3), 自由境界 (2) の順番となっている。つまり、`bound(1:2)='12'` と設定されている場合、両方に属する点 $i = 1, j = 1$ は固定境界 (1) で計算される ('2' で設定される自由境界より優先度が高いため)。
- 偏微分方程式の各係数の値を表す `xa, ya, za, a, b, c, d, e, f, g` であるが、この値を省略すると、最高階の微分演算子に係る係数はすべて 1 に設定され、その他はすべてゼロに設定される (すなわち、純ポアソン方程式の計算となる)。これは、最高階の微分演算子までゼロに設定すると、方程式が特異系になり、この方法で処理すべき方程式の形ではなくなるための措置である。
- 偏微分方程式の係数は空間変化している場合でも計算することは可能であり、空間格子点が等間隔座標でない場合でも計算は可能である。
- 引数 `undef` は内部領域に未定義域を含む場合に、未定義域での応答に対して与えられる値。
- 引数 `inner_bound` は境界格子についてゼロでない値、また内部未定義域に対して 10 という値が与えられる。ユーザーはこの引数を設定することで、内部領域に任意の形の閉じた未定義域を与えて計算することができる。具体的にどのような境界でどのような値を与えるかについては、5.1 を参照。
- 引数 `init_flag` は引数 `psi` を最初にゼロに初期化するかどうかのフラグであり、`.true.` のとき、初期化を行う。デフォルトは `.true.` となる。これは、最初に `psi` の分布がある程度応答の場に類似していれば、反復計算する回数が少なくなることから高速化用のフラグである。ただし、応答の場がある程度予測される場合や既に応答の場がわかっている状態から少し遷移した状態の応答を求めるといった限定的な場合にしか、`.false.` は選ばないほうがよい。
- 引数 `ln` は収束判定条件 `eps` の値に関係なく、`ln` 回反復を繰り返したら、強制的に終了し、反復終了時点での応答の分布を返す。

3.4.4 Ellip_Jacobi_3d

機能

ヤコビ法を用いて、3 次元の楕円型非斉次 2 階線形偏微分方程式を計算する。OpenMP による並列処理が可能。本ルーチンは内部領域に任意の未定義領域を含む場合でも計算することが可能である。そのような計算を行う場合はオプション引数 `inner_bound` を設定すること。

書式

```
call Ellip_Jacobi_3d( x, y, rho, eps, boundary, psi, &
& [bound_opt], [xa], [ya], [za], &
& [a], [b], [c], [d], [e], [f], [g], &
& [undef], [inner_bound], [init_flag], [ln] )
```

引数

| | | | |
|-------------|---------------------------------|-------|---------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| z | <R,DP(:)> | in | 右手系第三座標. |
| rho | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 非斉次方程式の強制項 (後述). |
| eps | <R,DP> | in | 反復法の収束条件 (後述). |
| boundary | <C(8)> | in | 8 面の境界条件を与える (後述). |
| psi | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | inout | ポアソン方程式の解. |
| bound_opt | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 境界での値 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| xa | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 1 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| ya | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 2 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| za | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 3 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| a | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 4 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| b | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 5 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| c | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 6 (後述). デフォルト: すべて 1. |
| d | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 7 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| e | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 8 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| f | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 9 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| g | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 係数 10 (後述). デフォルト: すべてゼロ. |
| undef | <R,DP> | in | 内部領域の値 (後述). デフォルト: ゼロ. |
| inner_bound | <I(size(x),size(y),size(z))> | in | 内部境界判別整数 (付録). デフォルト: すべてゼロ. |
| init_flag | <L> | in | 応答をゼロで初期化するか (後述). |
| ln | <I> | in | 反復回数 (後述). |

定義式

求める未知変数を ψ としたとき、以下の偏微分方程式を計算する。

$$X(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Y(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + Z(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + a(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + b(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + c(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + d(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + g(x, y, z) \psi(x, y, z) = \rho(x, y, z).$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x : \mathbf{x}, \quad y : \mathbf{y}, \quad z : \mathbf{z}, \quad \rho : \mathbf{rho}, \quad \psi : \mathbf{psi},$$

$$X : \mathbf{xa}, \quad Y : \mathbf{ya}, \quad Z : \mathbf{za},$$

$$a : \mathbf{a}, \quad b : \mathbf{b}, \quad c : \mathbf{c}, \quad d : \mathbf{d}, \quad e : \mathbf{e}, \quad f : \mathbf{f}, \quad g : \mathbf{g}.$$

備考

- 非斉次強制項 ρ および, g は計算領域すべてについてゼロと設定すると、ラプラス方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 g をゼロと設定すると、純ポアソン方程式を計算することに相当する。
- 計算領域すべてについて、 ρ をゼロと設定すると、ヘルムホルツ方程式を計算することに相当する。
- 本ルーチンの収束条件は、反復の 1 ステップ前後での絶対誤差の最大値が閾値以下になったときに計算を終了するように設定しており、オプション引数 `eps` はその誤差の値を設定する。
- 本ルーチンでは、6 面の境界条件を

1 : 固定端境界 (ディリクレ型), 2 : 自由端境界 (ノイマン型), 3 : 周期境界条件

という 3 種類の数字で設定することができる。ここで、別のオプション引数 `bound_opt` を設定しておけば、その値で境界を強制することができる (固定端の場合は、引数の値そのものが用いられ、自由端の場合は、境界を法線方向に流れるフラックスの値として引数の値が使用される。もちろん、周期境界ではこの値は設定しても反映されない)。この引数は 4 文字の文字型であり、それぞれの順番は図 5.1 右のような対応をしている。

- 境界条件は自由に設定できるが、周期境界条件を設定した場合、その境界に隣接する反対側の境界も同一の境界条件の値を設定しておかなければならない。例えば、 x 軸に平行な境界を周期境界とするのであれば、`boundary` の 1, 3 文字目は '3' でなければならない。そのようにされていない場合には、エラーを返す仕様になっている。

- 境界が固定端か自由端の場合、`bound_opt` で設定される値のうち、境界上に存在する配列要素^{*6}の値を参照して、固定端の場合はその値を直接固定端での値として、自由端の場合は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = g, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = h$$

という境界条件である場合、 f, g, h の値に相当する。つまり、このオプションにおいて、実際にルーチンではほとんどの配列が使用されないことになる。

- 境界の隅における境界条件の優先順位は、固定境界 (1), 周期境界 (3), 自由境界 (2) の順番となっている。つまり、`bound(1:2)='12'` と設定されている場合、両方に属する点 $i = 1, j = 1$ は固定境界 (1) で計算される ('2' で設定される自由境界より優先度が高いため)。
- 偏微分方程式の各係数の値を表す `xa, ya, za, a, b, c, d, e, f, g` であるが、この値を省略すると、最高階の微分演算子に係る係数はすべて 1 に設定され、その他はすべてゼロに設定される (すなわち、純ポアソン方程式の計算となる)。これは、最高階の微分演算子までゼロに設定すると、方程式が特異系になり、この方法で処理すべき方程式の形ではなくなるための措置である。
- 偏微分方程式の係数は空間変化している場合でも計算することは可能であり、空間格子点が等間隔座標でない場合でも計算は可能である。
- 引数 `undef` は内部領域に未定義域を含む場合に、未定義域での応答に対して与えられる値。
- 引数 `inner_bound` は境界格子についてゼロでない値、また内部未定義域に対して 10 という値が与えられる。ユーザーはこの引数を設定することで、内部領域に任意の形の閉じた未定義域を与えて計算することができる。具体的にどのような境界でどのような値を与えるかについては、5.1 を参照。
- 引数 `init_flag` は引数 `psi` を最初にゼロに初期化するかどうかのフラグであり、`.true.` のとき、初期化を行う。デフォルトは `.true.` となる。これは、最初に `psi` の分布がある程度応答の場に類似していれば、反復計算する回数が少なくなることから高速化用のフラグである。ただし、応答の場がある程度予測される場合や既に応答の場がわかっている状態から少し遷移した状態の応答を求めるといった限定的な場合にしか、`.false.` は選ばないほうがよい。
- 引数 `ln` は収束判定条件 `eps` の値に関係なく、`ln` 回反復を繰り返したら、強制的に終了し、反復終了時点での応答の分布を返す。

3.5 ffts

FFT (高速フーリエ変換) に関するルーチン集. FFT 計算の詳細については、?? 参照.

^{*6}つまり、`bound_opt(1,:), bound_opt(size(x,:),:), bound_opt(:,1), bound_opt(:,size(y)))` に設定されている値のこと。

3.5.1 c2r_ffttp_1d

機能

1 次元実数データの FFT 逆変換を行う。

書式

```
call c2r_ffttp_1d( nx, a, b, [prim], [prim_fact], [omega_fix], [omegan_fix]
)
```

引数

| | | | |
|------------|---------------------|-------|---|
| nx | <I> | in | データの個数. |
| a | <CP,CDP(nx/2)> | in | 複素数変換前データ. |
| b | <R,DP(nx)> | inout | 実数変換後データ. |
| prim | <C(1)> | in | 素因数分解判定 (後述)。 'o' = 分解する, 'x' = 分解しない。 |
| prim_fact | <I(5)> | in | 素因数指数 (後述)。 |
| omega_fix | <CP,CDP(nx/2,nx/2)> | in | 2,3,5,7 以外の素因数での 回転行列 (後述)。 |
| omegan_fix | <CP,CDP(nx/2,nx/2)> | in | 全回転行列 (後述)。 |

定義式

N 個のデータをもつ実数 $x(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ を考える (N は偶数)。このデータの離散フーリエ正変換 $\hat{x}(l)$ は

$$\hat{x}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}, \quad l = 0, \dots, N-1$$

で定義される。逆変換は

$$x(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}(l) e^{2\pi i \frac{lk}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

で定義される。これを Temperton のアルゴリズムを用いて FFT 処理する。実数データの FFT 計算の詳細については, ?? 参照。

備考

- 引数 **prim** はデータ数 N を素因数分解するものであり、このオプションが 'x' の場合はデータがそのままフーリエ変換処理に回されるので、単なる離散フーリエ変換を行うことになる。分解を行えば、データ数が $N = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$ まで分解を行い、FFT 処理を行う。引数 **prim_fact** はこのときの素因数指数の数を指定する。つまり、

```
prim_fact(1:5)=(/a,b,c,d,e/)
```

という対応となる.

- 引数 `omegan_fix` はデータ数 `nx` における FFT で使用する回転行列^{*7}を指定する. 引数 `omega_fix` はデータ数が 2,3,5,7 以外の素因数 (1 つめの備考を例にすると, `e` がそれにあたる) に対応する回転行列. これらの行列は専用ルーチン `rotate_calc` で行うことができる.
- 本ルーチンの仕様から、波数成分 $N/2$ は配列 `a(1)` の複素成分に格納しなければならない。

3.5.2 ffttp_1d

機能

1 次元複素数データから FFT を行う。

書式

```
call ffttp_1d( nx, a, b, csign, [prim], [prim_fact], [omega_fix], [omegan_fix]
)
```

引数

| | | | |
|-------------------------|-----------------|--------------------|---|
| <code>nx</code> | <I> | <code>in</code> | データの個数. |
| <code>a</code> | <CP,CDP(nx)> | <code>in</code> | 複素数変換前データ. |
| <code>b</code> | <CP,CDP(nx)> | <code>inout</code> | 複素数変換後データ. |
| <code>csign</code> | <C(1)> | <code>in</code> | 正逆変換判定。 'r' = 正変換, 'i' = 逆変換。 |
| <code>prim</code> | <C(1)> | <code>in</code> | 素因数分解判定 (後述)。 'o' = 分解する, 'x' = 分解しない。 |
| <code>prim_fact</code> | <I(5)> | <code>in</code> | 素因数指数 (後述)。 |
| <code>omega_fix</code> | <CP,CDP(nx,nx)> | <code>in</code> | 2,3,5,7 以外の素因数での 回転行列 (後述)。 |
| <code>omegan_fix</code> | <CP,CDP(nx,nx)> | <code>in</code> | 全回転行列 (後述)。 |

定義式

N 個のデータをもつ複素数 $x(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ を考える。このデータの離散フーリエ正変換 $\hat{x}(l)$ は

$$\hat{x}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}, \quad l = 0, \dots, N-1$$

^{*7}回転行列の詳細な解説は付録??参照.

で定義される。逆変換は

$$x(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}(k) e^{2\pi i \frac{lk}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

で定義される。これを Temperton のアルゴリズムを用いて FFT 処理する。

備考

- 引数 `prim` はデータ数 N を素因数分解するものであり、このオプションが 'x' の場合はデータがそのままフーリエ変換処理に回されるので、単なる離散フーリエ変換を行うことになる。分解を行えば、データ数が $N = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$ までは分解を行い、FFT 処理を行う。引数 `prim_fact` はこのときの素因数指数の数を指定する。つまり、

```
prim_fact(1:5)=(/a,b,c,d,e/)
```

という対応となる。

- 引数 `omegan_fix` はデータ数 nx における FFT で使用する回転行列^{*8}を指定する。引数 `omega_fix` はデータ数が 2,3,5,7 以外の素因数 (1 つめの備考を例にすると, e がそれにあたる) に対応する回転行列。これらの行列は専用ルーチン `rotate_calc` で行うことができる。

3.5.3 ffttp_2d

機能

2 次元複素数データから FFT を行う。

書式

```
call ffttp_2d( nx, ny, a, b, csign, [prim], &
               [prim_factx], [prim_facty], &
               [omegax_fix], [omegaxn_fix], &
               [omegay_fix], [omegayn_fix] )
```

引数

^{*8}回転行列の詳細な解説は付録??参照.

| | | | |
|--------------------------|-----------------|-------|---|
| <code>nx</code> | <I> | in | 1 次データの個数. |
| <code>ny</code> | <I> | in | 2 次データの個数. |
| <code>a</code> | <CP,CDP(nx,ny)> | in | 複素数変換前データ. |
| <code>b</code> | <CP,CDP(nx,ny)> | inout | 複素数変換後データ. |
| <code>csign</code> | <C(1)> | in | 正逆変換判定. 'r' = 正変換, 'i' = 逆変換. |
| <code>prim</code> | <C(1)> | in | 素因数分解判定 (後述). 'o' = 分解する, 'x' = 分解しない. |
| <code>prim_factx</code> | <I(5)> | in | 1 次データ素因数指数 (後述). |
| <code>prim_facty</code> | <I(5)> | in | 2 次データ素因数指数 (後述). |
| <code>omegax_fix</code> | <CP,CDP(nx,nx)> | in | 2,3,5,7 以外の素因数での 1 次データ回転行列 (後述). |
| <code>omegay_fix</code> | <CP,CDP(ny,ny)> | in | 2,3,5,7 以外の素因数での 2 次データ回転行列 (後述). |
| <code>omegaxn_fix</code> | <CP,CDP(nx,nx)> | in | 1 次データ全回転行列 (後述). |
| <code>omegayn_fix</code> | <CP,CDP(ny,ny)> | in | 2 次データ全回転行列 (後述). |

定義式

(N, M) 個のデータをもつ複素数 $x(k, l)$, $k = 0, \dots, N-1, l = 0, \dots, M-1$ を考える。このデータの離散フーリエ正変換 $\hat{x}(m, n)$ は

$$\hat{x}(m, n) = \frac{1}{NM} \sum_{l=0}^{M-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(k, l) e^{-2\pi i \frac{km}{N}} \right] e^{-2\pi i \frac{ln}{M}}, \quad m = 0, \dots, N-1, n = 0, \dots, M-1$$

で定義される。逆変換は

$$\hat{x}(k, l) = \sum_{n=0}^{M-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m, n) e^{2\pi i \frac{km}{N}} \right] e^{2\pi i \frac{ln}{M}}, \quad k = 0, \dots, N-1, l = 0, \dots, M-1$$

で定義される。これを Temperton のアルゴリズムを用いて FFT 処理する。

備考

- 引数 `prim` はデータ数 N を素因数分解するものであり、このオプションが 'x' の場合はデータがそのままフーリエ変換処理に回されるので、単なる離散フーリエ変換を行うことになる。分解を行えば、データ数が $N = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$ まで分解を行い、FFT 処理を行う。引数 `prim_fact` はこのときの素因数指数の数を指定する。つまり、

`prim_fact(1:5)=(/a,b,c,d,e/)`

という対応となる。

- 引数 `omegan_fix` はデータ数 `nx` における FFT で使用する回転行列^{*9}を指定する。引数 `omega_fix` はデータ数が 2,3,5,7 以外の素因数 (1 つめの備考を例に

^{*9}回転行列の詳細な解説は付録??参照。

すると, e がそれにあたる) に対応する回転行列. これらの行列は専用ルーチン `rotate_calc` で行うことができる.

3.5.4 prim_calc

機能

任意の正数値について, 2,3,5,7 の素因数分解を行う.

書式

```
call prim_calc( n, factor, resid )
```

引数

| | | | |
|---------------------|--------|--------------------|------------------|
| <code>n</code> | <I> | <code>in</code> | 分解する正整数値. |
| <code>factor</code> | <I(4)> | <code>inout</code> | 2,3,5,7 の各素因数指数. |
| <code>resid</code> | <I> | <code>inout</code> | 2,3,5,7 以外の素因数. |

定義式

任意の正整数値 n が

$$n = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$$

であった場合, 上の各変数は以下のような対応となる.

$$n \rightarrow \text{in}, (a, b, c, d) \rightarrow \text{factor}(1:4), e \rightarrow \text{resid}$$

備考

特になし.

3.5.5 r2c_ffttp_1d

機能

1 次元実数データから FFT を行う。

書式

```
call r2c_ffttp_1d( nx, a, b, [prim], [prim_fact], [omega_fix], [omegan_fix]
)
```

引数

| | | | |
|-------------------------|--|--------------------|---|
| <code>nx</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | データの個数. |
| <code>a</code> | <code><R,DP(nx)></code> | <code>in</code> | 実数変換前データ. |
| <code>b</code> | <code><CP,CDP(nx/2)></code> | <code>inout</code> | 複素数変換後データ. |
| <code>prim</code> | <code><C(1)></code> | <code>in</code> | 素因数分解判定 (後述). 'o' =分解する, 'x' =分解しない. |
| <code>prim_fact</code> | <code><I(5)></code> | <code>in</code> | 素因数指数 (後述). |
| <code>omega_fix</code> | <code><CP,CDP(nx/2,nx/2)></code> | <code>in</code> | 2,3,5,7 以外の素因数での 回転行列 (後述). |
| <code>omegan_fix</code> | <code><CP,CDP(nx/2,nx/2)></code> | <code>in</code> | 全回転行列 (後述). |

定義式

N 個のデータをもつ実数 $x(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ を考える (N は偶数). このデータの離散フーリエ正変換 $\hat{x}(l)$ は

$$\hat{x}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}, \quad l = 0, \dots, N-1$$

で定義される. 逆変換は

$$x(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}(l) e^{2\pi i \frac{lk}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

で定義される. これを Temperton のアルゴリズムを用いて FFT 処理する. 実数データの FFT 計算の詳細については, ?? 参照.

備考

- 引数 `prim` はデータ数 N を素因数分解するものであり, このオプションが 'x' の場合はデータがそのままフーリエ変換処理に回されるので, 単なる離散フーリエ変換を行うことになる. 分解を行えば, データ数が $N = 2^a 3^b 5^c 7^d \times e$ まで分解を行い, FFT 処理を行う. 引数 `prim_fact` はこのときの素因数指数の数を指定する. つまり,

`prim_fact(1:5)=(/a,b,c,d,e/)`

という対応となる.

- 引数 `omegan_fix` はデータ数 `nx` における FFT で使用する回転行列 ^{*10} を指定する. 引数 `omega_fix` はデータ数が 2,3,5,7 以外の素因数 (1 つめの備考を例にすると, `e` がそれにあたる) に対応する回転行列. これらの行列は専用ルーチン `rotate_calc` で行うことができる.
- 実数データのフーリエ変換は変換後のデータ数が変換前のデータ数の半分に圧縮されていることに注意. また, 本ルーチンの仕様から, 複素波数成分 $N/2$ は `b(1)` の虚部に格納される.

^{*10}回転行列の詳細な解説は付録??参照.

3.5.6 rotate_calc

機能

データ数 `nx` の回転行列を計算する。

書式

```
call rotate_calc( nx, csign, prim_fact, omega, omegan )
```

引数

| | | | |
|------------------------|-------------------------------------|--------------------|----------------------------------|
| <code>nx</code> | <I> | <code>in</code> | データの個数. |
| <code>csign</code> | <C(1)> | <code>in</code> | 正逆変換判定。 'r' = 正変換, 'i' = 逆変換。 |
| <code>prim_fact</code> | <I(5)> | <code>in</code> | 素因数指数 (後述)。 |
| <code>omega</code> | <CP,CDP(prim_fact(5),prim_fact(5))> | <code>inout</code> | 2,3,5,7 以外の 素因数での回転行列。 |
| <code>omegan</code> | <CP,CDP(nx,nx)> | <code>inout</code> | 全回転行列。 |

定義式

N 個のデータの離散フーリエ変換に用いる回転行列 $W_{j,k}$ は

$$W_{j,k} = e^{\pm 2\pi i j k / N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

で定義される。正変換は負号, 逆変換は正号で定義される。また, 2,3,5,7 以外の素因数 α での回転行列は上式において,

$$N \rightarrow \alpha$$

とただけである。

備考

- 引数 `prim_fact` は

$$\text{prim_fact} = (/a, b, c, d, e/)$$

とすると, データ数 `nx` は

$$nx = 2^a 3^b 5^c 7^d e$$

という素因数で構成されていることを示している。

3.6 file_operate

IO ルーチン集. 現在対応しているファイルフォーマットは以下のとおりである。

- 4 バイトバイナリデータ.
- mgdsst データ.
- テキストカラムデータ.
- gtool3 フォーマットデータ.

3.6.1 auto_read_file

機能

2 次元, 3 次元変数混在の 4 バイトバイナリファイルからデータを読み出す `read_file` の自動化ルーチン (CReSS 仕様).

書式

```
call auto_read_file( file_name, d2n, d3n, d2val, d3val,
ad2val, ad3val, nx, ny, nz, d2var,
d3var, [specnz], [intvnz], [funit] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|-------------------|-------|-------------------------------------|
| <code>file_name</code> | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| <code>d2n</code> | <I> | in | 読み込む 2 次元変数の数. |
| <code>d3n</code> | <I> | in | 読み込む 3 次元変数の数. |
| <code>d2val</code> | <C(*)> | in | 読み込む 2 次元変数の順番 (後述). |
| <code>d3val</code> | <C(*)> | in | 読み込む 3 次元変数の順番 (後述). |
| <code>ad2val</code> | <C(*)> | in | 読み込む 2 次元変数の順番 (後述). |
| <code>ad3val</code> | <C(*)> | in | 読み込む 3 次元変数の順番 (後述). |
| <code>nx</code> | <I> | in | x 方向の要素数. |
| <code>ny</code> | <I> | in | y 方向の要素数. |
| <code>nz</code> | <I> | in | z 方向の要素数. |
| <code>d2var</code> | <R(nx,ny,d2n)> | inout | 2 次元データ. |
| <code>d3var</code> | <R(nx,ny,nz,d3n)> | inout | 3 次元データ. |
| <code>specnz</code> | <I> | in | z 方向のある 1 層 (後述). |
| <code>intvnz</code> | <I(2)> | in | z 方向のある部分連続層 (後述). |
| <code>funit</code> | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

call `read_file` 参照.

備考

- 4 バイトバイナリデータが 2, 3, 2, 3 次元という順番で 1 ファイルに格納されているようなファイルに用いられる.
- d2val, d3val, ad2val, ad3val はそれぞれ読み込む変数を示すフラグであり, 2, 3, 2, 3 の順番に 4, 3, 4, 5 個の変数が格納されている場合,

```
d2val = '0001', d3val = '000', ad2val = '0000', ad3val =
'10000'
```

となり, この場合, 最初の 2 次元データの 4 番目, 最後の 3 次元データの 1 番目のみ読まれるので, d2n = 1, d3n = 1 で読み込めばよい.

- specnz が設定されている場合, 3 次元データは nz 個の中で, specnz 番目のデータのみが格納される.
- intvnz が設定されている場合, 3 次元データは nz 個の中で, intvnz(1) から intvnz(2) 番目までが格納される.

3.6.2 line_number_counter

機能

テキストカラムデータで格納されているファイルの行数を計算する.

書式

```
result = line_number_counter( file_name, [funit] )
```

引数

| | | | |
|-----------|--------|-------|-------------------------------------|
| file_name | <C(*)> | in | 行数を計算するファイル名. |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |
| 戻り値 | <I> | inout | 行数. |

定義式

特になし.

備考

特になし.

3.6.3 read_file_grads

機能

grads のコントロールファイルから指定の変数を読み込むルーチン.

書式

```
call read_file_grads( fname, val_name, dim_len, intvz, intvt, val, [funit]
)
```

引数

| | | | |
|----------|---------|-------|-------------------------------------|
| fname | <C(*)> | in | 読み出すコントロールファイル名. |
| val_name | <C(*)> | in | 変数名. |
| dim_len | <I(4)> | in | 各次元の要素数 (後述). |
| intvz | <I(2)> | in | 高度方向の読み出す要素数 (後述). |
| intvt | <I(2)> | in | 時間方向の読み出す要素区間 (後述). |
| val | <R(後述)> | inout | 読み出した値が格納される変数. |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし.

備考

- x, y, z, t の座標要素数がこの順番で dim_len(1:4) の順で格納される.
- intvz, intvt は読み出す高度, 時間範囲であり, 全て読み出す場合は intvz(1)=1, intvz(2)=nz, intvt(1)=1, intvt(2)=nt で設定しなければならない.
- 読み出す用の配列は

```
R(dim_len(1),dim_len(2),intvz(1):intvz(2),intvt(1):intvt(2))
```

で引数として与える.

3.6.4 request_axis_grads

機能

grads のコントロールファイルから各空間座標軸の座標値を取得するルーチン.

書式

```
call request_axis_grads( fname, axis_name, x, [y], [stime], [funit] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|---------------------------|--------------------|-------------------------------------|
| <code>fname</code> | <code><C(*)></code> | <code>in</code> | 読み出すコントロールファイル名. |
| <code>axis_name</code> | <code><C(*)></code> | <code>in</code> | 取得する軸の名前 (後述). |
| <code>x</code> | <code><R(:)></code> | <code>inout</code> | 取得する軸の座標値 (後述). |
| <code>y</code> | <code><R(:)></code> | <code>inout</code> | <code>pdef</code> のときの軸の座標値 (後述). |
| <code>stime</code> | <code><C(:)></code> | <code>inout</code> | <code>tdef</code> のときの初期時刻 (後述). |
| <code>funit</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし.

備考

- `x`, `y`, `z` のそれぞれの値を求める場合は `xdef`, `ydef`, `zdef` のそれぞれを `axis_name` に代入すればよい.
- `x(:)` として引数を与えときの配列数は事前に `request_dim_grads` で要素数を取得しておかなければならない.
- GrADS のコントロールファイルにおけるパラメータの中に `pdef` というパラメータがあるため, そのパラメータを読み取るときのオプション. この場合, 東西方向の座標軸データが引数 `x` に入り, 南北座標軸データが引数 `y` に入る.
- GrADS のコントロールファイルにおける初期時刻の文字がそのまま代入される.

3.6.5 request_dim_grads

機能

`grads` のコントロールファイルから変数の空間次元の要素数を取得するルーチン.

書式

```
call request_dim_grads( fname, dim_len, [funit] )
```

引数

| | | | |
|----------------------|---------------------------|--------------------|-------------------------------------|
| <code>fname</code> | <code><C(*)></code> | <code>in</code> | 読み出すコントロールファイル名. |
| <code>dim_len</code> | <code><I(4)></code> | <code>inout</code> | 各次元の要素数 (後述). |
| <code>funit</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし.

備考

- x, y, z, t の座標要素数がこの順番で `dim_len(1:4)` の順で格納される.

3.6.6 request_vardim_grads

機能

grads のコントロールファイルから任意の変数の高度方向の要素数を取得するルーチン.

書式

```
call request_vardim_grads( fname, var_name, nz, [funit] )
```

引数

| | | | |
|-----------------------|---------------------------|--------------------|-------------------------------------|
| <code>fname</code> | <code><C(*)></code> | <code>in</code> | 読み出すコントロールファイル名. |
| <code>var_name</code> | <code><C(*)></code> | <code>in</code> | 高度要素を取得したい変数の名前. |
| <code>nz</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 取得する高度要素数. |
| <code>funit</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし.

備考

特になし.

3.6.7 read_file

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルから 2 次元データを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file( file_name, nx, ny, rec_num, var, [offset], [funit] )
```

引数

| | | | |
|-----------|------------------|-------|-------------------------------------|
| file_name | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| nx | <I> | in | 第一要素配列数. |
| ny | <I> | in | 第二要素配列数. |
| rec_num | <I> | in | nx×ny 分読み出すデータのレコード番号 (後述). |
| var | <AI,R,DP(nx,ny)> | inout | 読み出すデータ. |
| offset | <I> | in | オフセット (後述). |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

```

1      open(unit=11, file=file_name, access='direct', recl=4*nx*ny, status='old')
2          read(11,rec=rec_num) ((var(i,j),i=1,nx),j=1,ny)
3      close(unit=11, status='keep')
```

備考

- offset が指定された場合, その指定された数字 x 4 byte 分, 先頭を読み飛ばす. 例として, offset = 10 の場合, 40 byte 分の先頭が読み飛ばされる. この指定がされた場合, rec_num は無視される.

3.6.8 read_file_3d

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルから 3 次元データを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file_3d( file_name, nx, ny, nz, rec_num, var, [offset], [funit]
)
```

引数

| | | | |
|-----------|---------------------|-------|-------------------------------------|
| file_name | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| nx | <I> | in | 第一要素配列数. |
| ny | <I> | in | 第二要素配列数. |
| nz | <I> | in | 第三要素配列数. |
| rec_num | <I> | in | 読み出しを開始するデータのレコード番号 (後述). |
| var | <AI,R,DP(nx,ny,nz)> | inout | 読み出すデータ. |
| offset | <I> | in | オフセット (後述). |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

```

1      open(unit=11, file=file_name, access='direct', recl=4*nx*ny, status='old')
2          read(11,rec=rec_num) ((var(i,j),i=1,nx),j=1,ny)
3      close(unit=11, status='keep')
```

備考

- `offset` が指定された場合, その指定された数字 x 4 byte 分, 先頭を読み飛ばす. 例として, `offset = 10` の場合, 40 byte 分の先頭が読み飛ばされる. この指定がされた場合, `rec_num` は無視される.

3.6.9 read_file_part

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルから 2 次元データを部分的に読み出すルーチン.

書式

```
call read_file( file_name, nx, ny, nnx, nny, rec_num, var, [funit] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|------------------|-------|-------------------------------------|
| <code>file_name</code> | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| <code>nx</code> | <I> | in | 第一要素配列数. |
| <code>ny</code> | <I> | in | 第二要素配列数. |
| <code>nnx</code> | <I(2)> | in | 第一要素読み出し間隔 (後述). |
| <code>nny</code> | <I(2)> | in | 第二要素読み出し間隔 (後述). |
| <code>rec_num</code> | <I> | in | nx×ny 分読み出すデータのレコード番号 (後述). |
| <code>var</code> | <AI,R,DP(Lx,Ly)> | inout | 読み出すデータ (後述). |
| <code>funit</code> | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

読み出し方法はダイレクトアクセスで 1,2,4,8 バイトずつカウントして読み出す. このとき, アクセスするファイル位置 (1) は以下のような関係式で指定される.

```

l = nx * ny * (rec\_num - 1)
do j = 1, ny
  do i = 1, nx
    l = l + 1
    if (( i >= nnx(1) ).and.( i <= nnx(2) ).and. &
      &      ( j >= nny(1) ).and.( j <= nny(2) ))then
      read ...
    end if
  end do
end do

```

備考

- L_x , L_y はそれぞれ $L_x = \text{nnx}(2) - \text{nnx}(1) + 1$, $L_y = \text{nnny}(2) - \text{nnny}(1) + 1$ で与えられる.

3.6.10 read_file_gtool3

機能

gtool3 形式のデータを読み込むルーチン.

書式

```
call read_file_gtool3( file_name, nx, ny, nz, tstr, tstep, tnum, var,
[funit] )
```

引数

| | | | |
|-----------|--------------------|-------|-------------------------------------|
| file_name | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| nx | <I> | in | 第一要素配列数. |
| ny | <I> | in | 第二要素配列数. |
| nz | <I> | in | 第三要素配列数. |
| tstr | <I> | in | 読み始める時刻 (後述). |
| tstep | <I> | in | 読み飛ばす時間間隔 (後述). |
| tnum | <I> | in | 読み込む時間数 (後述). |
| var | <R(nx,ny,nz,tnum)> | inout | 読み出すデータ. |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし.

備考

- `tstr`, `tstep`, `tnum` の関係は, 1 つのデータファイルに `tmax` 個分の時刻データが格納されている場合,

$$tstr + tstep * (tnum - 1) \leq tmax$$

という関係が満たされればよい. ここで, `tstr = 1` なら, 初期時刻が読み込まれることになる. 実際の計算時刻や出力時間ステップは関係ない.

3.6.11 `read_file_gtool3_header_c`

機能

`gtool3` 形式のヘッダーデータのうち, 文字形式のデータを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file_gtool3_header_c( file_name, header, var, [funit] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|--|-------|-------------------------------------|
| <code>file_name</code> | <code><C(*)></code> | in | 読み出すファイル名. |
| <code>header</code> | <code><C(*)(:)></code> | in | ヘッダーの名前. |
| <code>var</code> | <code><C(16)(size(header))></code> | inout | <code>header</code> に対応するデータ. |
| <code>funit</code> | <code><I></code> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし.

備考

- ヘッダーの名称は,
<http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/taikai/lab/others/Gtool/node111.html>
 と同じ名称で与える. ただし, Fortran の予約語である `unit`, `size` については, `uni`, `siz` と入力すること.

3.6.12 `read_file_gtool3_header_i`

機能

`gtool3` 形式のヘッダーデータのうち, 整数形式のデータを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file_gtool3_header_i( file_name, header, var, [funit] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-------------------|-------|-------------------------------------|
| file_name | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| header | <C(*)(:)> | in | ヘッダーの名前. |
| var | <I(size(header))> | inout | header に対応するデータ. |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし.

備考

- ヘッダーの名称は,
<http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/taikai/lab/others/Gtool/node111.html>
 と同じ名称で与える. ただし, Fortran の予約語である unit, size については, uni, siz と入力すること.

3.6.13 read_file_gtool3_header_r

機能

gtool3 形式のヘッダーデータのうち, 実数形式のデータを読み出すルーチン.

書式

```
call read_file_gtool3_header_r( file_name, header, var, [funit] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-------------------|-------|-------------------------------------|
| file_name | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| header | <C(*)(:)> | in | ヘッダーの名前. |
| var | <R(size(header))> | inout | header に対応するデータ. |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし.

備考

- ヘッダーの名称は,
<http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/taikai/lab/others/Gtool/node111.html>
 と同じ名称で与える. ただし, Fortran の予約語である `unit`, `size` については, `uni`, `siz` と入力すること.

3.6.14 read_file_text

機能

テキストカラム形式のデータを読み込むルーチン.

書式

```
call read_file_text( file_name, nx, ny, var, [skip], [forma], [funit]
)
```

引数

| | | | |
|------------------------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------------|
| <code>file_name</code> | <code><C(*)></code> | <code>in</code> | 読み出すファイル名. |
| <code>nx</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 列数. |
| <code>ny</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 行数. |
| <code>var</code> | <code><C(nx,ny)></code> | <code>inout</code> | 読み出すデータ. |
| <code>skip</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 先頭読み飛ばす行数. |
| <code>forma</code> | <code><C(*)></code> | <code>in</code> | 読み込むフォーマット (後述). |
| <code>funit</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

コンマ, スペース区切りのテキストデータを読み込む. `nx` は 1 行に格納されているデータの列数, `ny` は先頭から読み取る行数. ただし, `skip` が設定されている場合は, `skip` 行だけ読み飛ばして読み始める.

備考

- デフォルトでは, 読み飛ばし変数 `skip` はゼロに設定されている.

3.6.15 read_mgdsst

機能

気象庁 MGDSST データを読み込むためのルーチン. 任意の領域ではなく, 全球のみ対応.

書式

```
call read_mgdsst( fname, var, [funit] )
```

引数

| | | | |
|-------|---------------|-------|-------------------------------------|
| fname | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| var | <R(1440,720)> | inout | sst データ. |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

特になし. (MGDSST データのフォーマットについては,
<http://near-goos1.jodc.go.jp/rdbformat/JMA/mgdsst.txt>
 参照.)

備考

- 要素番号の小さいものが地球の南西端 (経度 0°, 緯度 -89.875°) に入り, 配列第一要素は東向き, 第二要素は北向きに格子データが格納されて出力される.
- 未定義値は 999.0, 海水データは 888.0 という値で格納される.

3.6.16 write_file

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルに 2 次元データを書き出すルーチン.

書式

```
call write_file( file_name, nx, ny, rec_num, var, [mode], [funit] )
```

引数

| | | | |
|-----------|------------------|-------|-------------------------------------|
| file_name | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| nx | <I> | in | 第一要素配列数. |
| ny | <I> | in | 第二要素配列数. |
| rec_num | <I> | in | nx×ny 分読み出すデータのレコード番号. |
| var | <AI,R,DP(nx,ny)> | inout | 読み出すデータ. |
| mode | <C(*)> | in | ファイルの書き出しオプション (後述). |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

```

1      open(unit=11, file=file_name, access='direct', recl=4*nx*ny, status=mode)
2          write(11,rec=rec_num) ((var(i,j),i=1,nx),j=1,ny)
3      close(unit=11, status='keep')
```

備考

- mode は Fortran の書き出し status= に設定される値を代入.

3.6.17 write_file_3d

機能

ダイレクトアクセス形式のバイナリファイルに 3 次元データを書き出すルーチン.

書式

```
call write_file_3d( file_name, nx, ny, nz, rec_num, var, [mode], [funit]
)
```

引数

| | | | |
|-----------|---------------------|-------|-------------------------------------|
| file_name | <C(*)> | in | 読み出すファイル名. |
| nx | <I> | in | 第一要素配列数. |
| ny | <I> | in | 第二要素配列数. |
| nz | <I> | in | 第三要素配列数. |
| rec_num | <I> | in | 読み出しを開始するデータのレコード番号. |
| var | <AI,R,DP(nx,ny,nz)> | inout | 読み出すデータ. |
| mode | <C(*)> | in | ファイルの書き出しオプション. |
| funit | <I> | in | Fortran のファイル出力番号. (デフォルト = 11). |

定義式

```

1      open(unit=11, file=file_name, access='direct', recl=4*nx*ny, status=mode)
2          write(11,rec=rec_num) ((var(i,j),i=1,nx),j=1,ny)
3      close(unit=11, status='keep')
```

備考

- mode は Fortran の書き出し status= に設定される値を代入.

3.7 Geometry

座標変換に関する関数・サブルーチン集.

3.7.1 rt_2_xy

機能

平面極座標からデカルト座標への変換を行うルーチン.

書式

```
call rt_2_xy( r, t, x, y )
```

引数

| | | | |
|---|--------|-------|-----------------|
| r | <R,DP> | in | 点 1 の距離 [m]. |
| t | <R,DP> | in | 点 1 の同位角 [rad]. |
| x | <R,DP> | inout | 点 1 の x 座標 [m]. |
| y | <R,DP> | inout | 点 1 の y 座標 [m]. |

定義式

ある 1 点が平面極座標において (r, t) と表現できるとき, 平面極座標の原点と同じ位置に原点をもつデカルト座標において, この点は (x, y) と表現できる. このときの極座標とデカルト座標の関係は

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

で与えられる.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\mathbf{r}, \mathbf{t} = r, t, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} = x, y.$$

備考

特になし.

3.7.2 xy_2_rt

機能

デカルト座標から平面極座標への変換を行うルーチン.

書式

```
call xy_2_rt( x, y, xc, yc, r, t )
```

引数

| | | | |
|----|--------|-------|---------------------|
| x | <R,DP> | in | 点 1 の x 座標 [m]. |
| y | <R,DP> | in | 点 1 の y 座標 [m]. |
| xc | <R,DP> | in | 平面極座標系の原点 x 座標 [m]. |
| yc | <R,DP> | in | 平面極座標系の原点 y 座標 [m]. |
| r | <R,DP> | inout | 点 1 の距離 [m]. |
| t | <R,DP> | inout | 点 1 の同位角 [rad]. |

定義式

ある 1 点がデカルト極座標において (x, y) と表現できるとき, 平面極座標の原点がデカルト座標 (x_c, y_c) に存在する場合, この点は (r, t) と表現できる. このときの極座標とデカルト座標の関係は

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}, \quad t = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

で与えられる.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\mathbf{r}, \mathbf{t} = r, t, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} = x, y.$$

備考

特になし.

3.8 Map_Function

地図投影に関する関数・サブルーチン集.

3.8.1 lat2mery

機能

地球球面上のある緯度, 経度を原点としたメルカトル投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき, 与えられた緯度が投影される投影座標 y を求める.

書式

```
result=lat2mery( phi, phi0 )
```

引数

| | | | |
|------|--------|-----|------------------------|
| phi | <R,DP> | in | メルカトル投影される緯度 [rad]. |
| phi0 | <R,DP> | in | メルカトル投影の基準緯度 [rad]. |
| 戻り値 | <R,DP> | out | 経度 phi が投影された座標 y [m]. |

定義式

球面上における緯度 ϕ をある緯度 (ϕ_0) を原点としたメルカトル投影座標 (x, y) に投影したとき, その y 座標は

$$y = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}$$

ここで, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.
これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$y = y, \text{ phi0} = \phi_0, \text{ lat2mery} = \phi.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.2 ll2lamdis

機能

球面上のある 2 点間のランベルト投影座標での距離をそれぞれの点の緯度, 経度から計算する.

書式

```
result=ll2lamdis( lambda1, phi1, lambda2, phi2, lambda0, &
phi0, phit1, phit2, [nopt], [uopt], [ropt]
```

引数

| | | | |
|---------|-------------|----|--------------------------|
| lambda1 | <R,DP> | in | 点 1 の経度 [rad]. |
| phi1 | <R,DP> | in | 点 1 の緯度 [rad]. |
| lambda2 | <R,DP> | in | 点 2 の経度 [rad]. |
| phi2 | <R,DP> | in | 点 2 の緯度 [rad]. |
| lambda0 | <R,DP> | in | 投影座標原点経度 [rad]. |
| phi0 | <R,DP> | in | 投影座標原点緯度 [rad]. |
| phit1 | <R,DP> | in | ランベルト投影基準緯度 1 [rad]. |
| phit2 | <R,DP> | in | ランベルト投影基準緯度 2 [rad]. |
| nopt | <R,DP> | in | Lambert_coe の ncoe. |
| uopt | <R,DP(0:2)> | in | Lambert_coe の uphi(0:2). |
| ropt | <R,DP> | in | Lambert_coe の rhophi0. |
| 戻り値 | <R,DP> | in | 2 点間の距離 [m]. |

定義式

球面上の 2 点 (ϕ_1, λ_1) , (ϕ_2, λ_2) が, ある緯度経度 (ϕ_0, λ_0) を原点としたランベルト投影座標 (x, y) に投影されたとする. このときの, 投影先の座標をそれぞれ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) とすると,

$$\begin{aligned} x_1 &= a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_1)} \right]^n \sin [n(\lambda_1 - \lambda_0)] \\ y_1 &= w'_0 - a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_1)} \right]^n \cos [n(\lambda_1 - \lambda_0)] \\ x_2 &= a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_2)} \right]^n \sin [n(\lambda_2 - \lambda_0)] \\ y_2 &= w'_0 - a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_2)} \right]^n \cos [n(\lambda_2 - \lambda_0)] \\ U(\phi) &\equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\ n &\equiv \ln \left[\frac{\cos \Phi_1}{\cos \Phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \\ w'_0 &\equiv w'(\lambda = \lambda_0, \phi = \phi_0) = a \frac{\cos \Phi_1}{n} \left[\frac{U(\Phi_1)}{U(\phi_0)} \right]^n \end{aligned}$$

が得られるので, これよりこの 2 点間の距離 L は

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

で与えられる. a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\begin{aligned} \text{phi1, lambda1} &= \phi_1, \lambda_1, & \text{phi2, lambda2} &= \phi_2, \lambda_2, & \text{phi0, phit1, phit2, lambda0} &= \phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \lambda_0, \\ \text{nopt} &= n, & \text{uopt}(0:2) &= U(\phi_0), U(\Phi_1), U(\Phi_2), & \text{rhophi0} &= w'_0. \end{aligned}$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.3 ll2lamxy

機能

球面上のある緯度, 経度を原点としたランベルト投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき, 球面上の任意の緯度経度が投影される x, y 座標を求める.

書式

```
call ll2lamxy( lambda, phi, x, y, lambda0, phi0, phi1, phi2, &
               [nopt], [uopt], [ropt] )
```

引数

| | | | |
|---------|-------------|-------|--------------------------------|
| lambda | <R,DP> | in | 座標 (x, y) に投影される経度 [rad]. |
| phi | <R,DP> | in | 座標 (x, y) に投影される緯度 [rad]. |
| x | <R,DP> | inout | ランベルト投影座標での x 座標 [m]. |
| y | <R,DP> | inout | ランベルト投影座標での y 座標 [m]. |
| lambda0 | <R,DP> | in | 座標 (x, y) の原点に投影される経度 [rad]. |
| phi0 | <R,DP> | in | 座標 (x, y) の原点に投影される緯度 [rad]. |
| phi1 | <R,DP> | in | ランベルト投影基準緯度 1 [rad]. |
| phi2 | <R,DP> | in | ランベルト投影基準緯度 2 [rad]. |
| nopt | <R,DP> | in | Lambert_coe の ncoe. |
| uopt | <R,DP(0:2)> | in | Lambert_coe の uphi(0:2). |
| ropt | <R,DP> | in | Lambert_coe の rhophi0. |

定義式

ある緯度経度 (ϕ_0, λ_0) を原点としたランベルト投影座標 (x, y) の x, y 座標は球面上における経度 ϕ, λ が一意に投影される. このときの球面上の緯度経度 ϕ, λ と投影座標 x, y には以下の関係がある:

$$\begin{aligned}
 x &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\
 y &= w'_0 - a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\
 U(\phi) &\equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\
 n &\equiv \ln \left[\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \\
 w'_0 &\equiv w'(\lambda = \lambda_0, \phi = \phi_0) = a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi_0)} \right]^n
 \end{aligned}$$

である. ここで, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, $-\pi/2 < \phi < \phi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{phi, lambda} = \phi, \lambda, \quad \text{x, y} = x, y, \quad \text{phi0, phi1, phi2, lambda0} = \phi_0, \phi_1, \phi_2, \lambda_0,$$

$$\text{nopt} = n, \quad \text{uopt}(0:2) = U(\phi_0), U(\phi_1), U(\phi_2), \quad \text{rhophi0} = w'_0.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.4 ll2merdis

機能

地球球面上のある 2 点間のメルカトル投影座標での距離をそれぞれの点の緯度, 経度から計算する.

書式

```
result=ll2merdis( lambda1, phi1, lambda2, phi2, lambda0, phi0 )
```

引数

| | | | |
|---------|--------|----|-----------------|
| lambda1 | <R,DP> | in | 点 1 の経度 [rad]. |
| phi1 | <R,DP> | in | 点 1 の緯度 [rad]. |
| lambda2 | <R,DP> | in | 点 2 の経度 [rad]. |
| phi2 | <R,DP> | in | 点 2 の緯度 [rad]. |
| lambda0 | <R,DP> | in | 投影座標原点経度 [rad]. |
| phi0 | <R,DP> | in | 投影座標原点緯度 [rad]. |
| 戻り値 | <R,DP> | in | 2 点間の距離 [m]. |

定義式

ある 2 点の緯度, 経度がそれぞれ (ϕ_1, λ_1) , (ϕ_2, λ_2) で与えられているとき, その間のメルカトル投影座標上での座標 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) はそれぞれ

$$x_1 = a(\lambda_1 - \lambda_0), \quad x_2 = a(\lambda_2 - \lambda_0),$$

$$y_1 = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right| \middle/ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\},$$

$$y_2 = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) \right| \middle/ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}$$

で与えられる. a は地球の半径である. したがって, これら 2 点間の距離 L は

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{phi1, lambda1} = \phi_1, \lambda_1, \quad \text{phi2, lambda2} = \phi_2, \lambda_2, \quad \text{phi0, lambda0} = \phi_0, \lambda_0.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.5 ll2radi

機能

地球球面上のある 2 点間の球面上での距離をそれぞれの点の緯度, 経度から計算する.

書式

```
result=ll2radi( lon1, lat1, lon2, lat2 )
```

引数

lon0 <R,DP> in 点 1 の経度 [rad].
 lat0 <R,DP> in 点 1 の緯度 [rad].
 lon0 <R,DP> in 点 2 の経度 [rad].
 lat0 <R,DP> in 点 2 の緯度 [rad].
 戻り値 <R,DP> in 2 点間の距離 [m].

定義式

ある 2 点の緯度, 経度がそれぞれ (ϕ_1, λ_1) , (ϕ_2, λ_2) で与えられているとき, その間の球面上の距離 L は

$$L = R \arccos [\sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)]$$

で与えられる. R は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{lat1, lon1} = \phi_1, \lambda_1, \quad \text{lat2, lon2} = \phi_2, \lambda_2.$$

備考

- 定義式の証明は [5.3.1](#) 参照.

3.8.6 ll2rt

機能

地球球面上のある緯度, 経度を原点とした極座標系を考えたとき, そこから離れた任意の別の点の緯度経度を極座標系の平面に投影させる (正距方位図法の変換).

書式

```
call ll2rt( lon0, lat0, lon1, lat1, r, theta )
```

引数

| | | | |
|-------|--------|-------|---------------------|
| lon0 | <R,DP> | in | 極座標系原点での経度 [rad]. |
| lat0 | <R,DP> | in | 極座標系原点での緯度 [rad]. |
| lon | <R,DP> | in | 極座標系点での経度 [rad]. |
| lat | <R,DP> | in | 極座標系点での緯度 [rad]. |
| r | <R,DP> | inout | 極座標系の動径方向距離 [m]. |
| theta | <R,DP> | inout | 極座標系の同位角方向角度 [rad]. |

定義式

ある緯度, 経度 (ϕ_0, λ_0) を原点とした極座標系 (r, θ) を考える. このとき, 緯度, 経度 (ϕ_1, λ_1) に対応する極座標上の点 (r, θ) は

$$r = R \arccos [\sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)],$$

$$\theta = \arctan \left[\frac{\sin \phi_1 \cos \phi_0 - \cos \phi_1 \sin \phi_0 \cos \lambda_1 - \lambda_0}{\cos \phi_1 \sin (\lambda_1 - \lambda_0)} \right]$$

である. ここで, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲をとる. また, R は地球の半径である. これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$r, \theta = r, \theta, \quad \text{lat0, lon0} = \phi_0, \lambda_0, \quad \text{lat1, lon1} = \phi_1, \lambda_1.$$

備考

- 定義式の証明は 5.3.1 参照.
- 定義される極座標系は動径方向について直線ではなく, 球面上の円弧の距離として定義される. また, 同位角方向については, 原点を球の接平面とした平面上に投影したときの角度で定義され, 極座標の原点を通る, 球の子午面上の点が $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ となるように定義されている. いわゆる, 正距方位図法による平面への投影を行っている.

3.8.7 lon2merx

機能

地球球面上のある緯度, 経度を原点としたメルカトル投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき, 与えられた経度が投影される投影座標 x を求める.

書式

```
result=lon2merx( lam, lam0 )
```

引数

| | | | |
|------|--------|-----|--------------------------|
| lam | <R,DP> | in | メルカトル投影される経度 [rad]. |
| lam0 | <R,DP> | in | メルカトル投影の基準経度 [rad]. |
| 戻り値 | <R,DP> | out | 経度 lam が投影された座標 x [m]. |

定義式

球面上における経度 λ をある経度 (λ_0) を原点としたメルカトル投影座標 (x, y) に投影したとき, その x 座標は

$$x = a(\lambda - \lambda_0).$$

ここで, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$x = x, \quad \text{lam0} = \lambda_0, \quad \text{lon2merx} = \lambda.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.8 rt2ll**機能**

地球球面上のある緯度, 経度を原点とした極座標系を考えたとき, その極座標系で表される点の緯度と経度を計算する.

書式

```
call rt2ll( r, theta, lon0, lat0, lon, lat )
```

引数

| | | | |
|-------|--------|-------|---------------------|
| r | <R,DP> | in | 極座標系の動径方向距離 [m]. |
| theta | <R,DP> | in | 極座標系の同位角方向角度 [rad]. |
| lon0 | <R,DP> | in | 極座標系原点での経度 [rad]. |
| lat0 | <R,DP> | in | 極座標系原点での緯度 [rad]. |
| lon | <R,DP> | inout | 極座標系点での経度 [rad]. |
| lat | <R,DP> | inout | 極座標系点での緯度 [rad]. |

定義式

ある緯度, 経度 (ϕ_0, λ_0) を原点とした極座標系 (r, θ) を考える. このとき, 極座標上の点 (r_0, θ_0) に対応する緯度, 経度 (ϕ_x, λ_x) は

$$\phi_x = \arcsin \left[\sin \phi_0 \cos \frac{r_0}{R} + \cos \phi_0 \sin \frac{r_0}{R} \sin \theta_0 \right], \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_x = \lambda_0 \pm \arcsin \left[\pm \frac{\cos \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0 \right]$$

である. ここで, 2 つ目の式は $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta_0 \leq 2\pi$ のとき正号, それ以外では負号となる. また, R は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\mathbf{r}, \mathbf{theta} = r_0, \theta_0, \quad \mathbf{lat0}, \mathbf{lon0} = \phi_0, \lambda_0, \quad \mathbf{lat}, \mathbf{lon} = \phi_x, \lambda_x.$$

備考

- 定義式の証明は 5.3.1 参照.
- 定義される極座標系は動径方向について直線ではなく, 球面上の円弧の距離として定義される. また, 同位角方向については, 原点を球の接平面とした平面上に投影したときの角度で定義され, 極座標の原点を通る, 球の子午面上の点が $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ となるように定義されている. いわゆる正距方位図法による平面への投影を行っている.

3.8.9 vec2lam

機能

球面上での緯度経度座標で定義された任意の水平ベクトル 2 成分をランベルト投影座標 (x, y) 上での水平ベクトル 2 成分に正変換あるいは逆変換する.

書式

```
call vec2lam( lambda0, phi1, phi2, lambda, phi, &
  ui, vi, uo, vo, conv_flag, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-----------|---------------------------------|-------|--------------------------------|
| lambda0 | <R,DP> | in | 座標 (x, y) の原点に投影される経度 [rad]. |
| phi1 | <R,DP> | in | ランベルト投影基準緯度 1 [rad]. |
| phi2 | <R,DP> | in | ランベルト投影基準緯度 2 [rad]. |
| phi | <R,DP(:, :)> | in | ベクトルが定義されている緯度 [rad]. |
| lambda | <R,DP(size(phi,1),size(phi,2))> | in | ベクトルが定義されている経度 [rad]. |
| ui | <R,DP(size(phi,1),size(phi,2))> | in | ベクトルの変換前の東西あるいは投影座標 x 方向成分. |
| vi | <R,DP(size(phi,1),size(phi,2))> | in | ベクトルの変換前の南北あるいは投影座標 y 方向成分. |
| uo | <R,DP(size(phi,1),size(phi,2))> | inout | ベクトルの変換後の東西あるいは投影座標 x 方向成分. |
| vo | <R,DP(size(phi,1),size(phi,2))> | inout | ベクトルの変換後の南北あるいは投影座標 y 方向成分. |
| conv_flag | <C(5)> | in | 変換の方向 (後述). |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |

定義式

ある緯度, 経度がそれぞれ (ϕ, λ) で与えられているとき, その点において水平ベクトルが定義されているとする. このベクトルの緯度経度方向のベクトル成分 (v_ϕ, u_λ) とランベルト投影座標上 (x, y) での同じベクトルの (x, y) 成分 (u_L, v_L) は

$$\begin{aligned}
 u_L &= u_\lambda \cos[n(\lambda - \lambda_0)] - v_\phi \sin[n(\lambda - \lambda_0)] \\
 v_L &= u_\lambda \sin[n(\lambda - \lambda_0)] + v_\phi \cos[n(\lambda - \lambda_0)] \\
 u_\lambda &= u_L \cos[n(\lambda - \lambda_0)] + v_L \sin[n(\lambda - \lambda_0)] \\
 v_\phi &= -u_L \sin[n(\lambda - \lambda_0)] + v_L \cos[n(\lambda - \lambda_0)]
 \end{aligned}$$

である. ここで, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{phi} = \phi, \quad \text{ui}, \text{vi} = u, v \ (u_\lambda, v_\phi), \quad \text{uo}, \text{vo} = u_\lambda, v_\phi \ (u, v).$$

$$\text{phi1}, \text{phi2}, \text{lambda0} = \phi_1, \phi_2, \lambda_0.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.
- 引数 `conv_flag` は変換の方向を表し, '112xy' と指定されると, 球面で定義されたベクトル成分を投影面で定義されたベクトル成分に変換する. 'xy211' と指定されると, 投影面で定義されたベクトル成分を球面で定義されたベクトル成分に変換する.

- 本ルーチンは全て緯度経度を独立変数として変換処理を行う。つまり、投影面上で定義されている場合でも、その座標は緯度経度で表現されなければならないということである。もし、投影面上でデカルト座標で表現されている場合は、`xy2lamll` を用いて、緯度経度に変換しておく必要がある。
- 本ルーチンの処理前後でベクトルの絶対値は不変である。また、ベクトルの単位は任意である。

3.8.10 x2merlon

機能

地球球面上のある緯度、経度を原点としたメルカトル投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき、与えられた x 座標に投影される経度を求める。

書式

```
result=x2merlon( x, lam0 )
```

引数

| | | | |
|-------------------|--------|-----|-------------------------|
| <code>x</code> | <R,DP> | in | メルカトル投影座標での x 座標 [m]. |
| <code>lam0</code> | <R,DP> | in | メルカトル投影の基準経度 [rad]. |
| 戻り値 | <R,DP> | out | 座標 x に投影される経度 [rad]. |

定義式

ある経度 (λ_0) を原点としたメルカトル投影座標 (x, y) の x 座標は球面上における経度 λ が一意に投影される。このときの投影座標 x と球面上の経度 λ には以下の関係がある:

$$\lambda = \frac{x}{a} + \lambda_0.$$

ここで、 $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ の範囲をとる。また、 a は地球の半径である。

これらの式について、実際の引数は以下のような対応関係となる。

$$x = x, \quad \text{lam0} = \lambda_0, \quad \text{x2merlon} = \lambda.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.11 xy2lamll

機能

球面上のある緯度、経度を原点としたランベルト投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を

考えたとき, 与えられた x, y 座標に投影される経度, 緯度を求める.

書式

```
call xy2lamll( x, y, lambda, phi, lambda0, phi0, phi1, phi2, &
               [nopt], [uopt], [ropt] )
```

引数

| | | | |
|---------|-------------|-------|--------------------------------|
| x | <R,DP> | in | ランベルト投影座標での x 座標 [m]. |
| y | <R,DP> | in | ランベルト投影座標での y 座標 [m]. |
| lambda | <R,DP> | inout | 座標 (x, y) に投影される経度 [rad]. |
| phi | <R,DP> | inout | 座標 (x, y) に投影される緯度 [rad]. |
| lambda0 | <R,DP> | in | 座標 (x, y) の原点に投影される経度 [rad]. |
| phi0 | <R,DP> | in | 座標 (x, y) の原点に投影される緯度 [rad]. |
| phi1 | <R,DP> | in | ランベルト投影基準緯度 1 [rad]. |
| phi2 | <R,DP> | in | ランベルト投影基準緯度 2 [rad]. |
| nopt | <R,DP> | in | Lambert_coe の ncoe. |
| uopt | <R,DP(0:2)> | in | Lambert_coe の uphi(0:2). |
| ropt | <R,DP> | in | Lambert_coe の rhophi0. |

定義式

ある緯度経度 (ϕ_0, λ_0) を原点としたランベルト投影座標 (x, y) の x, y 座標は球面上における経度 ϕ, λ が一意に投影される. このときの投影座標 x, y と球面上の緯度経度 ϕ, λ には以下の関係がある:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \frac{1}{n} \arctan \left(\frac{-x'}{y' - w'_0} \right) \\ \phi &= 2 \arctan \left\{ \left[\frac{a \cos \phi_1}{n \sqrt{x'^2 + (y' - w'_0)^2}} \right]^{1/n} U(\phi_1) \right\} - \frac{\pi}{2} \\ U(\phi) &\equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\ n &\equiv \ln \left[\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \\ w'_0 &\equiv w'(\lambda = \lambda_0, \phi = \phi_0) = a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi_0)} \right]^n\end{aligned}$$

である. ここで, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, $-\pi/2 < \phi < \phi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である.

これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$\text{phi, lambda} = \phi, \lambda, \quad \text{x, y} = x, y, \quad \text{phi0, phi1, phi2, lambda0} = \phi_0, \phi_1, \phi_2, \lambda_0,$$

$$\text{nopt} = n, \quad \text{uopt}(0:2) = U(\phi_0), U(\phi_1), U(\phi_2), \quad \text{rhophi0} = w'_0.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.8.12 y2merlat

機能

地球球面上のある緯度, 経度を原点としたメルカトル投影座標 (デカルト座標; (x, y)) を考えたとき, 与えられた y 座標に投影される経度を求める.

書式

```
result=y2merlat( y, phi0 )
```

引数

| | | | |
|------|--------|-----|-------------------------|
| y | <R,DP> | in | メルカトル投影座標での y 座標 [m]. |
| phi0 | <R,DP> | in | メルカトル投影の基準緯度 [rad]. |
| 戻り値 | <R,DP> | out | 座標 x に投影される経度 [rad]. |

定義式

ある緯度 (ϕ_0) を原点としたメルカトル投影座標 (x, y) の y 座標は球面上における経度 ϕ が一意に投影される. このときの投影座標 y と球面上の緯度 ϕ には以下の関係がある:

$$\phi = 2 \arctan \left\{ \left[\exp \left(\frac{y}{a} \right) \right] \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\} - \frac{\pi}{2}.$$

ここで, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ の範囲をとる. また, a は地球の半径である. これらの式について, 実際の引数は以下のような対応関係となる.

$$y = y, \text{ phi0} = \phi_0, \text{ y2merlat} = \phi.$$

備考

- 定義式の証明は??参照.

3.9 math_const

数学的普遍定数集. 現在は以下の表のように与えられている.

以下は `parameter` 属性のついていない準定数である.

| 変数名 | 型 | 設定値 | 変数の意味 |
|---------|-------|------------|-------|
| pi | <R> | 3.14159265 | 円周率 |
| img | <CP> | (0.0,1.0) | 虚数単位 |
| pi_dp | <DP> | 3.14159265 | 円周率 |
| img_cdp | <CDP> | (0.0,1.0) | 虚数単位 |

3.9.1 rotate_array

機能

データ数 2,3,5,7 の回転行列を計算する。

書式

```
call rotate_array( )
```

引数

なし. math_const において設定されている準定数 omega2, omega3, omega5, omega7 が更新される.

定義式

3.5.6 の定義式において, $N = 2, 3, 5, 7$ で計算している.

備考

特になし.

3.10 matrix_calc

単純な行列演算, 連立代数方程式の求解, 固有値・固有ベクトル計算用のルーチン集. 各ルーチンの詳細な計算方法については, ?? 参照.

3.10.1 Gau_Se

機能

ガウスザイデル法による連立 1 次方程式の求解を行うルーチン.

書式

```
call Gau_Se( a, b, eps, x )
```

引数

| 変数名 | 型 | 属性 | 変数の意味 |
|-------------|----------------|------|-----------------------------|
| romega2 | <CP(0:1,0:1)> | save | データ 2 の FFT 用回転行列 (正変換用) |
| romega3 | <CP(0:2,0:2)> | save | データ 3 の FFT 用回転行列 (正変換用) |
| romega5 | <CP(0:4,0:4)> | save | データ 5 の FFT 用回転行列 (正変換用) |
| romega7 | <CP(0:6,0:6)> | save | データ 7 の FFT 用回転行列 (正変換用) |
| iomega2 | <CP(0:1,0:1)> | save | データ 2 の FFT 用回転行列 (逆変換用) |
| iomega3 | <CP(0:2,0:2)> | save | データ 3 の FFT 用回転行列 (逆変換用) |
| iomega5 | <CP(0:4,0:4)> | save | データ 5 の FFT 用回転行列 (逆変換用) |
| iomega7 | <CP(0:6,0:6)> | save | データ 7 の FFT 用回転行列 (逆変換用) |
| romega2_cdp | <CDP(0:1,0:1)> | save | データ 2 の FFT 用回転行列 (正変換用) |
| romega3_cdp | <CDP(0:2,0:2)> | save | データ 3 の FFT 用回転行列 (正変換用) |
| romega5_cdp | <CDP(0:4,0:4)> | save | データ 5 の FFT 用回転行列 (正変換用) |
| romega7_cdp | <CDP(0:6,0:6)> | save | データ 7 の FFT 用回転行列 (正変換用) |
| iomega2_cdp | <CDP(0:1,0:1)> | save | データ 2 の FFT 用回転行列 (逆変換用) |
| iomega3_cdp | <CDP(0:2,0:2)> | save | データ 3 の FFT 用回転行列 (逆変換用) |
| iomega5_cdp | <CDP(0:4,0:4)> | save | データ 5 の FFT 用回転行列 (逆変換用) |
| iomega7_cdp | <CDP(0:6,0:6)> | save | データ 7 の FFT 用回転行列 (逆変換用) |

| | | | |
|-----|----------------------|-------|----------------|
| b | <R(:)> | inout | ベクトルの成分 (後述). |
| a | <R(size(b),size(b))> | inout | 行列 (後述). |
| eps | <R> | in | 収束条件値 (後述). |
| x | <R(size(b))> | inout | 求めたいベクトル (後述). |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad x_j : \mathbf{x}(\mathbf{j}), \quad b_i : \mathbf{b}(\mathbf{i})$$

である. ガウスザイデル法による計算方法の詳細は??参照.

備考

- 引数 `eps` は各配列の反復前後の相対誤差を表し, この値の最大値が `eps` 以下になったときに反復計算を終了する.

3.10.2 Jacobi_algebra

機能

ヤコビ法による連立 1 次方程式の求解を行うルーチン.

書式

```
call Jacobi_algebra( a, b, eps, x )
```

引数

| | | | |
|------------------|---|--------------------|----------------|
| <code>b</code> | <code><R(:)></code> | <code>inout</code> | ベクトルの成分 (後述). |
| <code>a</code> | <code><R(size(b),size(b))></code> | <code>inout</code> | 行列 (後述). |
| <code>eps</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | 収束条件値 (後述). |
| <code>x</code> | <code><R(size(b))></code> | <code>inout</code> | 求めたいベクトル (後述). |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad x_j : \mathbf{x}(\mathbf{j}), \quad b_i : \mathbf{b}(\mathbf{i})$$

である. ヤコビ法による計算方法の詳細は??参照.

備考

- 引数 `eps` は各配列の反復前後の相対誤差を表し, この値の最大値が `eps` 以下になったときに反復計算を終了する.

3.10.3 Jacobi_eigen

機能

ヤコビ法を用いて任意の実対称行列の全固有値を求めるルーチン.

書式

```
call Jacobi_eigen( a, lambda, [eps] )
```

引数

| | | | |
|--------|----------------|-------|-----------------|
| a | <R(:, :)> | in | 固有値を求める行列 (後述). |
| lambda | <R(size(a,1))> | inout | 固有値 (後述). |
| eps | <R> | in | 反復の収束判条件 (後述). |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル x_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

という関係を満たす未知数 λ を求める. ここで, λ の値は行列の次元数個ある. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : a(i, j), \quad \lambda : \text{lambda}(k)$$

である. k 番目の固有値をここでは $\text{lambda}(k)$ とした. ヤコビ法による計算方法の詳細は??を参照.

備考

- `eps` は反復計算の収束判定条件であり, 1 回の反復計算前後での絶対誤差の最大値が `eps` 以下になったときに計算を終了する.

3.10.4 LU_devs

機能

部分ピボティングつき LU 分解を行うルーチン.

書式

```
call LU_devs( a, b, x, itermax )
```

引数

| | | | |
|---------|----------------------|-------|----------------|
| b | <R(:)> | inout | ベクトルの成分 (後述). |
| a | <R(size(b),size(b))> | inout | 行列 (後述). |
| x | <R(size(b))> | inout | 求めたいベクトル (後述). |
| itermax | <I> | in | 反復改良の回数. |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad x_j : \mathbf{x}(\mathbf{j}), \quad b_i : \mathbf{b}(\mathbf{i})$$

である. 詳細な計算は??参照.

備考

特になし.

3.10.5 SOR_Gau_Se

機能

SOR を用いてガウスザイデル法による連立 1 次方程式の求解を行うルーチン.

書式

```
call SOR_Gau_Se( a, b, eps, accel, x )
```

引数

| | | | |
|-------|----------------------|-------|-----------------|
| b | <R(:)> | inout | ベクトルの成分 (後述). |
| a | <R(size(b),size(b))> | inout | 行列 (後述). |
| eps | <R> | in | 収束条件値 (後述). |
| accel | <R> | in | SOR の加速係数 (後述). |
| x | <R(size(b))> | inout | 求めたいベクトル (後述). |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad x_j : \mathbf{x}(\mathbf{j}), \quad b_i : \mathbf{b}(\mathbf{i})$$

である. SOR つきガウスザイデル法による計算方法の詳細は??参照.

備考

- 引数 `eps` は各配列の反復前後の相対誤差を表し、この値の最大値が `eps` 以下になったときに反復計算を終了する。
- 数学上、加速係数は 2 未満にしなければ安定計算ができない。本ルーチンでは、2 以上の値が設定された場合、エラーとなるようにしている。

3.10.6 SOR_Jacobi_algebra

機能

SOR を用いてヤコビ法による連立 1 次方程式の求解を行うルーチン。

書式

```
call SOR_Jacobi_algebra( a, b, eps, accel, x )
```

引数

| | | | |
|--------------------|---|--------------------|-----------------|
| <code>b</code> | <code><R(:)></code> | <code>inout</code> | ベクトルの成分 (後述)。 |
| <code>a</code> | <code><R(size(b),size(b))></code> | <code>inout</code> | 行列 (後述)。 |
| <code>eps</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | 収束条件値 (後述)。 |
| <code>accel</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | SOR の加速係数 (後述)。 |
| <code>x</code> | <code><R(size(b))></code> | <code>inout</code> | 求めたいベクトル (後述)。 |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める。このとき、引数との対応関係は

$$a_{ij} : a(i,j), \quad x_j : x(j), \quad b_i : b(i)$$

である。SOR つきヤコビ法による計算方法の詳細は??参照。

備考

- 引数 `eps` は各配列の反復前後の相対誤差を表し、この値の最大値が `eps` 以下になったときに反復計算を終了する。
- 数学上、加速係数は 2 未満にしなければ安定計算ができない。本ルーチンでは、2 以上の値が設定された場合、エラーとなるようにしている。

3.10.7 determ_2d

機能

2 次行列の行列式を返す.

書式

```
result = determ_2d( a )
```

引数

a <I,R(2,2)> in 計算する行列.

定義式

2 次元行列 A の行列式 $|A|$ は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

である.

備考

特になし.

3.10.8 eigenvalue_power

機能

べき乗法を用いて行列の最大固有値とその固有値に対応する固有ベクトルを求めるルーチン.

書式

```
call eigenvalue_power( a, eps, lambda, lv )
```

引数

| | | | |
|--------|------------------------|-------|-----------------|
| lv | <R(:)> | inout | 固有ベクトル (後述). |
| a | <R(size(lv),size(lv))> | inout | 固有値を求める行列 (後述). |
| eps | <R> | in | 反復の収束判条件 (後述). |
| lambda | <R> | inout | 固有値 (後述). |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル x_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

という関係を満たす未知数 λ を求める. ここで, λ の値は (縮退している場合を除いて,) 行列の次元数個あるので, そのうちの絶対値が最大となる固有値に対応する. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : a(i,j), \quad \lambda : \text{lambda}, \quad x_i : \text{lv}(i)$$

である. ベキ乗法による計算方法の詳細は??を参照.

備考

特になし.

3.10.9 gauss

機能

部分ピボッティングつきガウスの消去法を行うルーチン.

書式

```
call gauss( a, b, x )
```

引数

| | | | |
|---|-------------------------|-------|-----------|
| b | <R,DP(:)> | inout | ベクトルの成分. |
| a | <R,DP(size(b),size(b))> | inout | 行列. |
| x | <R,DP(size(b))> | inout | 求めたいベクトル. |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : a(i,j), \quad x_j : x(j), \quad b_i : b(i)$$

である. ガウスの消去法の詳細な計算方法は?? 参照.

備考

特になし.

3.10.10 tri_gauss

機能

三重対角行列版ガウスの消去法ルーチン.

書式

```
call tri_gauss( a, b, x )
```

引数

| | | | |
|---|-------------------------|-------|-----------|
| b | <R,DP(:)> | inout | ベクトルの成分. |
| a | <R,DP(size(b),size(b))> | inout | 行列. |
| x | <R,DP(size(b))> | inout | 求めたいベクトル. |

定義式

行列 a_{ij} , ベクトル b_i としたとき,

$$a_{ij}x_j = b_i, \quad \begin{cases} a_{ij} \neq 0, & (j = i-1, i, i+1) \\ a_{ij} = 0, & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

という関係を満たす未知ベクトル x_j を求める. このとき, 引数との対応関係は

$$a_{ij} : \mathbf{a}(i,j), \quad x_j : \mathbf{x}(j), \quad b_i : \mathbf{b}(i)$$

である. 三重対角行列の場合, 3 重ループ内の 2 ループ処理が対角成分とその隣接 2 成分のみの処理で計算できるため, 内側 2 つのループが省略でき, 計算速度が向上する. 単純な見積りでは, 解くべき正方行列が N 次であった場合, ガウスの消去法に必要な計算回数は $O(N^3)$ であったのに対し, 本ルーチンでは $O(N)$ の計算回数で済む. ガウスの消去法の詳細な計算方法は?? 参照.

備考

特になし.

3.10.11 Householder

機能

ハウスホルダー変換 (?? 参照) を用いて, 任意実正方行列をヘッセンベルグ行列に変換する.

書式

```
call invert_mat( a, b, [p], [sym_opt] )
```

引数

| | | | |
|---------|--------------------------|-------|------------------|
| a | <R(:, :)> | in | 任意の実 n 次正方行列. |
| b | <R(size(a,1),size(a,2))> | inout | 得られるヘッセンベルグ行列. |
| p | <R(size(a,1),size(a,2))> | inout | 変換に用いた直交行列 (後述). |
| sym_opt | <L> | in | 対称行列かどうか (後述). |

定義式

任意の実行列 A を直交行列 P によるハウスホルダー変換によって、ヘッセンベルグ行列 B に変換する：

$$PAP^{-1} = B.$$

ここで、ヘッセンベルグ行列は上 (下) 三角行列の副対角成分までゼロでない行列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

である.

備考

- `sym_opt` は変換する行列 a が対称行列の場合, `.true.` で指定すると, 計算時間が短くなる. このとき, 返される行列 b は三重対角行列になっている.
- `p` はハウスホルダー変換に用いた直交行列まで出力する. ただし, このオプションを指定すると, 直交行列用に別計算を行うので少し計算時間が長くなる.

3.10.12 `invert_mat`

機能

任意正方行列の逆行列を返す.

書式

```
call invert_mat( a )
```

引数

`a` <I,R(:, :)> in 求める行列.
`b` <I,R(size(a,1),size(a,1))> inout a の逆行列.

定義式

ガウスの消去法を用いて逆行列を計算する. 詳細な計算方法は??参照.

備考

特になし.

3.10.13 mat_dot

機能

任意行列 (正方でなくてもよい) の行列積を返す.

書式

```
call invert_mat( a, b, c )
```

引数

a <R(:, :)> in $m \times n$ 行列.
 b <R(size(a,2),size(a,1))> in $n \times m$ 行列.
 c <R(size(a,1),size(a,1))> inout 得られる正方行列.

定義式

$m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B の各成分を a_{ij} , b_{ij} とすると, これらの行列積は m 次の正方行列 C (成分, c_{ij}) となる :

$$AB = C : \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = c_{ij}.$$

.

それぞれ, 引数との対応は以下 :

$$a_{ij} : a(i, j), \quad b_{ij} : b(i, j), \quad c_{ij} : c(i, j).$$

備考

特になし.

3.10.14 QR_method

機能

QR 分解 (?? 参照) を用いて, 任意実正方行列の全固有値と全固有ベクトルを計算する.

書式

```
call invert_mat( a, lam, [p], [eps], [sym_opt] )
```

引数

| | | | |
|---------|--------------------------|-------|-------------------------------------|
| a | <R(:, :)> | in | 任意の実 n 次正方行列. |
| lam | <R(size(a,1))> | inout | 得られる固有値 (後述). |
| p | <R(size(a,1),size(a,2))> | inout | 固有ベクトル (後述). |
| eps | <R> | in | QR 法における収束判定. デフォルトは 10^{-5} . |
| sym_opt | <L> | in | 対称行列かどうか (後述). |

定義式

任意の実行列 A を直交行列 Q と三角行列 R に分解し :

$$A = QR,$$

得られる三角行列の対角成分から固有値を計算する. このとき, 固有ベクトルは変換行列 Q の各列に配置されている. 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると ^{*11},

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

という形で得られる. このとき, n は行列 A のランクである. このとき, 変換に用いた直交行列 Q から各固有ベクトルは

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$$

となる. これらは実際のルーチンにおける各引数に関して, 以下のような対応関係になっている.

$$A : \mathbf{a}(i, j), \quad \lambda_i : \text{lam}(i), \quad \mathbf{q}_i : \mathbf{p}(1:n, i).$$

備考

- 本ルーチンで返される固有ベクトルと固有値はそれぞれ $\text{lam}(i)$ と $\mathbf{p}(1:m, i)$ という対応関係にある. つまり, 固有値の第 i 成分に対応する固有ベクトルは \mathbf{p} の 2 次元目の第 i 成分に対応する.
- 本ルーチンでは QR 法を採用しているため, 固有値が格納されている配列の要素番号が若いほど, 固有値の絶対値は大きくなっている.
- `sym_opt` は変換する行列 \mathbf{a} が対称行列の場合, `.true.` で指定すると, 計算時間が短くなる.

3.10.15 schumit_norm

機能

任意のベクトルの組をシュミットの直交化法を用いて正規直交ベクトル系に変換するルーチン.

^{*11} 現行のルーチンでは, 固有値が縮退している場合は扱えないことに注意.

書式

```
call schumit_norm( u, v )
```

引数

u <R(:, :)> in 計算するベクトル系.
v <R(size(u,1),size(u,2))> inout 正規直交化ベクトル.

定義式

任意のベクトル系 $\{\mathbf{u}\}_j$ を互いに線形独立な正規直交ベクトル系 $\{\mathbf{v}\}_j$ に変換するためのシュミットの直交化法は

$$\{\mathbf{v}\}_j = \frac{\{\mathbf{v}'\}_j}{|\{\mathbf{v}'\}_j|}, \quad \{\mathbf{v}'\}_j = \{\mathbf{u}\}_j - \sum_{k=0}^{j-1} (\{\mathbf{u}\}_j \cdot \{\mathbf{v}\}_k) \{\mathbf{v}\}_k$$

である.

備考

特になし.

3.10.16 trans_mat

機能

任意正方行列の転置を返す.

書式

```
call trans_mat( a )
```

引数

a <I,R(:, :)> inout 転置にしたい.

定義式

行列 A_{ij} の転置 $^T A$ は A_{ji} である.

備考

- 引数は inout 属性がついているので, 引数の結果は転置された値で返される.

3.11 max_min

配列の最大値, 最小値を検索するルーチン集.

3.11.1 max_val_1d

機能

1 次元配列の最大値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call max_val_1d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------|-------|------------------|
| var | <I,R,DP(:)> | in | 1 次元の探索配列. |
| mamn | <I> | inout | 最大値が格納されている要素番号. |
| mamv | <I,R,DP> | inout | var の最大値 . |
| undef | <I,R,DP> | in | 未定義値 (後述) . |

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最大値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.2 max_val_2d

機能

2 次元配列の最大値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call max_val_2d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|----------------|-------|-------------------------|
| var | <I,R,DP(:, :)> | in | 2 次元の探索配列. |
| mamnx | <I> | inout | 配列内の最大値に該当する第 1 配列要素番号. |
| mamny | <I> | inout | 配列内の最大値に該当する第 2 配列要素番号. |
| mamv | <I,R,DP> | inout | var の最大値 . |
| undef | <I,R,DP> | in | 未定義値 (後述) . |

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最大値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.3 max_val_3d

機能

3 次元配列の最大値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call max_val_3d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------|-------|-------------------------|
| var | <I,R,DP(:)> | in | 3 次元の探索配列. |
| mamnx | <I> | inout | 配列内の最大値に該当する第 1 配列要素番号. |
| mamny | <I> | inout | 配列内の最大値に該当する第 2 配列要素番号. |
| mamnz | <I> | inout | 配列内の最大値に該当する第 3 配列要素番号. |
| mamv | <I,R,DP> | inout | var の最大値 . |
| undef | <I,R,DP> | in | 未定義値 (後述) . |

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最大値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.4 min_val_1d

機能

1 次元配列の最小値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call min_val_1d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|--------------------------------|--------------------|-------------------------|
| <code>var</code> | <code><I,R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元の探索配列. |
| <code>mamn</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 最小値が格納されている要素番号. |
| <code>mamv</code> | <code><I,R,DP></code> | <code>inout</code> | <code>var</code> の最小値 . |
| <code>undef</code> | <code><I,R,DP></code> | <code>in</code> | 未定義値 (後述) . |

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最小値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.5 min_val_2d**機能**

2 次元配列の最小値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call min_val_2d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|-----------------------------------|--------------------|-------------------------|
| <code>var</code> | <code><I,R,DP(:, :)></code> | <code>in</code> | 2 次元の探索配列. |
| <code>mamnx</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 配列内の最小値に該当する第 1 配列要素番号. |
| <code>mamny</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 配列内の最小値に該当する第 2 配列要素番号. |
| <code>mamv</code> | <code><I,R,DP></code> | <code>inout</code> | <code>var</code> の最小値 . |
| <code>undef</code> | <code><I,R,DP></code> | <code>in</code> | 未定義値 (後述) . |

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最小値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.11.6 min_val_3d**機能**

3 次元配列の最小値とその値が格納されている配列要素番号を取得する。

書式

```
call min_val_3d( var, mamn, mamv, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------|-------|-------------------------|
| var | <I,R,DP(:)> | in | 3 次元の探索配列. |
| mamnx | <I> | inout | 配列内の最小値に該当する第 1 配列要素番号. |
| mamny | <I> | inout | 配列内の最小値に該当する第 2 配列要素番号. |
| mamnz | <I> | inout | 配列内の最小値に該当する第 3 配列要素番号. |
| mamv | <I,R,DP> | inout | var の最小値 . |
| undef | <I,R,DP> | in | 未定義値 (後述) . |

定義式

単純に 1 番目から配列の値を比較する。最小値が複数あった場合、最も要素番号の若いものが返される。

備考

- 未定義値が定義されている場合は、その配列を比較しない。

3.12 phys_const

物理学的定数集. 物理学における普遍定数を以下の表のように与える. 出典は理科年表 (2008) より ^{*12}.

| 変数名 | 型 | 設定値 | 変数の意味 | 単位 |
|-----------|------|--------------------------|------------|----------------------|
| Me | <R> | 5.9736e24 | 地球の質量 | [kg] |
| g | <R> | 9.80665 | 地球の標準重力加速度 | [m s ⁻²] |
| omega | <R> | 7.291893328e-5 | 地球の自転角速度 | [s ⁻¹] |
| radius | <R> | 6.371e6 | 地球の極半径 | [m] |
| kB | <R> | 1.380658e-23 | ボルツマン定数 | [J K ⁻¹] |
| Me | <R> | 5.9736e24 | 地球の質量 | [kg] |
| g_dp | <DP> | 9.80665 | 地球の標準重力加速度 | [m s ⁻²] |
| omega_dp | <DP> | 7.2918933286303412732d-5 | 地球の自転角速度 | [s ⁻¹] |
| radius_dp | <DP> | 6.371d6 | 地球の極半径 | [m] |
| kB_dp | <DP> | 1.380658d-23 | ボルツマン定数 | [J K ⁻¹] |

^{*12}ただし, 地球半径のみ, Tsuboki and Sakakibara (2007) から出典.

3.13 poly_function

直交多項式を計算するルーチン集. ここで定義される直交多項式ルーチンは, 引数の値に応じて interface 宣言されているので, 単精度の引数を与えれば単精度で, 倍精度の引数を与えれば倍精度で計算した結果を返す. また, ここで用いられている多項式の計算定義式の証明は??参照.

3.13.1 chebyshev

機能

$0 - n$ 次のチェビシェフ多項式を計算する.

書式

```
call chebyshev( n, x, che )
```

引数

| | | | |
|-----|---------------------|-------|------------|
| n | <I> | in | 計算する最高次数. |
| x | <R,DP(:)> | in | 求めたい引数. |
| che | <R,DP(0:n,size(x))> | inout | チェビシェフ多項式. |

定義式

n 次チェビシェフ多項式を $T_n(x)$ とすると,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{(2k)! (n-2k)!} x^{n-2k} (1-x^2)^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.2 gegenbauer

機能

$0 - n$ 次のゲーゲンバウアー多項式を計算する.

書式

```
call gegenbauer( n, x, p, lambda )
```

引数

| | | | |
|--------|---------------------|-------|--------------|
| n | <I> | in | 計算する最高次数. |
| x | <R,DP(:)> | in | 求めたい引数. |
| p | <R,DP(0:n,size(x))> | inout | ゲーゲンバウアー多項式. |
| lambda | <R> | in | ゲーゲンバウアー係数. |

定義式

n 次ゲーゲンバウアー多項式を $C_n^\lambda(x)$ とすると,

$$C_n^\lambda(x) = \frac{2^n \Gamma(n+\lambda)}{n! \Gamma(\lambda)} x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-n-\lambda; \frac{1}{x^2}\right).$$

ここで, F はガウスの超幾何級数である.

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.3 hermite

機能

$0 - n$ 次のエルミート多項式を計算する.

書式

```
call hermite( n, x, p )
```

引数

| | | | |
|---|---------------------|-------|-----------|
| n | <I> | in | 計算する最高次数. |
| x | <R,DP(:)> | in | 求めたい引数. |
| p | <R,DP(0:n,size(x))> | inout | エルミート多項式. |

定義式

n 次エルミート多項式を $H_n(x)$ とすると,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2k-1)!! n!}{(2k)! (n-2k)!} x^{n-2k}.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.4 jacobi_poly

機能

0 – n 次のヤコビ多項式を計算する.

書式

```
call jacobi_poly( n, x, p, alpha, beta )
```

引数

| | | | |
|-------|---------------------|-------|-----------|
| n | <I> | in | 計算する最高次数. |
| x | <R,DP(:)> | in | 求めたい引数. |
| p | <R,DP(0:n,size(x))> | inout | ヤコビ多項式. |
| alpha | <R> | in | ヤコビ係数 1. |
| beta | <R> | in | ヤコビ係数 2. |

定義式

n 次ヤコビ多項式を $G_n(\alpha, \beta; x)$ とすると,

$$G_n(\alpha, \beta; x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k n!}{r! (n-r)!} \frac{\Gamma(\alpha+n+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+k)} x^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.5 laguerre

機能

0 – n 次のラゲール多項式を計算する.

書式

```
call laguerre( n, x, p )
```

引数

| | | | |
|---|---------------------|-------|-----------|
| n | <I> | in | 計算する最高次数. |
| x | <R,DP(:)> | in | 求めたい引数. |
| p | <R,DP(0:n,size(x))> | inout | ラゲール多項式. |

定義式

n 次ラゲール多項式を $L_n(x)$ とすると,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)! k!} x^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.6 legendre

機能

$0 - n$ 次のルジャンドル多項式を計算する.

書式

```
call legendre( n, x, p )
```

引数

| | | | |
|---|---------------------|-------|------------|
| n | <I> | in | 計算する最高次数. |
| x | <R,DP(:)> | in | 求めたい引数. |
| p | <R,DP(0:n,size(x))> | inout | ルジャンドル多項式. |

定義式

n 次ルジャンドル多項式を $P_n(x)$ とすると,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{(n-k+1)(n-k+2) \cdots n(n+1) \cdots (n+k)}{k! k!} \left(\frac{1-x}{2} \right)^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.13.7 sonine

機能

$0 - n$ 次のソニン多項式を計算する.

書式

```
call sonine( n, x, p, lambda )
```

引数

| | | | |
|--------|---------------------|-------|-----------|
| n | <I> | in | 計算する最高次数. |
| x | <R,DP(:)> | in | 求めたい引数. |
| p | <R,DP(0:n,size(x))> | inout | ソニン多項式. |
| lambda | <R> | in | ソニン係数. |

定義式

n 次ソニン多項式を $S_n^\lambda(x)$ とすると,

$$S_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+\lambda)!}{k! (n+\lambda-k)! k!} x^k.$$

備考

- 実際の評価は漸化式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.14 special_function

特殊関数を計算する関数集. なお, 以下の関数マニュアルには, 関数の定義式のみ表記しており, 実際の評価手順は??を参考にされたい.

3.14.1 Full_Ellip1_Func

機能

第一種完全楕円関数を計算する.

書式

```
result = Full_Ellip1_Func( k )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|-------|
| k | <R> | in | 波数. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 計算結果. |

定義式

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

備考

特になし.

3.14.2 Full_Ellip2_Func

機能

第一種完全楕円関数を計算する.

書式

```
result = Full_Ellip2_Func( k )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|-------|
| k | <R> | in | 波数. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 計算結果. |

定義式

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

備考

特になし.

3.14.3 bessj

機能

第一種ベッセル関数を計算する.

書式

```
result = bessj( m, t )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|------------|
| m | <I,R> | in | ベッセル関数の次数. |
| t | <R,DP> | in | 変数. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 計算結果. |

定義式

m 次ベッセル関数を $J_m(t)$ とすると,

$$J_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m}.$$

ここで, $\Gamma(m)$ は m 次ガンマ関数である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.14.4 bessy

機能

第二種ベッセル関数を計算する.

書式

```
result = bessy( m, t )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|------------|
| m | <I,R> | in | ベッセル関数の次数. |
| t | <R,DP> | in | 変数. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 計算結果. |

定義式

m 次ベッセル関数を $Y_m(t)$ とすると,

$$Y_m(t) = J_m(t) \ln t - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+k}\right) \right] \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m}.$$

ここで, $\Gamma(m)$ は m 次ガンマ関数, $J_m(t)$ は m 次ベッセル関数である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.14.5 beszero

機能

第一種ベッセル関数のゼロ点を計算する.

書式

```
call beszero( nmax, mmax, k )
```

引数

| | | | |
|------|---------------------|-------|----------------|
| nmax | <I> | in | ベッセル関数の最大次数. |
| mmax | <I> | in | 求めるゼロ点の個数. |
| k | <R,DP(0:nmax,mmax)> | inout | ゼロ点での値 (備考参照). |

定義式

第一種ベッセル関数の 0 次から n 次までの原点から m 個のゼロ点を計算する. このとき, 引数との対応関係は以下ようになる.

$n : \text{nmax}, \quad m : \text{mmax}.$

- 備考
- 例えば, n 次の m 番目のゼロ点での変数の値を求めたい場合, `call beszero(n, m, k(0:n,m))` と指定すれば, `k(n,m)` にそのゼロ点の値が格納されている.

3.14.6 beta_func

機能

ベータ関数を計算する.

書式

```
result = beta_func( x, y )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|-------|
| x | <R,DP> | in | 第一要素. |
| y | <R,DP> | in | 第二要素. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 計算結果. |

定義式

ベータ関数を $B(x, y)$ とすると,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0$$

- 備考
- 実際の評価式は近似式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.
 - ベータ関数には変数対称性をもつため,

$$B(x, y) = B(y, x)$$

であるので, 引数の順序は問わない.

3.14.7 delta

機能

クロネッカーのデルタを計算する.

書式

```
result = delta( i, j )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-------|
| i | <I> | in | 第一要素. |
| j | <I> | in | 第二要素. |
| 戻り値 | <R> | inout | 計算結果. |

定義式

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

備考

特になし.

3.14.8 df_bessj

機能

第一種変形ベッセル関数を計算する.

書式

```
result = df_bessj( m, t )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|--------------|
| m | <I,R> | in | 変形ベッセル関数の次数. |
| t | <R,DP> | in | 変数. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 計算結果. |

定義式

m 次変形ベッセル関数を $I_m(t)$ とすると,

$$I_m(t) = i^{-m} J_m(it).$$

ここで, $J_m(t)$ は m 次ベッセル関数, i は虚数単位である.

備考 ● 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.14.9 df_bessy

機能

第一種変形ノイマン関数を計算する.

書式

```
result = df_bessy( m, t )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|--------------|
| m | <I,R> | in | 変形ノイマン関数の次数. |
| t | <R,DP> | in | 変数. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 計算結果. |

定義式

m 次変形ノイマン関数を $K_m(t)$ とすると,

$$K_m(t) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-m}(t) - I_m(t)}{\sin m\pi}.$$

ここで, $I_m(t)$ は m 次変形ベッセル関数である.

備考 • 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.14.10 epsilon

機能

エディントンのイプシロンを計算する.

書式

```
result = epsilon( i, j, k )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-------|
| i | <I> | in | 第一要素. |
| j | <I> | in | 第二要素. |
| k | <I> | in | 第三要素. |
| 戻り値 | <R> | inout | 計算結果. |

定義式

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{偶置換} \\ -1 & \text{奇置換} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

備考

特になし.

3.14.11 gamma_func

機能

ガンマ関数を計算する.

書式

```
result = gamma_func( x )
```

引数

x <I,R> in 要素.
 戻り値 <R,DP> inout 計算結果.

定義式

ガンマ関数を $\Gamma(x)$ とすると,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

備考 ● 実際の評価式は近似式で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.14.12 kaijo

機能

階乗を計算する.

書式

```
result = kaijo( i )
```

引数

i <I> in 要素.
 戻り値 <I,R> inout 計算結果.

定義式

$$i! = i \times (i-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

備考

特になし.

3.14.13 sp_bessj

機能

第一種球ベッセル関数を計算する.

書式

```
result = sp_bessj( m, t )
```

引数

m <I,R> in 球ベッセル関数の次数.
 t <R,DP> in 変数.
 戻り値 <R,DP> inout 計算結果.

定義式

m 次球ベッセル関数を $j_m(t)$ とすると,

$$j_m(t) = \left(\frac{\pi}{2t}\right)^{1/2k} J_{m+1/2}(t).$$

ここで, $J_m(t)$ は m 次ベッセル関数である.

備考 • 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.14.14 sp_bessy

機能

第一種球ノイマン関数を計算する.

書式

```
result = sp_bessy( m, t )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|-------------|
| m | <I,R> | in | 球ノイマン関数の次数. |
| t | <R,DP> | in | 変数. |
| 戻り値 | <R,DP> | inout | 計算結果. |

定義式

m 次球ノイマン関数を $y_m(t)$ とすると,

$$y_m(t) = \left(\frac{\pi}{2t}\right)^{1/2k} Y_{m+1/2}(t).$$

ここで, $Y_m(t)$ は m 次ノイマン関数である.

備考 • 実際の評価式は積分形で評価されている. 評価方法の詳細については??参照.

3.15 statistics

主要な統計処理に加え, 平均化, 内挿, フィッティング処理等を行うルーチン集.

3.15.1 Anomaly_1d

機能

1 次元配列の平均値からのアノマリーを計算する。

書式

```
call Anomaly_1d( x, anor, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------------|-------|-----------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元データ. |
| anor | <R,DP(size(x))> | inout | 各 x(i) に対応する偏差. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値 (後述) . |
| nc | <I> | inout | 平均のカウント数 (後述) . |

定義式

任意の長さのデータ列 x_n が存在した場合、そのアノマリー a_n は以下のように計算される。

$$a_i = x_i - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n x_p$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。また、アノマリーとしても **error** で定義されている値を返す。
- 引数 **nc** は **error** 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.15.2 Anomaly_2d

機能

2 次元配列の平均値からのアノマリーを計算する。

書式

```
call Anomaly_2d( x, anor, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------------------------|-------|-------------------|
| x | <R,DP(:, :)> | in | 1 次元データ. |
| anor | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | inout | 各 x(i,j) に対応する偏差. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値 (後述) . |
| nc | <I> | inout | 平均のカウント数 (後述) . |

定義式

任意の長さのデータ列 x_{mn} が存在した場合、そのアノマリー a_{mn} は以下のように計

算される。

$$a_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{mn} \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^m x_{pq}$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。また、アノマリーとしても `error` で定義されている値を返す。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.15.3 Anomaly_3d

機能

3次元配列の平均値からのアノマリーを計算する。

書式

```
call Anomaly_3d( x, anor, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|--|--------------------|----------------------------------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1次元データ. |
| <code>anor</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>inout</code> | 各 <code>x(i,j,k)</code> に対応する偏差. |
| <code>error</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 欠損値 (後述) . |
| <code>nc</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 平均のカウント数 (後述) . |

定義式

任意の長さのデータ列 x_{lmn} が存在した場合、そのアノマリー a_{lmn} は以下のように計算される。

$$a_{ijk} = x_{ijk} - \frac{1}{lmn} \sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^m \sum_{p=1}^l x_{pqr}$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。また、アノマリーとしても `error` で定義されている値を返す。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.15.4 auto_interpo_search_1d

機能

1 次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、`point` を越えない最大の要素番号を出力する（いわゆるガウス記号のような処理を行う）。

書式

```
call auto_interpo_search_1d( x, point, i, [undef], [stdopt] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|-------------------------------------|-------|--|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | in | 1 次元漸増配列. |
| <code>point</code> | <code><R,DP(:)></code> | in | 調べたい点. |
| <code>i</code> | <code><I(size(point))></code> | inout | 各 <code>point</code> を越えない最大の <code>x(i)</code> に相当する要素番号. |
| <code>undef</code> | <code><I></code> | in | 探索範囲外フラグ（後述）. デフォルトはゼロ. |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | in | エラー出力フラグ（後述）. デフォルトは <code>.false</code> . |

定義式

模式図は図??.

備考

- 使用方法は `auto_interpo_search_1d` と同じ. ただし, `point` 配列は漸増データであることが前提である. もし, 漸増データでない場合は `interpo_search_1d` をループで回すしかない.

3.15.5 auto_interpo_search_2d

機能

2 次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、`pointx`, `pointy` を越えない最大の要素番号を出力する（いわゆるガウス記号のような処理を行う）。

書式

```
call auto_interpo_search_2d( x, y, pointx, pointy, i, j, [undef], [stdopt] )
```

引数

| | | | |
|----------------------|--------------------------------------|--------------------|---|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元漸増配列. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元漸増配列. |
| <code>pointx</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | <code>x</code> について調べたい点. |
| <code>pointy</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | <code>y</code> について調べたい点. |
| <code>i</code> | <code><I(size(pointx))></code> | <code>inout</code> | 各 <code>pointx</code> を越えない最大の <code>x(i)</code> に相当する要素番号. |
| <code>j</code> | <code><I(size(pointx))></code> | <code>inout</code> | 各 <code>pointy</code> を越えない最大の <code>y(j)</code> に相当する要素番号. |
| <code>undefff</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 探索範囲外フラグ (後述). デフォルトはゼロ. |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> . |

定義式

模式図は図??.

備考

- 使用方法は `auto_interpo_search_2d` と同じ. ただし, `pointx`, `pointy` 配列は漸増データであることが前提である. もし, 漸増データでない場合は `interpo_search_2d` をループで回すしかない.

3.15.6 auto_interpo_search_3d

機能

3 次元の漸増配列 (要素数が増えるごとに値が大きくなる配列) の中で, `pointx`, `pointy`, `pointz` を越えない最大の要素番号を出力する (いわゆるガウス記号のような処理を行う)。

書式

```
call auto_interpo_search_3d( x, y, z, pointx, pointy, pointz, i, j, k,
&
& [stdopt], [undefff] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|--------------------------------------|--------------------|---|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元漸増配列. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元漸増配列. |
| <code>z</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元漸増配列. |
| <code>pointx</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | <code>x</code> について調べたい点. |
| <code>pointy</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | <code>y</code> について調べたい点. |
| <code>pointz</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | <code>z</code> について調べたい点. |
| <code>i</code> | <code><I(size(pointx))></code> | <code>inout</code> | 各 <code>pointx</code> を越えない最大の <code>x(i)</code> に相当する要素番号. |
| <code>j</code> | <code><I(size(pointy))></code> | <code>inout</code> | 各 <code>pointy</code> を越えない最大の <code>y(j)</code> に相当する要素番号. |
| <code>k</code> | <code><I(size(pointz))></code> | <code>inout</code> | 各 <code>pointz</code> を越えない最大の <code>z(k)</code> に相当する要素番号. |
| <code>undeff</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 探索範囲外フラグ (後述). デフォルトはゼロ. |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false</code> . |

定義式

模式図は図??.

備考

- 使用方法は `auto_interpo_search_3d` と同じ. ただし, `pointx`, `pointy`, `pointz` 配列は漸増データであることが前提である. もし, 漸増データでない場合は `interpo_search_3d` をループで回すしかない.

3.15.7 auto_interpolation_1d

機能

1 次元の異なる座標系における自動線形内挿ルーチン。通常、`interpo_search` ルーチンと `interpolation` の組み合わせで行われる内挿処理を完全自動化したもの。

書式

```
call auto_interpolation_1d( x, r, u, v, [undef], [undefr], [stdopt] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|------------------------------------|--------------------|---|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 内挿の基準座標. |
| <code>r</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 実際に内挿を行う座標. |
| <code>u</code> | <code><R,DP(size(x))></code> | <code>in</code> | 座標 <code>x</code> で定義される配列データ. |
| <code>v</code> | <code><R,DP(size(r))></code> | <code>inout</code> | 座標 <code>r</code> で定義される配列データ. |
| <code>undef</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 未定義値 (後述). |
| <code>undefr</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 内挿隣接点未定義値 (後述). |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |

定義式

座標 `x` の各格子点 `x(i)` で定義されている値 `u(i)` の値を参照値として、`x` と同次元に存在する格子点配置の異なる別の座標系 `r` の各点 `r(j)` で定義されている値 `v(j)` に内挿を行うものである。イメージは図??のようなものである。

備考

- 引数 `undef` は領域外での内挿を行おうとしたときに格納される値.
- 引数 `undefr` は内挿点の両端隣接参照点が存在するにも関わらず、その点のどちらかあるいは一方が未定義値 `undefr` の場合に、内挿点にはこの `undefr` で与えられた値が格納される.
- `undef` と `undefr` と合わせることで、内挿点が定義領域外にあるか、領域内で未定義かの判別が可能となる。なお、これらの値はデフォルトではどちらも `-999.0` で返される.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.

3.15.8 auto_interpolation_2d

機能

2 次元の異なる座標系における自動線形内挿ルーチン。通常、`interpo_search` ルーチンと `interpolation` の組み合わせで行われる内挿処理を完全自動化したもの。

書式

```
call auto_interpolation_2d( x, y, r, p, u, v, [undef], [undefr], [stdopt]
)
```

引数

| | | | |
|--------|-------------------------|-------|----------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 内挿の基準座標 1. |
| y | <R,DP(:)> | in | 内挿の基準座標 2. |
| r | <R,DP(:)> | in | 実際に内挿を行う座標 1. |
| p | <R,DP(:)> | in | 実際に内挿を行う座標 2. |
| u | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 座標 x,y で定義される配列データ. |
| v | <R,DP(size(r),size(p))> | inout | 座標 r,p で定義される配列データ. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値 (後述). |
| undefr | <R,DP> | in | 内挿隣接点未定義値 (後述). |
| stdopt | <L> | in | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは .false. |

定義式

座標 x, y の各格子点 $x(i), y(j)$ で定義されている値 $u(i, j)$ の値を参照値として、 x, y と同次元に存在する格子点配置の異なる別の座標系 r, p の各点 $r(1), p(m)$ で定義されている値 $v(1, m)$ に内挿を行うものである。イメージは図??のようなものである。

備考

- 引数 `undef` は領域外での内挿を行おうとしたときに格納される値.
- 引数 `undefr` は内挿点の両端隣接参照点が存在するにも関わらず、その点のどちらかあるいは一方が未定義値 `undefr` の場合に、内挿点にはこの `undefr` で与えられた値が格納される.
- `undef` と `undefr` と合わせることで、内挿点が定義領域外にあるか、領域内で未定義かの判別が可能となる。なお、これらの値はデフォルトではどちらも -999.0 で返される.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.

3.15.9 auto_interpolation_3d

機能

3次元の異なる座標系における自動線形内挿ルーチン。通常、`interpo_search` ルーチンと `interpolation` の組み合わせで行われる内挿処理を完全自動化したもの。

書式

```
call auto_interpolation_3d( x, y, z, r, p, q, u, v, [undef], [undefr],
[stdopt] )
```

引数

| | | | |
|--------|---------------------------------|-------|----------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 内挿の基準座標 1. |
| y | <R,DP(:)> | in | 内挿の基準座標 2. |
| z | <R,DP(:)> | in | 内挿の基準座標 3. |
| r | <R,DP(:)> | in | 実際に内挿を行う座標 1. |
| p | <R,DP(:)> | in | 実際に内挿を行う座標 2. |
| q | <R,DP(:)> | in | 実際に内挿を行う座標 3. |
| u | <R,DP(size(x),size(y),size(z))> | in | 座標 x,y,z で定義される配列データ. |
| v | <R,DP(size(r),size(y),size(z))> | inout | 座標 r,p,q で定義される配列データ. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値 (後述). |
| undefr | <R,DP> | in | 内挿隣接点未定義値 (後述). |
| stdopt | <L> | in | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは .false. |

定義式

座標 x, y, z の各格子点 $x(i), y(j), z(k)$ で定義されている値 $u(i, j, k)$ の値を参照値として、 x, y, z と同次元に存在する格子点配置の異なる別の座標系 r, p, q の各点 $r(l), p(m), q(n)$ で定義されている値 $v(l, m, n)$ に内挿を行うものである。イメージは図??のようなものである。

備考

- 引数 `undef` は領域外での内挿を行おうとしたときに格納される値.
- 引数 `undefr` は内挿点の両端隣接参照点が存在するにも関わらず、その点のどちらかあるいは一方が未定義値 `undefr` の場合に、内挿点にはこの `undefr` で与えられた値が格納される.
- `undef` と `undefr` と合わせることで、内挿点が定義領域外にあるか、領域内で未定義かの判別が可能となる。なお、これらの値はデフォルトではどちらも -999.0 で返される.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.

3.15.10 Cor_Coe_1d

機能

2 データの相関係数を計算するルーチン.

書式

```
call Cor_Coe_1d( x, y, cc, [error] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|------------------------------------|--------------------|----------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元データ. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(size(x))></code> | <code>in</code> | 1 次元データ. |
| <code>cc</code> | <code><R,DP></code> | <code>inout</code> | 相関係数. |
| <code>error</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 欠損値. |

定義式

任意の長さの 2 データ列 x_n, y_n が存在した場合、その相関係数 cc 以下のように計算される。

$$cc = \frac{cov}{stv(x) \times stv(y)}.$$

ただし、以下のような記号を用いた。

$$cov = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad stv(\phi) = \sum_{i=1}^n (\phi_i - \bar{\phi})^2$$

ここで、 cov は共分散、 $stv(\phi)$ は ϕ_n というデータ列の標準偏差となる。また、上線のついた変数は平均値を表す。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.15.11 Cor_Coe_2d**機能**

2 データの相関係数を計算するルーチン (2 次元配列版).

書式

```
call Cor_Coe_2d( x, y, cc, [error] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|--|--------------------|----------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:, :)></code> | <code>in</code> | 2 次元データ. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2))></code> | <code>in</code> | 2 次元データ. |
| <code>cc</code> | <code><R,DP></code> | <code>inout</code> | 相関係数. |
| <code>error</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 欠損値. |

定義式

2 次元配列を 1 次元配列に並べ替え、`Cor_Coe` を用いている。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.15.12 Cor_Coe_3d

機能

2 データの相関係数を計算するルーチン (3 次元配列版).

書式

```
call Cor_Coe_3d( x, y, cc, [error] )
```

引数

| | | | |
|-------|---------------------------------------|-------|----------|
| x | <R,DP(:, :, :)> | in | 3 次元データ. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | 3 次元データ. |
| cc | <R,DP> | inout | 相関係数. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値. |

定義式

3 次元配列を 1 次元配列に並べ替え, Cor_Coe を用いている.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.

3.15.13 LSM_1d

機能

あるデータ列に対して、線形関数にフィッティングする際に、最小二乗法によってその傾きと切片を計算するルーチン.

書式

```
call LSM_1d( x, y, slope, intercept, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-----------------|-------|---------------|
| x | <R,DP(:)> | in | データ要素 1. |
| y | <R,DP(size(x))> | in | データ要素 2. |
| slope | <R,DP> | inout | 求められる線形関数の傾き. |
| intercept | <R,DP> | inout | 求められる線形関数の切片. |
| undef | <R,DP> | in | 欠損値 (後述) . |

定義式

任意の長さのデータ列の組 x_n, y_n が存在した場合、そのデータを最小二乗法により

以下のような線形関数 $F(x_n)$ にフィッティングする。

$$F(x_i) = a_1 x_i + a_0.$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : x(i), \quad a_1 : \text{slope}, \quad a_0 : \text{intercept}.$$

なお、この最小二乗法による具体的な計算の証明は付録の [5.4.1](#) 参照。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.15.14 LSM_2d

機能

ある 2 次元データ列に対して、線形関数にフィッティングする際に、最小二乗法によってその傾きと切片を計算するルーチン。

書式

```
call LSM_2d( x, y, slope, intercept, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-----------------------------|-------|---------------|
| x | <R,DP(:, :)> | in | データ要素 1. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | データ要素 2. |
| slope | <R,DP> | inout | 求められる線形関数の傾き. |
| intercept | <R,DP> | inout | 求められる線形関数の切片. |
| undef | <R,DP> | in | 欠損値（後述）. |

定義式

2 次元配列を 1 次元に置き換えて、LSM ルーチンを用いている。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.15.15 LSM_3d

機能

ある 3 次元データ列に対して、線形関数にフィッティングする際に、最小二乗法によってその傾きと切片を計算するルーチン。

書式

```
call LSM_3d( x, y, slope, intercept, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-----------|---------------------------------------|-------|--------------|
| x | <R,DP(:, :, :)> | in | データ要素 1. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | データ要素 2. |
| slope | <R,DP> | inout | 求められる線形関数の傾き |
| intercept | <R,DP> | inout | 求められる線形関数の切片 |
| undef | <R,DP> | in | 欠損値（後述）. |

定義式

3 次元配列を 1 次元に置き換えて、LSM ルーチンを用いている。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.15.16 LSM_poly_1d

機能

あるデータ列に対して、任意次数の多項式にフィッティングする際に、最小二乗法によってその各係数を計算するルーチン。

書式

```
call LSM_poly_1d( x, y, a, intercept, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-----------------|-------|-------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | データ要素 1. |
| y | <R,DP(size(x))> | in | データ要素 2. |
| a | <R,DP(:)> | inout | 求められる多項式の各係数（後述）. |
| intercept | <R,DP> | inout | 求められる多項式の切片（後述）. |
| undef | <R,DP> | in | 欠損値（後述）. |

定義式

任意の長さのデータ列の組 x_n, y_n が存在した場合、そのデータを最小二乗法により以下のような m 次多項式 $F(x_n)$ にフィッティングする。

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^m a_j x_i^j + a_0.$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}(i), \quad a_j : \mathbf{a}(j), \quad a_0 : \text{intercept}.$$

引数の形から見て明らかなように、実引数として \mathbf{a} を渡す際、その配列の要素数が多項式の最高次数となる。また、メインルーチン側で、`intercept` も配列 \mathbf{a} に組み込みたい場合、実引数側で `intercept` の変数として、 $\mathbf{a}(0)$ を代入すれば問題ない。なお、この最小二乗法による具体的な計算の証明は付録の??参照。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.15.17 LSM_poly_2d

機能

あるデータ列に対して、任意次数の多項式にフィッティングする際に、最小二乗法によってその各係数を計算するルーチン (2 次元版)。

書式

```
call LSM_poly_2d( x, y, a, intercept, [undef] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|-----------------------------|--------------------|---------------------|
| <code>x</code> | <R,DP(:, :)> | <code>in</code> | データ要素 1. |
| <code>y</code> | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | <code>in</code> | データ要素 2. |
| <code>a</code> | <R,DP(:)> | <code>inout</code> | 求められる多項式の各係数 (後述) . |
| <code>intercept</code> | <R,DP> | <code>inout</code> | 求められる多項式の切片 (後述) . |
| <code>undef</code> | <R,DP> | <code>in</code> | 欠損値 (後述) . |

定義式

2 次元データを 1 次元データに置き換えて、`LSM_poly` を用いている。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.15.18 LSM_poly_3d

機能

あるデータ列に対して、任意次数の多項式にフィッティングする際に、最小二乗法によってその各係数を計算するルーチン (3 次元版).

書式

```
call LSM_poly_3d( x, y, a, intercept, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-----------|---------------------------------------|-------|---------------|
| x | <R,DP(:, :, :)> | in | データ要素 1. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | データ要素 2. |
| a | <R,DP(:)> | inout | 求められる多項式の各係数 |
| intercept | <R,DP> | inout | 求められる多項式の切片 (|
| undef | <R,DP> | in | 欠損値 (後述) . |

定義式

3 次元データを 1 次元データに置き換えて, LSM_poly を用いている.

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。

3.15.19 LSM_multi

機能

あるデータ列に対して、任意個数の多変数多項式にフィッティングする際に、最小二乗法によってその各係数を計算するルーチン.

書式

```
call LSM_multi( x, y, a, [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|--------------------------------------|--------------------|-------------------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:, :)></code> | <code>in</code> | データ要素 1. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(size(x,1))></code> | <code>in</code> | データ要素 2. |
| <code>a</code> | <code><R,DP(size(x,2))></code> | <code>inout</code> | 求められる多項式の各係数（後述）. |
| <code>undef</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 欠損値（後述）. |

定義式

任意の長さのデータ列の組 \mathbf{x}_n, y_n が存在した場合、そのデータを最小二乗法により以下のような m 次多項式 $F(\mathbf{x}_n)$ にフィッティングする。

$$F(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^m a_j x_{j,i}.$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_{j,i} : \mathbf{x}(i,j), \quad a_j : \mathbf{a}(j).$$

なお、この最小二乗法による具体的な計算の証明は付録の??参照。 \mathbf{x} は m 個の独立な変数で構成される集合を表す。この変数の種類が係数 a_j の数に等しい。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 上のフィッティング関数は

$$F(\mathbf{x}_i) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n$$

という形を仮定しているが、もし、フィッティング関数が

$$F(\mathbf{x}_i) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n$$

という切片を伴った形を仮定しなければならない場合でも、本ルーチンは使用可能である。具体的には、ルーチンの引数 `x(:,1)` に全て 1 を入れておけばよい。そうすると、

$$F(\mathbf{x}_i) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n, \quad x_0 = 1$$

と同意になるので、`a(1)` に切片の値が返されることになる。

3.15.20 Mean_1d

機能

1 次元配列の平均値を計算する。

書式

```
call Mean_1d( x, ave, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|--------------|-----------|-------|----------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元データ. |
| ave | <R,DP> | inout | 計算する平均値. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値 (後述). |
| nc | <I> | inout | 平均のカウント数 (後述). |

定義式

任意の長さのデータ列 x_n が存在した場合、そのアノマリー ave は以下のように計算される。

$$ave = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n x_p$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 **nc** は **error** 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.15.21 Mean_2d

機能

2 次元配列の平均値を計算する。

書式

```
call Mean_2d( x, ave, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|--------------|--------------|-------|----------------|
| x | <R,DP(:, :)> | in | 2 次元データ. |
| ave | <R,DP> | inout | 計算する平均値. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値 (後述). |
| nc | <I> | inout | 平均のカウント数 (後述). |

定義式

任意の長さのデータ列 x_{mn} が存在した場合、そのアノマリー ave は以下のように計

算される。

$$ave = \frac{1}{mn} \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^m x_{pq}$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.15.22 Mean_3d

機能

3 次元配列の平均値を計算する。

書式

```
call Mean_3d( x, ave, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|----------------------------------|--------------------|----------------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:,:,:)></code> | <code>in</code> | 3 次元データ。 |
| <code>ave</code> | <code><R,DP></code> | <code>inout</code> | 計算する平均値。 |
| <code>error</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 欠損値 (後述)。 |
| <code>nc</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 平均のカウント数 (後述)。 |

定義式

任意の長さのデータ列 x_{lmn} が存在した場合、そのアノマリー ave は以下のように計算される。

$$ave = \frac{1}{lmn} \sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^m \sum_{p=1}^l x_{pqr}$$

備考

- 欠損値が定義されている場合は、平均計算の際、その値が入っているデータ点を計算に入れない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.15.23 Reg_Line_1d

機能

回帰直線の傾きと切片を計算するルーチン.

書式

```
call Reg_Line_1d( x, y, slope, intercept, [error] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-----------------|-------|----------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元データ. |
| y | <R,DP(size(x))> | in | 1 次元データ. |
| slope | <R,DP> | inout | 回帰直線の傾き. |
| intercept | <R,DP> | inout | 回帰直線の切片. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値. |

定義式

任意の長さの 2 データ列 x_n, y_n が存在した場合、その回帰直線 $y_n = \alpha x_n + \beta$ における傾き α と切片 β を LSM ルーチンを用いて計算する。

正確な計算方法は付録??参照.

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない.

3.15.24 Reg_Line_2d

機能

2 次元データについて回帰直線の傾きと切片を計算するルーチン.

書式

```
call Reg_Line_2d( x, y, slope, intercept, [error] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-----------------------------|-------|----------|
| x | <R,DP(:, :)> | in | 2 次元データ. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2))> | in | 2 次元データ. |
| slope | <R,DP> | inout | 回帰直線の傾き. |
| intercept | <R,DP> | inout | 回帰直線の切片. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値. |

定義式

2次元データを1次元データに置き換えて, Reg_Line ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.

3.15.25 Reg_Line_3d

機能

3次元データについて回帰直線の傾きと切片を計算するルーチン.

書式

```
call Reg_Line_3d( x, y, slope, intercept, [error] )
```

引数

| | | | |
|-----------|---------------------------------------|-------|----------|
| x | <R,DP(:, :, :)> | in | 3次元データ. |
| y | <R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))> | in | 3次元データ. |
| slope | <R,DP> | inout | 回帰直線の傾き. |
| intercept | <R,DP> | inout | 回帰直線の切片. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値. |

定義式

3次元データを1次元データに置き換えて, Reg_Line ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.

3.15.26 covariance_1d

機能

2データの共分散を計算するルーチン.

書式

```
call covariance_1d( x, y, cov, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|------------------------------------|--------------------|----------------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元データ. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(size(x))></code> | <code>in</code> | 1 次元データ. |
| <code>cov</code> | <code><R,DP></code> | <code>inout</code> | 共分散. |
| <code>error</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 欠損値. |
| <code>nc</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 平均のカウント数 (後述). |

定義式

任意の長さの 2 データ列 x_n, y_n が存在した場合、その共分散 cov 以下のように計算される。

$$cov = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

ここで、上線のついた変数は平均値を表す。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合、平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す。

3.15.27 covariance_2d**機能**

2 データの共分散を計算するルーチン (2 次元配列版).

書式

```
call covariance_2d( x, y, cov, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|--|--------------------|----------------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:, :)></code> | <code>in</code> | 2 次元データ. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2))></code> | <code>in</code> | 2 次元データ. |
| <code>cov</code> | <code><R,DP></code> | <code>inout</code> | 共分散. |
| <code>error</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 欠損値. |
| <code>nc</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 平均のカウント数 (後述). |

定義式

2 次元データを 1 次元データに置き換えて、`covariance` ルーチンを用いる。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合, 平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す.

3.15.28 covariance_3d

機能

2 データの共分散を計算するルーチン (3 次元配列版).

書式

```
call covariance_3d( x, y, cov, [error], [nc] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|--|--------------------|----------------|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:, :, :)></code> | <code>in</code> | 3 次元データ. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(size(x,1),size(x,2),size(x,3))></code> | <code>in</code> | 3 次元データ. |
| <code>cov</code> | <code><R,DP></code> | <code>inout</code> | 共分散. |
| <code>error</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 欠損値. |
| <code>nc</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | 平均のカウント数 (後述). |

定義式

3 次元データを 1 次元データに置き換えて, `covariance` ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.
- 引数 `nc` は `error` 引数が設定されている場合, 平均計算に用いたデータ数の総数 (欠損値を除いた数) を返す.

3.15.29 interpo_search_1d

機能

1 次元の漸増配列 (要素数が増えるごとに値が大きくなる配列) の中で, `point` を越えない最大の要素番号を出力する (いわゆるガウス記号のような処理を行う)。

書式

```
call interpo_search_1d( x, point, i, [undeff], [stdopt] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|------------------------------|--------------------|--|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元漸増配列. |
| <code>point</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 調べたい点. |
| <code>i</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | <code>point</code> を越えない最大の <code>x(i)</code> に相当する要素番号. |
| <code>undeff</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 探索範囲外フラグ (後述). デフォルトはゼロ. |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |

定義式

模式図は図??.

備考

- 探索範囲の配列要素値より小さい値を探索しようとした際に `undeff` を返す。この値が設定されずに探索範囲外になった場合は 0 を返す。探索範囲より大きい場合はどのような値をとっても、`x` の最大値に相当する配列要素番号を返す。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。

3.15.30 `interpo_search_2d`

機能

2 次元の漸増配列 (要素数が増えるごとに値が大きくなる配列) の中で、`pointx`, `pointy` を越えない最大の要素番号を出力する (いわゆるガウス記号のような処理を行う)。

書式

```
call interpo_search_2d( x, y, pointx, pointy, i, j, [undeff], [stdopt]
)
```

引数

| | | | |
|---------------------|------------------------------|--------------------|---|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元漸増配列. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 1 次元漸増配列. |
| <code>pointx</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | <code>x</code> について調べたい点. |
| <code>pointy</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | <code>y</code> について調べたい点. |
| <code>i</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | <code>pointx</code> を越えない最大の <code>x(i)</code> に相当する要素番号. |
| <code>j</code> | <code><I></code> | <code>inout</code> | <code>pointy</code> を越えない最大の <code>y(j)</code> に相当する要素番号. |
| <code>undeff</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | 探索範囲外フラグ (後述). デフォルトはゼロ. |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |

定義式

模式図は図??.

備考

- 探索範囲の配列要素値より小さい値を探索しようとした際に `undeff` を返す。この値が設定されずに探索範囲外になった場合は 0 を返す。探索範囲より大きい場合はどのような値をとっても、`x` の最大値に相当する配列要素番号を返す。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。

3.15.31 `interpo_search_3d`

機能

3 次元の漸増配列 (要素数が増えるごとに値が大きくなる配列) の中で、`pointx`, `pointy`, `pointz` を越えない最大の要素番号を出力する (いわゆるガウス記号のような処理を行う)。

書式

```
call interpo_search_3d( x, y, z, pointx, pointy, pointz, i, j, k, &
& [stdopt], [undeff] )
```

引数

| | | | |
|--------|-----------|-------|------------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| y | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| z | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| pointx | <R,DP> | in | x について調べたい点. |
| pointy | <R,DP> | in | y について調べたい点. |
| pointz | <R,DP> | in | z について調べたい点. |
| i | <I> | inout | pointx を越えない最大の x(i) に相当する要素番号. |
| j | <I> | inout | pointy を越えない最大の y(j) に相当する要素番号. |
| k | <I> | inout | pointz を越えない最大の z(k) に相当する要素番号. |
| undeff | <I> | in | 探索範囲外フラグ (後述). デフォルトはゼロ. |
| stdopt | <L> | in | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは .false. |

定義式

模式図は図??.

備考

- 探索範囲の配列要素値より小さい値を探索しようとした際に undeff を返す。
この値が設定されずに探索範囲外になった場合は 0 を返す。探索範囲より大きい場合はどのような値をとっても、x の最大値に相当する配列要素番号を返す。
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、stdopt を .true. に設定しておけば、出力しない。

3.15.32 interpolation_1d

機能

1 次元の線形内挿ルーチン。内挿点と内挿の際に参照する点および、その点における値をもとに、内挿点での値を線形内挿によって計算する。

書式

```
call interpolation_1d( x, y, point, val )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------|-------|----------------|
| x | <R,DP(2)> | in | 内挿点の左右端（後述）. |
| y | <R,DP(2)> | in | x で定義される値（後述）. |
| point | <R,DP> | in | 内挿点. |
| val | <R,DP> | inout | 内挿点での値. |

定義式

模式図は図???. ある座標配列 x_n の各点に対して定義されている値 y_n をもとに、ある 2 点 x_i, x_{i+1} の間の点 x_{ip} における線形内挿値を計算したいとする。このとき、内挿値 y_{ip} は近傍 2 点の値を参照して、以下のように計算される。

$$y_{ip} = y_i + dx * (x_{ip} - x_i), \quad dx = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : x(1), \quad x_{i+1} : x(2), \quad y_i : y(1), \quad y_{i+1} : y(2),$$

$$x_{ip} : point, \quad y_{ip} : val$$

備考

- 最初に、x(1:2) の点がわからない場合は、point の値をもとに、interpo_search_1d ルーチンを用い、これらの点をあらかじめ求めておけばよい。

3.15.33 interpolation_2d

機能

2 次元の線形内挿ルーチン。内挿点と内挿の際に参照する点および、その点における値をもとに、内挿点での値を線形内挿によって計算する。

書式

```
call interpolation_2d( x, y, z, point, val )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------|-------|--|
| x | <R,DP(2)> | in | x 方向内挿点の左右端（後述）. |
| y | <R,DP(2)> | in | y 方向内挿点の左右端（後述）. |
| z | <R,DP(2,2)> | in | x, y で定義される値（後述）. |
| point | <R,DP(2)> | in | x, y での内挿点. point(1) が x, point(2) が y に対応. |
| val | <R,DP> | inout | 内挿点での値. |

定義式

模式図は図??。ある座標配列 x_n, y_m の各点に対して定義されている値 z_{nm} をもとに、ある 4 点 $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1})$ で囲まれる点 (x_p, y_q) における双線形内挿値を計算したいとする。このとき、内挿値 z_{pq} は近傍 4 点の値を参照して、

$$z_{pq} = z_{ij} + \frac{z_{i+1j} - z_{ij}}{x_{i+1} - x_i}(x_p - x_i) + \frac{z_{ij+1} - z_{ij}}{y_{j+1} - y_j}(y_q - y_j) \\ + \frac{[z_{i+1j+1} - z_{ij+1} - z_{i+1j} + z_{ij}]}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}(x_p - x_i)(y_q - y_j)$$

と計算される^{*13}。このとき、引数は以下の対応をする。

$x_i : \mathbf{x}(1), \quad x_{i+1} : \mathbf{x}(2), \quad y_j : \mathbf{y}(1), \quad y_{j+1} : \mathbf{y}(2),$
 $z_{ij} : \mathbf{z}(1,1), \quad z_{i+1j} : \mathbf{z}(2,1), \quad z_{ij+1} : \mathbf{z}(1,2), \quad z_{i+1j+1} : \mathbf{z}(2,2),$
 $x_p : \mathbf{point}(1), \quad y_q : \mathbf{point}(2), \quad z_{pq} : \mathbf{val}$

備考

- 最初に、 $\mathbf{x}(1:2), \mathbf{y}(1:2)$ の点がわからない場合は、 \mathbf{point} の値をもとに、`interpo_search_2d` ルーチンを用い、これらの点をあらかじめ求めておけばよい。

3.15.34 interpolation_3d

機能

3 次元の線形内挿ルーチン。内挿点と内挿の際に参照する点および、その点における値をもとに、内挿点での値を線形内挿によって計算する。

書式

```
call interpolation_3d( x, y, z, u, point, val )
```

引数

| | | | |
|-------|---------------|-------|--|
| x | <R,DP(2)> | in | x 方向内挿点の左右端（後述）。 |
| y | <R,DP(2)> | in | y 方向内挿点の左右端（後述）。 |
| z | <R,DP(2)> | in | z 方向内挿点の左右端（後述）。 |
| u | <R,DP(2,2,2)> | in | x, y, z で定義される値（後述）。 |
| point | <R,DP(3)> | in | x, y, z での内挿点。 point(1) が x, point(2) が y に, point(3) が z に対応。 |
| val | <R,DP> | inout | 内挿点での値。 |

^{*13} この式の導出は??参照。

定義式

模式図は図??。ある座標配列 x_n, y_m, z_l の各点に対して定義されている値 u_{nml} をもとに、ある 8 点で囲まれる点 (x_p, y_q, z_r) における双線形内挿値を計算したいとする。このとき、内挿値 z_{pqr} は近傍 8 点の値を参照して、

$$\begin{aligned}
 u_{pqr} = & u_{ijk} + (u_{i+1jk} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + (u_{ij+1k} - u_{ijk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
 & + (u_{ijk+1} - u_{ijk}) \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
 & + (u_{i+1j+1k} - u_{ij+1k} - u_{i+1jk} + u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
 & + (u_{i+1jk+1} - u_{ik+1} - u_{i+1jk} + u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
 & + (u_{ij+1k+1} - u_{ijk+1} - u_{ij+1k} + u_{ijk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
 & + (u_{i+1j+1k+1} - u_{ij+1k+1} - u_{i+1jk+1} + u_{ijk+1} - u_{i+1j+1k} + u_{ij+1k} + u_{i+1jk} - u_{ijk}) \\
 & \times \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j}
 \end{aligned}$$

と計算される^{*14}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$\begin{aligned}
 x_i &: \mathbf{x}(1), & x_{i+1} &: \mathbf{x}(2), & y_j &: \mathbf{y}(1), & y_{j+1} &: \mathbf{y}(2), \\
 z_k &: \mathbf{z}(1), & z_{k+1} &: \mathbf{z}(2), \\
 z_{ijk} &: \mathbf{z}(1,1,1), & z_{i+1jk} &: \mathbf{z}(2,1,1), & z_{ij+1k} &: \mathbf{z}(1,2,1), & z_{ijk+1} &: \mathbf{z}(1,1,2), \\
 z_{i+1j+1k} &: \mathbf{z}(2,2,1), & z_{i+1jk+1} &: \mathbf{z}(2,1,2), & z_{ij+1k+1} &: \mathbf{z}(1,2,2), & z_{i+1j+1k+1} &: \mathbf{z}(2,2,2), \\
 x_p &: \mathbf{point}(1), & y_q &: \mathbf{point}(2), & z_r &: \mathbf{point}(3), & u_{pqr} &: \mathbf{val}
 \end{aligned}$$

備考

- 最初に、 $\mathbf{x}(1:2)$, $\mathbf{y}(1:2)$, $\mathbf{z}(1:2)$ の点がわからない場合は、 \mathbf{point} の値をもとに、 $\mathbf{interpo_search_3d}$ ルーチンを用い、これらの点をあらかじめ求めておけばよい。

3.15.35 nearest_search_1d

機能

1 次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、 \mathbf{point} に最も近い要素番号を出力する。

^{*14} この式の導出は??参照。

書式

```
call nearest_search_1d( x, point, i )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------|-------|-----------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| point | <R,DP> | in | 調べたい点. |
| i | <I> | inout | point に最も近い x(i) に相当する要素番号. |

定義式

模式図は図??.

備考

なし。

3.15.36 nearest_search_2d

機能

2 次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、pointx, pointy に最も近い要素番号を出力する。

書式

```
call nearest_search_2d( x, y, pointx, pointy, i, j )
```

引数

| | | | |
|--------|-----------|-------|------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| y | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| pointx | <R,DP> | in | x について調べたい点. |
| pointy | <R,DP> | in | y について調べたい点. |
| i | <I> | inout | pointx に最も近い x(i) に相当する要素番号. |
| j | <I> | inout | pointy に最も近い y(j) に相当する要素番号. |

定義式

模式図は図??.

備考

なし。

3.15.37 nearest_search_3d

機能

3次元の漸増配列（要素数が増えるごとに値が大きくなる配列）の中で、pointx, pointy, pointz に最も近い要素番号を出力する。

書式

```
call nearest_search_3d( x, y, z, pointx, pointy, pointz, i, j, k )
```

引数

| | | | |
|--------|-----------|-------|------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1次元漸増配列. |
| y | <R,DP(:)> | in | 1次元漸増配列. |
| z | <R,DP(:)> | in | 1次元漸増配列. |
| pointx | <R,DP> | in | xについて調べたい点. |
| pointy | <R,DP> | in | yについて調べたい点. |
| pointz | <R,DP> | in | zについて調べたい点. |
| i | <I> | inout | pointx に最も近い x(i) に相当する要素番号. |
| j | <I> | inout | pointy に最も近い y(j) に相当する要素番号. |
| k | <I> | inout | pointz に最も近い z(k) に相当する要素番号. |

定義式

模式図は図??.

備考

なし。

3.15.38 nearest_neighbor_search_1d

機能

1次元の任意配列の中で、point に最も近い要素番号を出力する。

書式

```
call nearest_neighbor_search_1d( x, point, i, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------|-------|--------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| point | <R,DP> | in | 調べたい点. |
| i | <I> | inout | point に最も近い x(i) に相当する要素番号. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |

定義式

nearest_search_1d と同じ.

備考

なし.

3.15.39 nearest_neighbor_search_2d

機能

2 次元の任意配列の中で、pointx, pointy に最も近い要素番号を出力する.

書式

```
call nearest_neighbor_search_2d( x, y, pointx, pointy, i, j, [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------|-----------|-------|---------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| y | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| pointx | <R,DP> | in | x について調べたい点. |
| pointy | <R,DP> | in | y について調べたい点. |
| i | <I> | inout | pointx に最も近い x(i) に相当する要素番号. |
| j | <I> | inout | pointy に最も近い y(j) に相当する要素番号. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |

定義式

nearest_search_2d と同じ.

備考

なし.

3.15.40 nearest_neighbor_search_3d

機能

3 次元の任意配列の中で、pointx, pointy, pointz に最も近い要素番号を出力

する。

書式

```
call nearest_neighbor_search_3d( x, y, z, pointx, pointy, pointz, &
i, j, k, [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------|-----------|-------|---------------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| y | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| z | <R,DP(:)> | in | 1 次元漸増配列. |
| pointx | <R,DP> | in | x について調べたい点. |
| pointy | <R,DP> | in | y について調べたい点. |
| pointz | <R,DP> | in | z について調べたい点. |
| i | <I> | inout | pointx に最も近い x(i) に相当する要素番号. |
| j | <I> | inout | pointy に最も近い y(j) に相当する要素番号. |
| k | <I> | inout | pointz に最も近い z(k) に相当する要素番号. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値. |

定義式

nearest_search_3d と同じ.

備考

なし.

3.15.41 stand_devi_1d

機能

2 データの標準偏差を計算するルーチン.

書式

```
call stand_devi_1d( x, anor, [error] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------|-------|----------|
| x | <R,DP(:)> | in | 1 次元データ. |
| anor | <R,DP> | inout | 標準偏差. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値. |

定義式

任意の長さのデータ列 x_n が存在した場合、その標準偏差 stv 以下のように計算される。

$$stv = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

ここで、上線のついた変数は平均値を表す。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.15.42 stand_devi_2d

機能

2 データの標準偏差を計算するルーチン (2 次元配列版)。

書式

```
call stand_devi_2d( x, anor, [error] )
```

引数

| | | | |
|--------------|--------------|-------|----------|
| x | <R,DP(:, :)> | in | 2 次元データ. |
| anor | <R,DP> | inout | 標準偏差. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値. |

定義式

2 次元データを 1 次元データに置き換え、stand_devi ルーチンを用いる。

備考

- 欠損値が定義されている場合は、計算の際、そのデータを計算しない。

3.15.43 stand_devi_3d

機能

2 データの標準偏差を計算するルーチン (3 次元配列版)。

書式

```
call stand_devi_3d( x, anor, [error] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------------|-------|----------|
| x | <R,DP(:, :, :)> | in | 3 次元データ. |
| anor | <R,DP> | inout | 標準偏差. |
| error | <R,DP> | in | 欠損値. |

定義式

3 次元データを 1 次元データに置き換え, `stand_devi` ルーチンを用いる.

備考

- 欠損値が定義されている場合は, 計算の際, そのデータを計算しない.

3.15.44 Move_ave

機能

1 次元配列の移動平均値を計算する。

書式

```
call Move_ave( x, n, y, [error], [offset] )
```

引数

| | | | |
|--------|--------------|-------|-----------------------------------|
| x | <R(:)> | in | 1 次元データ. |
| n | <I> | in | 平均をとる要素数. |
| y | <R(size(x))> | inout | 平均した結果. |
| error | <R> | in | 欠損値 (後述) . |
| offset | <I> | in | 移動平均を開始する要素番号 (後述) . デフォルトは n. |

定義式

任意の長さのデータ列 x_i が存在した場合, その移動平均 y_i は以下のように計算される。ただし, n が移動平均する要素数である。

$$y_i = \frac{1}{n} \sum_{p=i}^{i+n-1} x_p$$

備考

- 移動平均の計算は定義式では上のように記述してあるが, 実装は最初の n 個について平均を計算し, 以降は最古値を引き, 最新値を足すという作業を行っている。

- 引数 `offset` は移動平均値の代入を開始する要素番号を指定する. `offset=m` とすると, 上の定義式において, 全要素数が N のとき, 移動平均は以下のように計算される.

$$y_i = \frac{1}{n} \sum_{p=i}^{i+n-1} x_p (i = m, N - n + m)$$

ここで, $n \geq m$ でなければならない. このとき, 上の要素範囲外に相当する配列には `error` が代入される. デフォルトはゼロ.

3.15.45 Move_anom

機能

1 次元配列の移動平均値からの偏差を計算する。

書式

```
call Move_anom( x, n, y, [error], [offset] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|--------------|-------|---|
| <code>x</code> | <R(:)> | in | 1 次元データ. |
| <code>n</code> | <I> | in | 平均をとる要素数. |
| <code>y</code> | <R(size(x))> | inout | 得られるアノマリ. |
| <code>error</code> | <R> | in | 欠損値 (後述) . |
| <code>offset</code> | <I> | in | 移動平均を開始する要素番号 (後述) . デフォルトは <code>n</code> . |

定義式

任意の長さのデータ列 x_i が存在した場合, その移動平均アノマリ y_i は以下のように計算される. ただし, n が移動平均する要素数である。

$$y_i = x_i - \frac{1}{n} \sum_{p=i}^{i+n-1} x_p$$

備考

- 移動平均の計算は定義式では上のように記述してあるが, 実装は最初の n 個について平均を計算し, 以降は最古値を引き, 最新値を足すという作業を行っている。
- 引数 `offset` は移動平均値の代入を開始する要素番号を指定する. `offset=m` とすると, 上の定義式において, 全要素数が N のとき, 移動平均からの偏差は

以下のように計算される.

$$y_i = x_i - \frac{1}{n} \sum_{p=i}^{i+n-1} x_p (i = m, N - n + m)$$

ここで, $n \geq m$ でなければならない. このとき, 上の要素範囲外に相当する配列には `error` が代入される. デフォルトはゼロ.

3.16 Thermo_Advanced_Function

熱力学変数の処理を行う関数のうち, 他のモジュールに依存した計算を行う関数集.

3.16.1 CAPE

機能

対流有効位置エネルギー (Convective Available Potential Energy) を計算するルーチン.

書式

```
result = CAPE( p, z, qv, temp, z_ref, [undef], [opt] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|---------------------------------|--------------------|----------------------|
| <code>p</code> | <code><R(:)></code> | <code>in</code> | 気圧 [Pa]. |
| <code>z</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 高度 [m]. |
| <code>qv</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| <code>temp</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 温度 [K]. |
| <code>z_ref</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | 基準高度 [m]. |
| 戻り値 | <code><R></code> | <code>inout</code> | CAPE [J/kg]. |
| <code>undef</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | 未定義値. |
| <code>opt</code> | <code><I></code> | <code>in</code> | LNB 計算の際のオプション (後述). |

定義式

$$\int_{p_{\text{LNB}}}^{p_{\text{LFC}}} R(T_p - T_a) d \ln p.$$

ここで, p は気圧, T_a は環境場の温度 (つまり, ゾンデで観測される温度), T_p は断熱減率に従って, 基準高度 z_{ref} から上昇させたパーセルの温度, R は気体定数, LFC は自由対流高度 (Level of Free Convection), LNB は中立浮力高度 (Level of Neutral Buoyancy).

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- 高度データは LFC, LNB の値を計算するためにのみ使用している。
- `undeff` が設定されている高度の値は積算されない。
- もし、基準高度を気圧基準で与える場合は、この関数を呼び出す前に基準気圧での高度を計算し、その値を引数として入れれば OK.
- `opt` 変数については、関数 `z.LNB` でのオプション指定と同じ。

3.16.2 CIN

機能

対流抑制エネルギー (Convective INhibition) を計算するルーチン.

書式

```
result = CIN( p, z, qv, temp, z_ref, [undeff] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|---------------------------------|-------|-----------------|
| <code>p</code> | <code><R(:)></code> | in | 気圧 [Pa]. |
| <code>z</code> | <code><R(size(p))></code> | in | 高度 [m]. |
| <code>qv</code> | <code><R(size(p))></code> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| <code>temp</code> | <code><R(size(p))></code> | in | 温度 [K]. |
| <code>z_ref</code> | <code><R></code> | in | 基準高度 [m]. |
| 戻り値 | <code><R></code> | inout | CIN [J/kg]. |
| <code>undeff</code> | <code><R></code> | in | 未定義値. |

定義式

$$\int_{p_{LFC}}^{p_{ref}} R(T_p - T_a) d \ln p.$$

ここで、 p は気圧、 T_a は環境場の温度 (つまり、ゾンデで観測される温度)、 T_p は断熱減率に従って、基準高度 z_{ref} から上昇させたパーセルの温度、 R は気体定数、LFC は自由対流高度 (Level of Free Convection)、 p_{ref} は z_{ref} での気圧.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。

- 高度データは LFC, LNB の値を計算するためにのみ使用している。
- `undeff` が設定されている高度の値は積算されない。
- もし、基準高度を気圧基準で与える場合は、この関数を呼び出す前に基準気圧での高度を計算し、その値を引数として入れれば OK.

3.16.3 T_LFC

機能

LFC (Level of Free Convection) での温度を計算する関数.

書式

```
result = T_LFC( z_ref, z, temp, p, qv )
```

引数

| | | | |
|--------------------|--------------|-------|-----------------|
| <code>z_ref</code> | <R> | in | 基準高度 [m]. |
| <code>z</code> | <R(size(p))> | in | 高度 [m]. |
| <code>temp</code> | <R(size(p))> | in | 温度 [K]. |
| <code>p</code> | <R(:)> | in | 気圧 [Pa]. |
| <code>qv</code> | <R(size(p))> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| 戻り値 | <R> | inout | LFC での温度 [K]. |

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- ある基準高度での相当温位を上昇させたとき、周囲の飽和相当温位と一致する高度が LFC である。ここでは、周囲の飽和相当温位と交差する 2 点を求め、そこから高度方向に内挿することで高度を決定する。

3.16.4 T_LNB

機能

LNB (Level of Neutral Buoyancy) での温度を計算する関数.

書式

```
result = T_LNB( z_ref, z, temp, p, qv, [option] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|---------------------------------|--------------------|-----------------|
| <code>T_ref</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | 基準高度 [m]. |
| <code>z</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 高度 [m]. |
| <code>temp</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 温度 [K]. |
| <code>p</code> | <code><R(:)></code> | <code>in</code> | 気圧 [Pa]. |
| <code>qv</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| 戻り値 | <code><R></code> | <code>inout</code> | LNB での温度 [K]. |
| <code>option</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | 計算方法 (備考参照). |

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- `option` には数字が入る。本関数では、LNB を計算するために、2 種類の方法をとることができる。1 つめは LFC 高度での飽和相当温位が LFC より上空で再び環境場の飽和相当温位と交わる点を計算し、その高度を LNB とする方法である。しかし、実際の高分解能な高層気象観測データでは、湿度のデータが大きく変動する場合があるため、LFC のすぐ上で LNB を迎えてしまい、正確に計算されない場合がある。そこで、2 つめは高層気象観測データの上端から下向きに飽和相当温位を計算し、最初に LFC での飽和相当温位と同じ値を迎えた高度を LNB とする方法で計算を行う。飽和相当温位は上層では漸増関数となるため、この手法をとっても問題はない。デフォルトでは `option = 1` であり、これは 1 つめの手法による計算である。

3.16.5 precip_water

機能

可降水量を計算する関数.

書式

```
result = precip_water( p, qv, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|--------------|-------|----------------------------|
| p | <R(:)> | in | 気圧 [Pa]. |
| qv | <R(size(p))> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| 戻り値 | <R> | inout | 可降水量 [kg/m ²]. |
| undef | <R> | in | 未定義値. |

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。

3.16.6 qrsg_2_dbz

機能

凝結物混合比から擬似的なレーダ反射強度を計算する関数.

書式

```
result = z_LFC( rho, qr, [qs], [qg], [ns], [ng] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|----------------------------|
| rho | <R> | in | 基準高度 [kg/m ³]. |
| qr | <R> | in | 雨水混合比 [kg/kg]. |
| qs | <R> | in | 雪混合比 [kg/kg]. |
| qg | <R> | in | 霰混合比 [kg/kg]. |
| ns | <R> | in | 雪数濃度 [1/m ³]. |
| ng | <R> | in | 霰数濃度 [1/m ³]. |
| 戻り値 | <R> | inout | レーダ反射強度 [dBZ]. |

定義式

レーダ反射強度 dBZ は

$$\text{dBZ} \equiv 10 \log_{10} Z$$

で定義されている. 本関数では, この Z の計算に Murakami (1990) の (54) 式 :

$$\begin{aligned}
 Z = & \Gamma(7) N_{R0} \left(\frac{\bar{\rho} Q_R}{\pi \rho_W N_{R0}} \right)^{1.75} 10^{18} \\
 & + \Gamma(7) \left[\left| \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2} \right|^2 \middle/ \left| \frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w + 2} \right|^2 \right] \left(\frac{\rho_s}{\rho_W} \right)^2 N_{s0} \left(\frac{\bar{\rho} Q_s}{\pi \rho_s N_{s0}} \right)^{1.75} 10^{18} \\
 & + \Gamma(7) \left[\left| \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2} \right|^2 \middle/ \left| \frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w + 2} \right|^2 \right] \left(\frac{\rho_g}{\rho_W} \right)^2 N_{g0} \left(\frac{\bar{\rho} Q_g}{\pi \rho_g N_{g0}} \right)^{1.75} 10^{18}
 \end{aligned}$$

を用いている。また、上記は 1-moment バルク法を仮定した定式化をされているが、氷相過程について 2-moment バルク法を仮定すると、上式は以下のようになる：

$$\begin{aligned} Z = & \Gamma(7) N_{R0} \left(\frac{\bar{\rho} Q_R}{\pi \rho_W N_{R0}} \right)^{1.75} 10^{18} \\ & + \Gamma(7) \left[\left| \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2} \right|^2 \middle/ \left| \frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w + 2} \right|^2 \right] \left(\frac{\rho_s}{\rho_W} \right)^2 N_s^{-1} \left(\frac{\bar{\rho} Q_s}{\pi \rho_s} \right)^2 10^{18} \\ & + \Gamma(7) \left[\left| \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i + 2} \right|^2 \middle/ \left| \frac{\varepsilon_w - 1}{\varepsilon_w + 2} \right|^2 \right] \left(\frac{\rho_g}{\rho_W} \right)^2 N_g^{-1} \left(\frac{\bar{\rho} Q_g}{\pi \rho_g} \right)^2 10^{18}. \end{aligned}$$

ここで、各記号はそれぞれ以下のとおりである。

| | |
|-----------------|----------------------------|
| $\Gamma(x)$ | ガンマ関数. |
| ε_i | 氷の比誘電率. |
| ε_w | 水の比誘電率. |
| N_{R0} | 雨の数密度 [m^{-4}]. |
| N_{s0} | 雪の数密度 [m^{-4}]. |
| N_{g0} | 霰の数密度 [m^{-4}]. |
| N_s | 雪の数濃度 [m^{-3}]. |
| N_g | 霰の数濃度 [m^{-3}]. |
| ρ_w | 水の密度. |
| ρ_s | 雪の密度. |
| ρ_q | 霰の密度. |
| $\bar{\rho}$ | 基本場の大気密度. |

各物理パラメータは Murakami (1990) に記載されている値を用いるが、記載されていないパラメータについては、理科年表 (2008) の値を参考に行っている。レーダ反射強度の詳細な計算は??参照。

備考

特になし。

3.16.7 z_LCL

機能

LCL (Lifted Condensation Level) を計算する関数。

書式

```
result = z_LCL( z_ref, z, temp, p, qv )
```

引数

| | | | |
|--------------------|---------------------------------|--------------------|-----------------|
| <code>z_ref</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | 基準高度 [m]. |
| <code>z</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 高度 [m]. |
| <code>temp</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 温度 [K]. |
| <code>p</code> | <code><R(:)></code> | <code>in</code> | 気圧 [Pa]. |
| <code>qv</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| 戻り値 | <code><R></code> | <code>inout</code> | LCL 高度 [m]. |

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。

3.16.8 `z_LFC`

機能

LFC (Level of Free Convection) を計算する関数.

書式

```
result = z_LFC( z_ref, z, temp, p, qv )
```

引数

| | | | |
|--------------------|---------------------------------|--------------------|-----------------|
| <code>z_ref</code> | <code><R></code> | <code>in</code> | 基準高度 [m]. |
| <code>z</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 高度 [m]. |
| <code>temp</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 温度 [K]. |
| <code>p</code> | <code><R(:)></code> | <code>in</code> | 気圧 [Pa]. |
| <code>qv</code> | <code><R(size(p))></code> | <code>in</code> | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| 戻り値 | <code><R></code> | <code>inout</code> | LFC 高度 [m]. |

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- ある基準高度での相当温位を上昇させたとき、周囲の飽和相当温位と一致する高度が LFC である。ここでは、周囲の飽和相当温位と交差する 2 点を求め、そこから高度方向に内挿することで高度を決定する。

3.16.9 z_LNB

機能

LNB (Level of Neutral Buoyancy) を計算する関数.

書式

```
result = z_LNB( z_ref, z, temp, p, qv, [option] )
```

引数

| | | | |
|--------|--------------|-------|-----------------|
| z_ref | <R> | in | 基準高度 [m]. |
| z | <R(size(p))> | in | 高度 [m]. |
| temp | <R(size(p))> | in | 温度 [K]. |
| p | <R(:)> | in | 気圧 [Pa]. |
| qv | <R(size(p))> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| 戻り値 | <R> | inout | LNB 温度 [m]. |
| option | <R> | in | 計算方法 (備考参照). |

定義式

断熱図におけるパラメータの詳細は??参照.

備考

- 引数として与える各配列は、要素番号の小さい方がより地表に近い値となるように、つまり配列としてデータを与える際は、地表面から格納していく。
- option には数字が入る。本関数では、LNB を計算するために、2 種類の方法をとることができる。1 つめは LFC 高度での飽和相当温位が LFC より上空で再び環境場の飽和相当温位と交わる点を計算し、その高度を LNB とする方法である。しかし、実際の高分解能な高層気象観測データでは、湿度のデータが大きく変動する場合があるため、LFC のすぐ上で LNB を迎えてしまい、正確に計算されない場合がある。そこで、2 つめは高層気象観測データの上端から下向きに飽和相当温位を計算し、最初に LFC での飽和相当温位と同じ値を迎えた高度を LNB とする方法で計算を行う。飽和相当温位は上層では漸増関数となるため、この手法をとっても問題はない。デフォルトでは option = 1 であり、これは 1 つめの手法による計算である。

3.17 thermo_advanced_routine

熱力学関係の処理ルーチンの中で、スカラー値ではなく配列形式で引数を返す処理を行うルーチンのうち、他のモジュールに依存する処理を行うものを集めたモジュール。

ここで用いている多くの熱力学変数の詳細は??参照。

3.17.1 Brunt_Freq

機能

ブラントバイサラ振動数の 2 乗を計算する.

書式

```
call Brunt_Freq( x, y, z, pt, BV, [undef] )
```

引数

| | | | |
|-------|------------------------------|-------|-------------------|
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標. |
| z | <R(:)> | in | 右手系第三座標. |
| pt | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | 温位 [K]. |
| BV | <R(size(x),size(y),size(z))> | inout | ブラントバイサラ振動数 [/s]. |
| undef | <R> | in | 未定義値. |

定義式

ブラントバイサラ振動数を N とすると、その定義は

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

となる。ここで、 g, θ はそれぞれ重力加速度と温位である。

備考

特になし.

3.17.2 Ertel_PV

機能

エルテルのポテンシャル渦度を計算する.

書式

```
call Ertel_PV( x, y, z, u, v, w, rho, pt, cor, PV, [undef], [sx], [sy],  
[sz] )
```

引数

| | | | |
|-------|------------------------------|-------|------------------------------------|
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標. |
| z | <R(:)> | in | 右手系第三座標. |
| u | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | x 方向の速度. |
| v | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | y 方向の速度. |
| w | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | z 方向の速度. |
| rho | <R(size(z))> | in | 密度 [kg/m ³]. |
| pt | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | 温位 [K]. |
| cor | <R(size(x),size(y))> | in | コリオリパラメータ [/s]. |
| PV | <R(size(x),size(y),size(z))> | inout | エルテルの PV [K/kg s m ²]. |
| undef | <R> | in | 未定義値. |

定義式

エルテルのポテンシャル渦度を P とすると、その定義は

$$P = \frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho}$$

となる。ここで、 ω_a, θ, ρ はそれぞれ絶対渦度、温位、密度である。

備考

特になし.

3.17.3 HEPV

機能

静力学系における任意の高度座標に基づくエルテルのポテンシャル渦度を計算する.

書式

```
call HEPV( x, y, z, u, v, rhoc, pt, cor, PV, [undef], [sx], [sy] )
```

引数

| | | | |
|-------|------------------------------|-------|------------------------------------|
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標. |
| z | <R(:)> | in | 右手系第三座標. |
| u | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | x 方向の速度 [m/s]. |
| v | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | y 方向の速度 [m/s]. |
| rhoc | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | 重み付き密度. |
| pt | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | スカラー保存量 (後述). |
| cor | <R(size(x),size(y))> | in | コリオリパラメータ [/s]. |
| PV | <R(size(x),size(y),size(z))> | inout | エルテルの PV [K/kg s m ²]. |
| undef | <R> | in | 未定義値. |
| sx | <R(size(x),size(y))> | in | x 方向のスケール因子. |
| sy | <R(size(x),size(y))> | in | y 方向のスケール因子. |

定義式

静力学系におけるエルテルのポテンシャル渦度を P とすると、その定義は幾何座標 z 系での定義から任意の鉛直座標 ζ に変換することで

$$P = \left[\omega_{x,\zeta} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)_{\zeta} + \omega_{y,\zeta} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)_{\zeta} + (\omega_{\zeta} + f) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right) \right] \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)$$

となる。ここで、

$$\omega_{x,\zeta} \equiv -\frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad \omega_{y,\zeta} \equiv \frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

である。添字 ζ はその鉛直座標面で評価される空間勾配であることを意味している。また、 λ は流れについて保存する量であり、一般的には温位が採用される。この物理量に依存して、得られる PV の単位は異なることに注意。これらを各引数と対応させると、

$$x, y, \zeta = x, y, z, \quad u, v = u, v, \quad \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \text{rhoc}, \quad \lambda = \text{pt}, \quad f = \text{cor}, \quad P = \text{PV}$$

である。

備考

- 各引数 $x, y, z, \text{rhoc}, \text{pt}$ の単位はどのような次元でも構わないが、それは PV の次元に影響を与えることに注意する。慣例のエルテル PV の次元を出力したい場合は、下の備考にあるスケール因子と合わせて、 $\text{sx} * x, \text{sy} * y$ が [m] の単位を、 pt が [K] の単位を、 rhoc が [m³/kg] の単位を持てばよい。
- スケール因子 sx, sy は水平方向の座標系を [m] 次元にするための係数である。今、このスケール因子を h_x, h_y とすると、定義されている水平空間座標系 x, y の微小変位 $\delta x, \delta y$ に対して、水平方向の幾何距離 $\delta L_x, \delta L_y$ は以下のような関係をもつ：

$$\delta L_x = h_x \delta x, \quad \delta L_y = h_y \delta y.$$

例えば、 x, y 座標が球面の経度、緯度 (ϕ_1, ϕ_2) であるとする、それぞれの微小幾何距離 $\delta L_x, \delta L_y$ はそれぞれ

$$\delta L_x = a \cos \phi_2 \delta \phi_1, \quad \delta L_y = a \delta \phi_2$$

となり、このときのスケール因子はそれぞれ

$$h_x = a \cos \phi_2, \quad h_y = a$$

となる。ここで、 a は地球の半径である。

- 重み付き密度 rhoc は上述のように $\text{rhoc} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ である。 ζ を幾何座標 z にすると、rhoc は密度の逆数に一致する。また、圧力座標 p を ζ に採用すると、静力学の関係から rhoc は $-g$ に一致する。よって、使用する場合は事前にこの rhoc を求めておく必要がある。

3.17.4 HQGPV

機能

静力学系における圧力座標および幾何高度座標に基づく準地衡流ポテンシャル渦度を計算する。

書式

```
call HQGPV( x, y, z, phi, t_ref, cor, PV, [undef], [sx], [sy], [rhoc]
)
```

引数

| | | | |
|-------|------------------------------|-------|--|
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標. |
| z | <R(:)> | in | 右手系第三座標. |
| phi | <R(size(x),size(y),size(z))> | in | z に対応する場 (後述). |
| t_ref | <R(size(z))> | in | 基本場温度 (位) [K] (後述). |
| cor | <R(size(x),size(y))> | in | コリオリパラメータ [/s]. |
| PV | <R(size(x),size(y),size(z))> | inout | 準地衡流 PV [s^{-1}]. |
| undef | <R> | in | 未定義値. |
| sx | <R(size(x),size(y))> | in | x 方向のスケール因子. |
| sy | <R(size(x),size(y))> | in | y 方向のスケール因子. |
| rhoc | <R(size(z))> | in | 基本場密度 [kg/m^3] (後述). |

定義式

静力学系における準地衡流ポテンシャル渦度を P とすると、その定義は圧力座標 p 系での定義：

$$P \equiv \frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \Phi + f + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$$

| 高度座標 (z) | 圧力 | 幾何 |
|---------------|-----------------|---------|
| 診断場 (phi) | ジオポテンシャル [J/kg] | 圧力 [Pa] |
| 基本場温度 (t_ref) | 温度 [K] | 温位 [K] |

および、幾何高度座標 z の定義：

$$P \equiv \frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla_z^2 p + f + f \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{d\theta_0}{dz} \right)^{-1} \theta \right\}$$

でそれぞれ計算される。

各座標系ごとに、引数に与えるべき物理量は異なる。以下にそれを表としてまとめた。

備考

- スケール因子 s_x, s_y は水平方向の座標系を [m] 次元にするための係数である。今、このスケール因子を h_x, h_y とすると、定義されている水平空間座標系 x, y の微小変位 $\delta x, \delta y$ に対して、水平方向の幾何距離 $\delta L_x, \delta L_y$ は以下のような関係をもつ：

$$\delta L_x = h_x \delta x, \quad \delta L_y = h_y \delta y.$$

例えば、 x, y 座標が球面の経度、緯度 (ϕ_1, ϕ_2) であるとする、それぞれの微小幾何距離 $\delta L_x, \delta L_y$ はそれぞれ

$$\delta L_x = a \cos \phi_2 \delta \phi_1, \quad \delta L_y = a \delta \phi_2$$

となり、このときのスケール因子はそれぞれ

$$h_x = a \cos \phi_2, \quad h_y = a$$

となる。ここで、 a は地球の半径である。

- 基本場密度 rhoc が引数としてとられるときに、鉛直座標は幾何高度がとられているとルーチン側で自動判断する。

3.18 thermo_const

熱力学的定数集. 熱力学学における普遍定数を以下の表のように与える. 出典は理科年表 (2008) より.

3.19 thermo_function

熱力学に関する物理量間の変換関数集. 基本的に、スカラー変数を返すような処理はすべてこのモジュールに組み込まれる. それは引数が配列であっても、返す量がスカラー変

| 変数名 | 型 | 設定値 | 変数の意味 | 単位 |
|----------|-----|-------------|------------------|----------------------|
| Cpd | <R> | 1004.0 | 乾燥大気の定圧比熱 | [J/K kg] |
| Cpv | <R> | 1870.0 | 水蒸気の定圧比熱 | [J/K kg] |
| Cvd | <R> | 719.0 | 乾燥大気の定積比熱 | [J/K kg] |
| Cvv | <R> | 1410.0 | 水蒸気の定積比熱 | [J/K kg] |
| LH0 | <R> | 2.5e6 | 水蒸気の潜熱 | [J/kg] |
| LHS | <R> | 2.8e6 | 水蒸気の昇華潜熱 | [J/kg] |
| LF0 | <R> | 3.337e5 | 0°C での水の融解熱 | [J/kg] |
| LFm40 | <R> | 2.357e5 | -40°C での水の融解熱 | [J/kg] |
| Md | <R> | 28.96 | 乾燥大気の分子量 | [kg/kmol] |
| Mv | <R> | 18.0 | 水蒸気の分子量 | [kg/kmol] |
| Rd | <R> | 287.0 | 乾燥大気の気体定数 | [J/K kg] |
| Rv | <R> | 461.0 | 水蒸気の気体定数 | [J/K kg] |
| e0 | <R> | 611.0 | 凝固点での水蒸気圧 | [Pa] |
| ei0 | <R> | 611.73 | 凝固点での氷飽和での水蒸気圧 | [Pa] |
| eps_rdrv | <R> | 287.0/461.0 | Rd/Rv | [1] |
| kalm | <R> | 0.4 | カルマン定数 | [1] |
| p0 | <R> | 1.0e5 | 基準気圧 | [Pa] |
| p00 | <R> | 1.01325e5 | 標準大気圧 | [Pa] |
| rhov | <R> | 1.0e3 | 水の密度 | [kg/m ³] |
| t0 | <R> | 273.15 | 標準気圧での水の凝固点 | [K] |
| ti0 | <R> | 273.16 | 水の三重点での凝固温度 | [K] |
| MFP0 | <R> | 6.6e-8 | p00, t0 での平均自由行程 | [m] |

数である場合についても適用される。

本モジュールで定義されている関数にはすべて、オプション引数で試験的にデバッグオプションが定義されている。本オプションはデフォルト値がゼロで、陽に 1 を指定すれば、その関数が返す値が NaN であれば関数名とモジュール名を標準出力する。2 を指定すれば、その関数の名前と所属するモジュール名、そして返される値を標準出力するようになっている。なお、すべてのルーチンで用いられている変換関数の定義は??参照。また、各計算式の詳細な導出も同様の節参照。

3.19.1 Cefp

機能

水蒸気混合比から有効定圧比熱を計算する。

書式

```
result=Cefp( qv, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|------------------|
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 有効定圧比熱 [J/K kg]. |

定義式

有効定圧比熱を C'_p とすると、

$$C'_p \equiv c_{pd} \left(\frac{1 + q_v c_{pv} / c_{pd}}{1 + q_v} \right). \quad (3.19.1)$$

ここで、 c_{pd}, c_{pv}, q_v はそれぞれ乾燥大気 of 定圧比熱、水蒸気 of 定圧比熱、水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.19.2 Cefv

機能

水蒸気混合比から有効定積比熱を計算する.

書式

result=Cefv(qv, [dl])

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|------------------|
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 有効定積比熱 [J/K kg]. |

定義式

有効定積比熱を C'_v とすると、

$$C'_v \equiv c_{vd} \left(\frac{1 + q_v c_{vv} / c_{vd}}{1 + q_v} \right). \quad (3.19.2)$$

ここで、 c_{vd}, c_{vv}, q_v はそれぞれ乾燥大気 of 定積比熱、水蒸気 of 定積比熱、水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.19.3 Cl

機能

液水の比熱を計算する.

書式

```
result=Cl( T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|--------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 潜熱 [J/K kg]. |

定義式

水の比熱を Cl とすると、

$$Cl(T) = \begin{cases} 4190.0 & T \geq 273.15 \\ 4770.0 + \delta(T - T_{ref}) & T < 273.15 \end{cases} \quad (3.19.3)$$

ここで、

$$\delta = \frac{4770.0 - 4190.0}{40.0}, \quad T_{ref} = 233.15.$$

備考

特になし.

3.19.4 DSE_Emanuel

機能

Emanuel (1994) で定義されている乾燥静的エネルギーを計算する.

書式

```
result=DSE_Emanuel( T, qv, z, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| z | <R> | in | 高度 [m]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 乾燥静的エネルギー [J/kg]. |

定義式

$$h_d \equiv (c_{pd} + rc_{pv})T + (1 + r)gz \quad (3.19.4)$$

から求める. ここで, c_{pd}, c_{pv} はそれぞれ乾燥大気 of 定圧比熱, 水蒸気 of 定圧比熱であり, T, r, g, z はそれぞれ温度, 水蒸気混合比, 重力加速度, 高度を表す.

備考

特になし.

3.19.5 eP_2_qv

機能

水蒸気圧と圧力から水蒸気混合比を計算する.

書式

result=eP_2_qv(e, P, [dl])

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------------|
| e | <R> | in | 大気の水蒸気圧 [Pa]. |
| P | <R> | in | 大気 of 全圧 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気 of 水蒸気混合比 [kg/kg]. |

定義式

$$q_v = \frac{\varepsilon e}{P - e}, \quad \varepsilon = \frac{R_d}{R_v}. \quad (3.19.5)$$

R_d, R_v はそれぞれ, 乾燥大気, 水蒸気 of 気体定数.

備考

特になし.

3.19.6 eP_2_sh

機能

水蒸気圧と圧力から水蒸気比湿を計算する.

書式

result=eP_2_sh(e, P, [dl])

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-------------------|
| e | <R> | in | 大気の水蒸気圧 [Pa]. |
| P | <R> | in | 大気的全圧 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の水蒸気比湿 [kg/kg]. |

定義式

$$q_v = \frac{\varepsilon e}{P}, \quad \varepsilon = \frac{R_d}{R_v}. \quad (3.19.6)$$

R_d, R_v はそれぞれ、乾燥大気、水蒸気の気体定数。

備考

特になし.

3.19.7 es_Bolton

機能

Bolton (1980) の式から温度を元に飽和水蒸気圧を計算する.

書式

```
result=es_Bolton( T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の飽和水蒸気圧 [Pa]. |

定義式

$$e_s(T) = e_0 \exp a \frac{T-T_0}{T-c}, \quad a = 17.67, \quad c = 29.65 \quad (3.19.7)$$

ここで, $T_0 = 273.15$ K, $e_0 = 611.0$ Pa, $e_s(T)$ は飽和水蒸気圧である。

備考

特になし.

3.19.8 es_TD

機能

Bolton (1980) の式の逆算で、水蒸気圧を与えることでそのときの露点温度を計算する.

書式

```
result=es_TD( e, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|---------------|
| e | <R> | in | 大気の水蒸気圧 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の露点温度 [K]. |

定義式

$$T_D = c + a \frac{T_0 - c}{a - \log(e/e_0)}, \quad a = 17.67, \quad c = 29.65 \quad (3.19.8)$$

ここで, $T_0 = 273.15$ K, $e_0 = 611.0$ Pa, T_D は露点温度である。

備考

特になし.

3.19.9 esi_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から温度を元に氷飽和で飽和水蒸気圧を計算する.

書式

```
result=esi_Emanuel( T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の氷飽和水蒸気圧 [Pa]. |

定義式

氷飽和の水蒸気圧を $e^\#$ 、温度を T とすると、

$$\ln e^\# = 23.33086 - \frac{6111.72784}{T} + 0.15215 \ln T. \quad (3.19.9)$$

備考

特になし.

3.19.10 eT_2_RH

機能

水蒸気圧と温度から相対湿度を計算する.

書式

```
result=eT_2_RH( e, T, [opt], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|--|
| e | <R> | in | 大気の水蒸気圧 [Pa]. |
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| opt | <C(1)> | in | 飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の相対湿度 [%]. |

定義式

相対湿度 RH と飽和水蒸気圧 e_s 、水蒸気分圧 e の定義式 :

$$RH \equiv \frac{e}{e_s} \times 100 \quad (3.19.10)$$

を元に計算する。ここで、飽和水蒸気圧は温度から `es_Bolton` を用いて計算した値を用いる。

備考

特になし.

3.19.11 exner_func_dry

機能

乾燥大気におけるエクスナー関数を計算する.

書式

```
result=exner_func_dry( P, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|---------------------|
| P | <R> | in | 大気の圧力 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 乾燥大気のエクスナー関数 [無次元]. |

定義式

エクスナー関数 π_d の定義式：

$$\pi_d = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R_d/C_{pd}} \quad (3.19.11)$$

から求める．ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし．

3.19.12 get_gamma_d

機能

乾燥大気の断熱減率を取得する．

書式

```
result=get_gamma_d( [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|---------------|
| d1 | <I> | in | デバッグオプション． |
| 戻り値 | <R> | inout | 乾燥断熱減率 [K/m]． |

定義式

乾燥断熱減率 Γ_d は定圧比熱 C_{pd} と重力加速度 g を用いて、

$$\Gamma_d = -\frac{g}{C_{pd}}. \quad (3.19.12)$$

備考

特になし．

3.19.13 goff_gratch

機能

Goff-Gratch の式から温度を元に飽和水蒸気圧を計算する．

書式

```
result=goff_gratch( T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の飽和水蒸気圧 [Pa]. |

定義式

$$pow = a \left(\frac{tst}{T} - 1.0 \right) + b \log_{10} \left(\frac{tst}{T} \right) + c \left(10.0^{pa(1.0-T/tst)} - 1.0 \right) + d \left(10.0^{pb(tst/T-1.0)} - 1.0 \right),$$

$$e_s(T) = p_0 \times 10^{pow}. \quad (3.19.13)$$

ここで、

$$a = -7.90298, \quad b = 5.02808, \quad c = -1.3816 \times 10^{-7}, \quad d = 8.1328 \times 10^{-3},$$

$$pa = 11.344, \quad pb = -3.49149, \quad tst = 373.15, \quad p_0 = 1.01325 \times 10^5$$

備考

特になし.

3.19.14 goff_gratch.i

機能

Goff-Gratch の式から温度を元に氷飽和で飽和水蒸気圧を計算する.

書式

```
result=goff_gratch.i( T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の飽和水蒸気圧 [Pa]. |

定義式

$$pow = a \left(\frac{t_{i0}}{T} - 1.0 \right) + b \log_{10} \frac{t_{i0}}{T} + c \left(1.0 - \frac{T}{t_{i0}} \right)$$

$$e_s(T) = p_0 \times 10^{pow}. \quad (3.19.14)$$

ここで、

$$a = -9.09718, \quad b = -3.56654, \quad c = 0.876793,$$

$$p_0 = 611.73, \quad t_{i0} = 273.16.$$

備考

特になし.

3.19.15 hypsometric_form

機能

ある高度における気圧の補正を行う．高度に海面を与えれば海面更正気圧を計算することができる．

書式

```
result=hypsometric_form( p, z, T, [z_t], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|------------------------------|
| p | <R> | in | 基準高度での圧力 [Pa]. |
| z | <R> | in | 基準高度 [m]. |
| T | <R> | in | 基準高度での温度 [K]. |
| z_t | <R> | in | 更正を行う高度 [m]. デフォルト値は 0 m. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | z_t での圧力 [Pa]. |

定義式

対流圏における標準大気の気温減率を $\Gamma = 6.5 \text{ K/km}$ として、高度 z_t での気圧 $p(z_t)$ は、既に気圧、温度の分かっている高度 z での値 $p(z), T(z)$ を用いて、

$$p(z_t) = p(z) \left(\frac{T(z) + \Gamma z}{T(z) + \Gamma z_t} \right)^{g/(\Gamma R_d)} \quad (3.19.15)$$

から求める．ここで、 R_d は乾燥大気における気体定数である．

備考

特になし．

3.19.16 LH

機能

キルヒホッフの式 (??) から潜熱の温度依存性を考慮した潜熱の値を計算する．

書式

```
result=LH( T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|--------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 潜熱 [J/K kg]. |

定義式

$$LH(T) = LH_0 - 232(T - T_0), \quad LH_0 = 2.5 \times 10^5. \quad (3.19.16)$$

ここで, $T_0 = 273.15$ K である。

備考

特になし。

3.19.17 liquid_enthal

機能

Emanuel (1994) の式から温度と水物質から液水エンタルピーを計算する。

書式

```
result=liquid_enthal( T, ql, [qo], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|----------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| ql | <R> | in | 液水混合比 [kg/kg]. |
| qo | <R(:)> | in | 液水以外の水物質混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 液水エンタルピー [J/kg]. |

定義式

液水エンタルピーを k_w すると、

$$k_w \equiv (c_{pd} + r_t c_{pv})T - L_v r_l. \quad (3.19.17)$$

ここで、 c_{pd} , c_{pv} , L_v はそれぞれ乾燥大気、水蒸気の定圧比熱、潜熱であり、 T , r_l , r_t はそれぞれ温度、液水混合比、水物質混合比の総和である。

備考

- 液水以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。水蒸気についてもこの引数に渡す。

3.19.18 moist_enthal

機能

Emanuel (1994) の式から温度と水物質から湿潤エンタルピーを計算する。

書式

```
result=moist_enthal( T, qv, [qo], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|-----------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| qo | <R(:)> | in | 水蒸気以外の水物質混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 湿潤エンタルピー [J/kg]. |

定義式

湿潤エンタルピーを k すると、

$$k = (c_{pd} + r_t c_l)T + L_v r. \quad (3.19.18)$$

ここで、 c_{pd} , c_l , L_v はそれぞれ乾燥大気、水の定圧比熱、潜熱であり、 T, r, r_t はそれぞれ温度、水蒸気混合比、水物質混合比の総和である。

備考

- 水蒸気以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。

3.19.19 MSE_Emanuel

機能

Emanuel (1994) で定義されている湿潤静的エネルギーを計算する。

書式

```
result=MSE_Emanuel( T, qv, z, [qo], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|-----------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| z | <R> | in | 高度 [m]. |
| qo | <R(:)> | in | 水蒸気以外の水物質混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 湿潤静的エネルギー [J/kg]. |

定義式

$$h = (c_{pd} + r_t c_l)T + L_v r + (1 + r_t)gz \quad (3.19.19)$$

から求める. ここで、 c_{pd}, c_l, L_v はそれぞれ乾燥大気、液水の定圧比熱、潜熱であり、 T, r_t, r, g, z はそれぞれ温度、水物質混合比の総和、水蒸気混合比、重力加速度、高度を表す。

備考

- 水蒸気以外の水物質混合比はそのカテゴリごとに別配列要素に格納すること。

3.19.20 qvP_2_e

機能

水蒸気混合比と圧力から水蒸気圧を計算する。

書式

```
result=qvP_2_e( qv, P, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------|
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| P | <R> | in | 大気的全圧 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 水蒸気圧 [Pa]. |

定義式

水蒸気圧を e とすると、

$$e = p \frac{q_v}{\varepsilon + q_v}, \quad \varepsilon = \frac{R_d}{R_v}. \quad (3.19.20)$$

p, q_v はそれぞれ圧力、水蒸気混合比である。

備考

特になし。

3.19.21 qvT_2_Tv

機能

仮温度を定義式から計算する。

書式

```
result=qvT_2_Tv( qv, T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|--------------------|
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 仮温度 [K]. |

定義式

仮温度を T_v とすると、

$$T_v \equiv T \frac{1 + q_v/\varepsilon}{1 + q_v} \quad (3.19.21)$$

ここで, T, q_v はそれぞれ大気の温度、水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.19.22 qvTP_2_RH

機能

水蒸気混合比と温度と圧力から相対湿度を計算する.

書式

result=qvTP_2_RH(qv, T, P, [opt], [dl])

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|--|
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| P | <R> | in | 大気的全圧 [Pa]. |
| opt | <C(1)> | in | 飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の相対湿度 [%]. |

定義式

計算過程は以下である.

$$qvP_2_e(qv,P) \Rightarrow \text{水蒸気圧 } e \Rightarrow eT_2_RH(e,T) \Rightarrow \text{相対湿度}$$

備考

特になし.

3.19.23 qv_2_sh

機能

水蒸気混合比から比湿を計算する.

書式

```
result=qv_2_sh( qv, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------|
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 比湿 [kg/kg]. |

定義式

比湿を sh とすると、

$$sh = \frac{q_v}{1.0 + q_v}. \quad (3.19.22)$$

q_v は水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.19.24 Reff

機能

水蒸気混合比から有効気体定数を計算する.

書式

```
result=Reff( qv, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|------------------|
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 有効気体定数 [J/K kg]. |

定義式

有効気体定数を R' とすると、

$$R' \equiv R_d \frac{1 + q_v/\varepsilon}{1 + q_v}. \quad (3.19.23)$$

ここで、 R_d, q_v はそれぞれ乾燥大気の気体定数、水蒸気混合比である。

備考

特になし.

3.19.25 rhoP_2_T

機能

乾燥大気の状態方程式から, 密度と気圧を与えて温度を得る.

書式

```
result=rhoP_2_T( rho, P, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------------------|
| rho | <R> | in | 大気の密度 [kg/m ³]. |
| P | <R> | in | 大気の圧力 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の温度 [K]. |

定義式

大気の状態方程式 :

$$p = \rho RT.$$

ここで, p, ρ, R, T はそれぞれ大気の圧力、密度、乾燥大気の気体定数、大気の温度である。すべての変数は MKS 単位系で処理される。

備考

特になし.

3.19.26 rhoT_2_P

機能

乾燥大気の状態方程式から, 密度と温度を与えて気圧を得る.

書式

```
result=rhoT_2_P( rho, T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------------------|
| rho | <R> | in | 大気の密度 [kg/m ³]. |
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の気圧 [Pa]. |

定義式

大気の状態方程式：

$$p = \rho RT.$$

ここで、 p, ρ, R, T はそれぞれ大気の圧力、密度、乾燥大気の気体定数、大気の温度である。すべての変数は MKS 単位系で処理される。

備考

特になし。

3.19.27 RHTP_2_qv

機能

相対湿度と温度と圧力から水蒸気混合比を計算する。

書式

```
result=RHTP_2_qv( RH, T, P, [opt], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|--|
| RH | <R> | in | 大気の相対湿度 [%]. |
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| P | <R> | in | 大気的全圧 [Pa]. |
| opt | <C(1)> | in | 飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |

定義式

計算過程は以下である。

$$\text{RHT_2_e}(\text{RH}, \text{T}) \Rightarrow \text{水蒸気圧 } e \Rightarrow \text{eP_2_qv}(e, P) \Rightarrow \text{水蒸気混合比}$$

備考

特になし。

3.19.28 RHT_2_e

機能

相対湿度と温度から水蒸気圧を計算する。

書式

```
result=RHT_2_e( RH, T, [opt], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|--|
| RH | <R> | in | 大気の相対湿度 [%]. |
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| opt | <C(1)> | in | 飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の水蒸気分圧 [Pa]. |

定義式

相対湿度 RH と飽和水蒸気圧 e_s 、水蒸気分圧 e の定義式：

$$RH \equiv \frac{e}{e_s} \times 100 \quad (3.19.24)$$

を元に計算する。ここで、飽和水蒸気圧は温度から `es_Bolton` を用いて計算した値を用いる。

備考

特になし。

3.19.29 sh_2_qv

機能

水蒸気比湿から水蒸気混合比を計算する。

書式

```
result=sh_2_qv( sh, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------|
| sh | <R> | in | 水蒸気比湿 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |

定義式

水蒸気混合比を q_v とすると、

$$q_v = \frac{sh}{1.0 - sh}. \quad (3.19.25)$$

sh は水蒸気比湿である。

備考

特になし.

3.19.30 tetens

機能

tetens の実験式から温度を元に飽和水蒸気圧を計算する.

書式

```
result=tetens( T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-----------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の飽和水蒸気圧 [Pa]. |

定義式

$$e_s(T) = e_0 \times 10^{a \frac{T-T_0}{T-T_0+b}}, \quad \begin{cases} a = 7.5, b = 237.3 & (T \geq T_0) \\ a = 9.5, b = 265.5 & (T < T_0) \end{cases} \quad (3.19.26)$$

ここで, $T_0 = 273.15$ K, $e_s(T)$ は飽和水蒸気圧である。

備考

特になし.

3.19.31 thetaP_2_T

機能

湿位、圧力から温度を計算する.

書式

```
result=thetaP_2_T( theta, P, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-------|-----|-------|-------------|
| theta | <R> | in | 大気の湿位 [K]. |
| P | <R> | in | 大気の圧力 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の温度 [K]. |

定義式

温位の定義式：

$$T = \theta \left(\frac{P}{p_0} \right)^{R_d/C_{pd}} \quad (3.19.27)$$

から求める．ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし．

3.19.32 thetaT_2_P

機能

温位、温度から気圧を計算する．

書式

result=thetaT_2_P(theta, T, [dl])

引数

| | | | |
|-------|-----|-------|-------------|
| theta | <R> | in | 大気の温位 [K]. |
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の圧力 [Pa]. |

定義式

温位の定義式：

$$P = p_0 \left(\frac{T}{\theta} \right)^{C_{pd}/R_d} \quad (3.19.28)$$

から求める．ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし．

3.19.33 theta_dry

機能

乾燥大気における温位を計算する．

書式

result=theta_dry(T, P, [dl])

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|--------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| P | <R> | in | 大気の圧力 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 乾燥大気の温位 [K]. |

定義式

温位の定義式：

$$\theta_d = T \left(\frac{p_0}{P} \right)^{R_d/C_{pd}} \quad (3.19.29)$$

から求める. ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし.

3.19.34 theta_moist

機能

湿潤大気における温位を計算する.

書式

result=theta_moist(T, P, qv, [dl])

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|--------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| P | <R> | in | 大気の圧力 [Pa]. |
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 湿潤大気の温位 [K]. |

定義式

湿潤大気における温位の定義式：

$$\theta_m = T \left(\frac{p_0}{P} \right)^{pow}, \quad pow = \frac{R_d}{C_{pd}} \frac{1 + q_v/\varepsilon}{1 + q_v \times (C_{pv}/C_{pd})} \quad (3.19.30)$$

から求める. ここで、 p_0 はエクスナー関数の基準気圧である。 R_d, C_{pd}, R_v, C_{pv} はそれぞれ、乾燥大気における気体定数と定圧比熱、水蒸気における気体定数と定圧比熱である。

備考

特になし.

3.19.35 `thetae_Bolton`

機能

Bolton (1980) の式から相当温位を計算する.

書式

```
result=thetae_Bolton( T, qv, pres, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-------------------|-----|-------|--------------------|
| <code>T</code> | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| <code>qv</code> | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| <code>pres</code> | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| <code>dl</code> | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 相当温位 [K]. |

定義式

相当温位を θ_e とすると、

$$\theta_e = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{a(1-bq_{vs})} \exp \left\{ q_{vs} \left(\frac{c}{T_{LCL}} \right) (1 + dq_{vs}) \right\}, \quad a = 0.2854, b = 0.28, c = 3376, d = 0.81 \quad (3.19.31)$$

ここで, $T, p_0, p, T_{LCL}, q_{vs}$ はそれぞれ気温、1000 hPa、気圧、LCL 温度、飽和混合比である。

備考

特になし.

3.19.36 `thetae_Emanuel`

機能

Emanuel (1994) の式から相当温位を計算する.

書式

```
result=thetae_Emanuel( T, qv, pres, [qo], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-------------------|--------|-------|-----------------------|
| <code>T</code> | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| <code>qv</code> | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| <code>pres</code> | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| <code>qo</code> | <R(:)> | in | 水蒸気以外の水物質混合比 [kg/kg]. |
| <code>dl</code> | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 相当温位 [K]. |

定義式

相当温位を θ_e とすると、

$$\theta_e = T \left(\frac{p_0}{p_d} \right)^{R_d/(c_{pd}+c_l r_t)} (\mathcal{H})^{-r R_v/(c_{pd}+c_l r_t)} \exp \left[\frac{L_v r}{(c_{pd} + c_l r_t) T} \right] \quad (3.19.32)$$

ここで、 $T, r, r_t, p_0, p, \mathcal{H}$ はそれぞれ温度、水蒸気混合比、水物質混合比の総和、基準圧力、圧力、相対湿度である。また、 $c_{pd}, c_{pv}, c_l, R_d, R_v, L_v$ はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水蒸気の定圧比熱、液水の比熱、乾燥大気の気体定数、水蒸気の気体定数、潜熱である。

備考

- 水蒸気以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。

3.19.37 thetaes_Bolton

機能

Bolton (1980) の式から飽和相当温位を計算する。

書式

```
result=thetaes_Bolton( T, pres, [dl] )
```

引数

| | | | |
|------|-----|-------|-------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 相当温位 [K]. |

定義式

相当温位を θ_{es} とすると、

$$\theta_{es} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{a(1-bq_{vs})} \exp \left\{ q_{vs} \left(\frac{c}{T} \right) (1 + dq_{vs}) \right\}, \quad a = 0.2854, b = 0.28, c = 3376, d = 0.81 \quad (3.19.33)$$

ここで、 T, p_0, p, q_{vs} はそれぞれ気温、1000 hPa、気圧、飽和混合比である。

備考

特になし。

3.19.38 thetal_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から液水温位を計算する。

書式

```
result=thetal_Emanuel( T, ql, pres, [qo], [dl] )
```

引数

| | | | |
|------|--------|-------|----------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| ql | <R> | in | 液水混合比 [kg/kg]. |
| pres | <R> | in | 大気的气圧 [Pa]. |
| qo | <R(:)> | in | 液水以外の水物質混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 液水温位 [K]. |

定義式

液水温位を θ_l とすると、

$$\theta_l \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\chi \left(1 - \frac{r_l}{\varepsilon + r_t} \right)^\chi \times \left(1 - \frac{r_l}{r_t} \right)^{-\gamma} \exp \left[\frac{-L_v r_l}{(c_{pd} + r_t c_{pv}) T} \right], \quad (3.19.34)$$

$$\chi \equiv \left(\frac{R_d + r_t R_v}{c_{pd} + r_t c_{pv}} \right),$$

$$\gamma \equiv \left(\frac{r_t R_v}{c_{pd} + r_t c_{pv}} \right).$$

ここで、 T, r_l, r_t, p_0, p はそれぞれ温度、液水混合比、水物質混合比の総和、基準圧力、圧力である。また、 c_{pd}, c_{pv}, R_d, R_v はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水蒸気の定圧比熱、乾燥大気の気体定数、水蒸気の気体定数である。

備考

- 液水以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。また、ここには水蒸気の混合比も含まれる。

3.19.39 thetalv_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から液水仮温位を計算する。

書式

```
result=thetalv_Emanuel( T, ql, qv, pres, [qo], [dl] )
```

引数

| | | | |
|------|--------|-------|---------------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| ql | <R> | in | 液水混合比 [kg/kg]. |
| qv | <R> | in | 水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| qo | <R(:)> | in | ql, qv 以外の水物質混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 液水仮温度 [K]. |

定義式

液水仮温度を θ_{lv} とすると、

$$\begin{aligned} \theta_{lv} \equiv T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^\chi \left(1 - \frac{r_l}{\varepsilon + r_t} \right)^{\chi-1} \\ \times \left(1 - \frac{r_l}{r_t} \right)^{-\gamma} \exp \left[\frac{-L_v r_l}{(c_{pd} + r_t c_{pv}) T} \right], \end{aligned} \quad (3.19.35)$$

$$\begin{aligned} \chi &\equiv \left(\frac{R_d + r_t R_v}{c_{pd} + r_t c_{pv}} \right), \\ \gamma &\equiv \left(\frac{r_t R_v}{c_{pd} + r_t c_{pv}} \right). \end{aligned}$$

ここで、 T_v, r_l, r_t, p_0, p はそれぞれ仮温度、液水混合比、水物質混合比の総和、基準圧力、圧力である。また、 c_{pd}, c_{pv}, R_d, R_v はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水蒸気の定圧比熱、乾燥大気の気体定数、水蒸気の気体定数である。

備考

- 液水以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。水蒸気についてもこの引数に渡す。

3.19.40 thetaw_Emanuel

機能

Emanuel (1994) の式から湿球温度を計算する。

書式

```
result=thetaw_Emanuel( T, qv, pres, [eps], [dl] )
```

引数

| | | | |
|------|-----|-------|--------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| eps | <R> | in | 収束判定値. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 湿球温位 [K]. |

定義式

偽断熱相当温位を θ_{ep} 、湿球温位を θ_w とすると、

$$\theta_{ep} = \theta_w \exp \left[q_{vs} (1 + 0.81 q_{vs}) \left(\frac{3376}{\theta_w} - 2.54 \right) \right] \quad (3.19.36)$$

という関係がある。この式を二分法による反復計算で θ_w について求める。ここで、 q_{vs} は飽和混合比であり、 θ_{ep} は `thetav_Bolton` を用いて計算する。

備考

- 収束判定値 `eps` はデフォルトでは $1.0\text{e-}6$ で計算される。

3.19.41 TthetavP_2_qv

機能

仮温位から水蒸気混合比を計算する。

書式

```
result=TthetavP_2_qv( T, thetav, pres, [dl] )
```

引数

| | | | |
|--------|-----|-------|-------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| thetav | <R> | in | 仮温位 [K]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 水蒸気混合比 [kg kg-1]. |

定義式

仮温位を θ_v とすると、

$$q_v = \varepsilon \frac{T - \pi \theta_v}{\varepsilon \pi \theta_v - T}. \quad (3.19.37)$$

ここで、 $\text{varepsilon} \equiv R_d/R_v$ 、 $\pi \equiv (p/p_0)^{R_d/C_p}$ であり、 T は温度を表す。

備考

特になし。

3.19.42 thatavqvP_2_T

機能

仮温位と水蒸気から温度を計算する.

書式

```
result=thatavqvP_2_T( thatav, qv, pres, [dl] )
```

引数

| | | | |
|--------|-----|-------|--------------------|
| thatav | <R> | in | 大気の仮温位 [K]. |
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 温度 [K]. |

定義式

仮温位を θ_v とすると、

$$\theta_v \equiv thatav_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_{pd}}. \quad (3.19.38)$$

ここで, $thatav_v, p_0, p$ はそれぞれ仮温度, 基準圧力, 大気の圧力であり, $thatav_v$ は?? で求められた値を元に計算する.

備考

特になし.

3.19.43 TvT_2_qv

機能

仮温度から水蒸気混合比を計算する.

書式

```
result=TvT_2_qv( Tv, T, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|-------------------|
| Tv | <R> | in | 大気の仮温度 [K]. |
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 水蒸気混合比 [kg kg-1]. |

定義式

仮温度を T_v とすると、

$$q_v = \varepsilon \frac{T - T_v}{\varepsilon T_v - T} \quad (3.19.39)$$

ここで, T は大気の温度, $\varepsilon \equiv R_d/R_v$ である。

備考

特になし。

3.19.44 qvTv_2_T

機能

水蒸気と仮温度から温度を計算する。

書式

`result=qvTv_2_T(qv, Tv, [dl])`

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|--------------------|
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| Tv | <R> | in | 大気の仮温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 温度 [K]. |

定義式

仮温度を T_v とすると、

$$T = T_v \frac{1 + q_v}{1 + q_v/\varepsilon} \quad (3.19.40)$$

ここで, T, q_v はそれぞれ大気の温度、水蒸気混合比である。

備考

特になし。

3.19.45 TP_2_qvs

機能

大気の温度と全圧から飽和混合比を計算する。ここで用いる飽和水蒸気圧の計算は `es_Bolton` による式を用いて行われるものとする。

書式

`result=TP_2_qvs(T, P, [opt], [dl])`

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|--|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| P | <R> | in | 大気の圧力 [Pa]. |
| opt | <C(1)> | in | 飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の飽和混合比 [kg/kg]. |

定義式

大気の飽和混合比を q_{vs} とすると、その定義から

$$q_{vs} = \frac{\rho_v}{\rho_d}$$

である。ここで、 ρ_v , ρ_d はそれぞれ水蒸気の密度と乾燥大気の密度である。理想気体の状態方程式から、それぞれの密度は

$$\rho_v = \frac{e_s}{R_v T}, \quad \rho_d = \frac{p_d}{R_d T}$$

である。ここで、 e_s, p_d, R_v, R_d, T はそれぞれ飽和水蒸気圧, 乾燥大気に分圧、水蒸気の気体定数、乾燥大気の気体定数、大気の温度である。よって、

$$q_{vs} = \frac{R_d}{R_v} \frac{e_s}{p - e_s} \quad (3.19.41)$$

となる。ここで、乾燥大気に分圧は大気的全圧 p から飽和水蒸気圧を差し引いたものである。上式は成り立つ。 e_s は温度のみの関数であるため、大気の温度と全圧を与えれば、飽和混合比が得られることがわかる。

備考

特になし。

3.19.46 TP_2_shs

機能

大気の温度と全圧から飽和比湿を計算する。ここで用いる飽和水蒸気圧の計算は `es_Bolton` による式を用いて行われるものとする。

書式

```
result=TP_2_shs( T, P, [opt], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|--|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| P | <R> | in | 大気の圧力 [Pa]. |
| opt | <C(1)> | in | 飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の飽和比湿 [kg/kg]. |

定義式

大気の飽和比湿を q_{vs} とすると、その定義から

$$q_{vs} = \frac{\rho_v}{\rho_d}$$

である。ここで、 ρ_v , ρ_d はそれぞれ水蒸気の密度と乾燥大気の密度である。理想気体の状態方程式から、それぞれの密度は

$$\rho_v = \frac{e_s}{R_v T}, \quad \rho_d = \frac{p_d}{R_d T}$$

である。ここで、 e_s, p_d, R_v, R_d, T はそれぞれ飽和水蒸気圧、乾燥大気分圧、水蒸気の気体定数、乾燥大気の気体定数、大気温度である。よって、

$$q_{vs} = \frac{R_d e_s}{R_v p} \quad (3.19.42)$$

となる。ここで、乾燥大気分圧は大気全圧 p から飽和水蒸気圧を差し引いたものである。上式は成り立つ。 e_s は温度のみの関数であるため、大気温度と全圧を与えれば、飽和比湿が得られることがわかる。

備考

特になし。

3.19.47 TP_2_rho

機能

乾燥大気の状態方程式から、温度と気圧を与えて密度を得る。

書式

```
result=TP_2_rho( T, P, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|----------------------------|
| T | <R> | in | 大気温度 [K]. |
| P | <R> | in | 大気圧力 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気密度 [kg/m ³]. |

定義式

大気の状態方程式：

$$p = \rho RT.$$

ここで、 p, ρ, R, T はそれぞれ大気の圧力、密度、乾燥大気の気体定数、大気の温度である。すべての変数は MKS 単位系で処理される。

備考

特になし。

3.19.48 Tq_2_Trho

機能

温度と水物質から密度温度を計算する。

書式

result=Tq_2_Trho(T, qv, [qo], [dl])

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|-----------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| qo | <R(:)> | in | 水蒸気以外の水物質混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 密度温度 [K]. |

定義式

密度温度を T_ρ とすると、

$$T_\rho \equiv T \frac{1 + r/\varepsilon}{1 + r_t}. \quad (3.19.43)$$

ここで、 T, r, r_t はそれぞれ大気の温度、水蒸気混合比、水物質混合比の総和である。

備考

- 水蒸気以外の水物質混合比はカテゴリごとに別の配列要素に渡す。

3.19.49 TqvP_2_TLCL

機能

Bolton (1980) の式から LCL 高度での温度を計算する。

書式

result=TqvP_2_TLCL(T, qv, pres, [dl])

引数

| | | | |
|------|-----|-------|--------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| d1 | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | LCL での温度 [K]. |

定義式

LCL での気温を T_{LCL} とすると、

$$T_{\text{LCL}} = \frac{c}{a \ln T - \ln e - b} + 55, \quad a = 3.5, b = 4.805, c = 2840 \quad (3.19.44)$$

ここで、 e は水蒸気圧である。

備考

特になし.

3.19.50 TqvP_2_thetae

機能

相当温位を定義式から計算する.

書式

```
result=TqvP_2_thetae( T, qv, pres, [opt], [d1] )
```

引数

| | | | |
|------|--------|-------|--|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| opt | <C(1)> | in | 飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' . |
| d1 | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 相当温位 [K]. |

定義式

相当温位を θ_e とすると、

$$\theta_e = \theta_d \exp \left[\frac{L(T_{\text{LCL}})q_{vs}}{C_{pd}T_{\text{LCL}}} \right] \quad (3.19.45)$$

ここで、 $\theta_d, L, C_{pd}, T_{\text{LCL}}, q_{vs}$ はそれぞれ乾燥大気の温位、水蒸気の潜熱、乾燥定圧比熱、LCL 温度、飽和混合比である。

備考

特になし.

3.19.51 TqvP_2_thetaes

機能

飽和相当温位を定義式から計算する.

書式

```
result=TqvP_2_thetaes( T, pres, [opt], [dl] )
```

引数

| | | | |
|------|--------|-------|--|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| opt | <C(1)> | in | 飽和水蒸気圧計算方法. 'b' = Bolton, 't' = Tetens, デフォルトは 'b' . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 相当温位 [K]. |

定義式

飽和相当温位を θ_{es} とすると、

$$\theta_{es} = \theta_d \exp \left[\frac{L(T)q_{vs}}{C_{pd}T} \right] \quad (3.19.46)$$

ここで, $\theta_d, L, C_{pd}, T, q_{vs}$ はそれぞれ乾燥大気の時位、水蒸気の潜熱、乾燥定圧比熱、温度、飽和混合比である。

備考

特になし.

3.19.52 TqvP_2_thetav

機能

仮温位を定義式から計算する.

書式

```
result=TqvP_2_thetav( T, qv, pres, [dl] )
```

引数

| | | | |
|------|-----|-------|--------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| qv | <R> | in | 大気の水蒸気混合比 [kg/kg]. |
| pres | <R> | in | 大気の気圧 [Pa]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 仮温度 [K]. |

定義式

仮温度を θ_v とすると、

$$\theta_v \equiv T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/C_{pd}}. \quad (3.19.47)$$

ここで, T_v, p_0, p はそれぞれ仮温度, 基準圧力, 大気の圧力であり, T_v は?? で求められた値を元に計算する.

備考

特になし.

3.19.53 TTd_2_RH_Bolton**機能**

Bolton (1980) の式から温度と露点温度に対応する水蒸気圧を求め, その値を元に相対湿度を計算する.

書式

```
result=TTd_2_RH_Bolton( T, Td, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|--------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| Td | <R> | in | 大気の露点温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の相対湿度 [%]. |

定義式

$$RH = \frac{e(T_d)}{e_s(T)} \times 100 \quad (3.19.48)$$

ここで, RH, e, e_s, T, T_d はそれぞれ相対湿度, 水蒸気圧, 飽和水蒸気圧, 温度, 露点温度である. このとき, 水蒸気圧はすべて Bolton (1980) の式を元に計算する.

備考

特になし.

3.19.54 TTd_2_RH_tetens

機能

tetens (1930) の式から温度と露点温度に対応する水蒸気圧を求め、その値を元に相対湿度を計算する。

書式

```
result=TTd_2_RH_tetens( T, Td, [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|--------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| Td | <R> | in | 大気の露点温度 [K]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 大気の相対湿度 [%]. |

定義式

$$RH = \frac{e(T_d)}{e_s(T)} \times 100 \quad (3.19.49)$$

ここで, RH, e, e_s, T, T_d はそれぞれ相対湿度, 水蒸気圧, 飽和水蒸気圧, 温度, 露点温度である. このとき, 水蒸気圧はすべて tetens (1930) の式を元に計算する.

備考

特になし.

3.19.55 WSE_Emanuel

機能

Emanuel (1994) で定義されている液水静的エネルギーを計算する.

書式

```
result=WSE_Emanuel( T, ql, z, [qo], [dl] )
```

引数

| | | | |
|-----|--------|-------|----------------------|
| T | <R> | in | 大気の温度 [K]. |
| ql | <R> | in | 液水混合比 [kg/kg]. |
| z | <R> | in | 高度 [m]. |
| qo | <R(:)> | in | 液水以外の水物質混合比 [kg/kg]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 液水静的エネルギー [J/kg]. |

定義式

$$h_w \equiv (c_{pd} + r_t c_{pv})T - L_v r_l + (1 + r_t)gz \quad (3.19.50)$$

から求める．ここで、 c_{pd}, c_{pv}, L_v はそれぞれ乾燥大気の定圧比熱、水蒸気の定圧比熱、潜熱であり、 T, r_t, r_l, g, z はそれぞれ温度、水物質混合比の総和、液水混合比、重力加速度、高度を表す。

備考

- 液水以外の水物質混合比はそのカテゴリごとに別配列要素に格納すること。また、液水以外なので、水蒸気もこの引数に渡す。

3.19.56 rho_ocean

機能

UNESCO (1981) における海洋の状態方程式 (7) に基づいて、海水の密度を計算する。

書式

result=rho_ocean(P, T, S, [dl])

引数

| | | | |
|-----|-----|-------|------------------------------|
| P | <R> | in | 海水の圧力 [Bar]. |
| T | <R> | in | 海水の温度 [C°]. |
| S | <R> | in | 海水の塩分濃度 [PSU]. |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 海水の密度 [kg m ⁻³]. |

定義式

密度 ρ は UNESCO (1981) の (7) 式：

$$\rho(p, t, S) = \rho(0, t, S) \left[1 - \frac{p}{K(p, t, S)} \right]^{-1} \quad (3.19.51)$$

から求める．ここで、 p, t, S はそれぞれ水圧 (Bar)、水温 (C°)、塩分濃度 (PSU) である。 $\rho(0, t, S)$ は海面における海水の密度、 $K(p, t, S)$ はバルク係数であり、それぞれ

$$\begin{aligned} \rho(0, t, S) &= \rho_w + \sum_{i=0}^4 b_i t^i S + \sum_{i=0}^2 c_i t^i S^{3/2} + d_0 S^2, \\ K(p, t, S) &= K(0, t, S) + Ap + Bp^2 \end{aligned} \quad (3.19.52)$$

で求められる。ただし、各式における係数および記号は以下のような値と定式で構成されている。

$$\rho_w = \sum_{i=0}^5 a_i t^i,$$

$$K(0, t, S) = K_w + \sum_{i=0}^3 f_i t^i S + \sum_{i=0}^2 g_i t^i S^{3/2},$$

$$A = A_w + \sum_{k=0}^2 i_k t^k S + j_0 S^{3/2},$$

$$B = B_w + \sum_{k=0}^2 m_k t^k S,$$

$$K_w = \sum_{k=0}^4 e_k t^k,$$

$$A_w = \sum_{k=0}^3 h_k t^k,$$

$$B_w = \sum_{i=0}^2 k_i t^i,$$

$$a_0 = 999.842594,$$

$$a_1 = 6.793952 \times 10^{-2},$$

$$a_2 = -9.095290 \times 10^{-3},$$

$$a_3 = 1.001685 \times 10^{-4},$$

$$a_4 = -1.120083 \times 10^{-6},$$

$$a_5 = 6.536332 \times 10^{-9},$$

$$b_0 = 8.24493 \times 10^{-1},$$

$$b_1 = -4.0899 \times 10^{-3},$$

$$b_2 = 7.6438 \times 10^{-5},$$

$$b_3 = -8.2467 \times 10^{-7},$$

$$b_4 = 5.3875 \times 10^{-9},$$

$$c_0 = -5.72466 \times 10^{-3},$$

$$c_1 = 1.0227 \times 10^{-4},$$

$$c_2 = -1.6546 \times 10^{-6},$$

$$d_0 = 4.8314 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}e_0 &= 19652.21, \\e_1 &= 148.4206, \\e_2 &= -2.327105, \\e_3 &= 1.360477 \times 10^{-2}, \\e_4 &= -5.155288 \times 10^{-5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_0 &= 54.6746, \\f_1 &= -6.03459 \times 10^{-1}, \\f_2 &= 1.09987 \times 10^{-2}, \\f_3 &= -6.1670 \times 10^{-5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_0 &= 7.944 \times 10^{-2}, \\g_1 &= 1.6483 \times 10^{-2}, \\g_2 &= -5.3009 \times 10^{-4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_0 &= 3.239908, \\h_1 &= 1.43713 \times 10^{-3}, \\h_2 &= 1.16092 \times 10^{-4}, \\h_3 &= -5.77905 \times 10^{-7},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_0 &= 2.2838 \times 10^{-3}, \\i_1 &= -1.0981 \times 10^{-5}, \\i_2 &= -1.6078 \times 10^{-6}, \\j_0 &= 1.91075 \times 10^{-4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_0 &= 8.50935 \times 10^{-5}, \\k_1 &= -6.12293 \times 10^{-6}, \\k_2 &= 5.2787 \times 10^{-8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_0 &= -9.9348 \times 10^{-7}, \\m_1 &= 2.0816 \times 10^{-8}, \\m_2 &= 9.1697 \times 10^{-10}.\end{aligned}$$

備考

特になし.

3.19.57 D26

機能

Lin et al. (2008) における定義に基づいて 26 度深度を計算する.

書式

```
result=D26( P, T, [undef], [dep_thres], [temp_thres], [neg], [dl] )
```

引数

| | | | |
|------------|--------------|-------|--|
| P | <R(:)> | in | 海水の圧力 [dBar] (後述). |
| T | <R(size(P))> | in | 海水の温度 [°C]. |
| undef | <R> | in | 未定義値 (後述). |
| dep_thres | <R> | in | 計算対象最浅深度 (後述) [dBar]. デフォルト = 0.0. |
| temp_thres | <R> | in | 積分最深度での温度閾値 [degC]. デフォルト = 26.0. |
| neg | <L> | in | d26 以浅で 26 °C となる層の扱い (後述). デフォルト = <code>.true.</code> . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 26 度深度 [m (dBar)]. |

定義式

海面から 26 度あるいは `temp_thres` となる初めの深度.

備考

- 第一引数である海水の圧力は単位が dBar であるため, 静水圧を仮定すれば幾何深度と等価であることに注意する.
- 圧力は正值で定義され, 配列要素番号の小さい方が浅くなるように値を格納しなければならない. 温度もそれに対応させる.
- 引数 `dep_thres` は定義されたデータがこの深度より浅い深度まで存在するときに D26 の計算を行うオプションである. デフォルトは 0.0 が指定されており, この値が指定されている場合は, どのような深さから定義されたデータがあっても D26 の計算を試みる. 例えば, `dep_thres=10.0` の場合, データが 11.0 dBar 以深にしか存在しない場合, D26 は 0.0 もしくは `undef` となる.
- 引数 `neg` は z_{26} より浅い深度で 26 度以下となる層が存在した場合, 積分計算を行う際にその層を無視するか計算に含めるかのフラグである. `.true.` の場合, その層の計算は無視する. `.false.` ならその層も計算に含める. デフォルトは `.true.` で設定されている. `.false.` にした場合, 温度差が負値となる場合も積分に含まれるため, 状況によっては返される D26 が負値となる可能性がある. 定義では, z_{26} より浅い深度では成層安定を仮定しているため, 必ず 26 度

より高温となるが, 実際には過渡的な不安定成層プロファイルとなっていることもあることに注意する.

3.19.58 OHC

機能

Lin et al. (2008) における定義に基づいて海洋貯熱量を計算する.

書式

```
result=OHC( P, T, [undef], [dep_thres], [temp_thres], [neg], [dl] )
```

引数

| | | | |
|------------|--------------|-------|--|
| P | <R(:)> | in | 海水の圧力 [dBar] (後述). |
| T | <R(size(P))> | in | 海水の温度 [°C]. |
| undef | <R> | in | 未定義値 (後述). |
| dep_thres | <R> | in | 計算対象最浅深度 (後述) [dBar]. デフォルト = 0.0. |
| temp_thres | <R> | in | 積分最深度での温度閾値 [degC]. デフォルト = 26.0. |
| neg | <L> | in | d26 以浅で 26 °C となる層の扱い (後述). デフォルト = <code>.true.</code> . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |
| 戻り値 | <R> | inout | 海洋貯熱量 [kJ cm ⁻²]. |

定義式

海洋貯熱量 H は Lin et al. (2008) の定義に基づき,

$$H = \rho_0 C_p \int_{z_{26}}^{z_s} (T(z) - T_{26}) dz \quad (3.19.53)$$

から求める. ここで, ρ_0 , C_p はそれぞれ海水の標準密度 1026 kg m⁻³, 海水の定圧熱容量 4178 J K⁻¹kg⁻¹ である. また, $T(z)$ は各深度における海水温, $T_{26} = 26$ °C. z_{26} は $T(z = z_{26}) = T_{26}$ となる深度, z_s は z_{26} から浅い方向に向かって積分を行う任意の深度である. デフォルトでは $T_{26} = 26$ °C であるが, `temp_thres` で変更可能. ここで, z は上向きを正にとられていることに注意する. 一般に海洋貯熱量を計算する場合は海面 $z_s = 0$ が選択される. それぞれ, 各引数との対応は以下のようになる:

$$z \rightarrow P, \quad T(z) \rightarrow T, \quad H \rightarrow \text{OHC}.$$

備考

- 第一引数である海水の圧力は単位が dBar であるため, 静水圧を仮定すれば幾何深度と等価であることに注意する.

- 圧力は正值で定義され, 配列要素番号の小さい方が浅くなるように値を格納しなければならない. 温度もそれに対応させる.
- 引数 `dep_thres` は定義されたデータがこの深度より浅い深度まで存在するときに OHC の計算を行うオプションである. デフォルトは 0.0 が指定されており, この値が指定されている場合は, どのような深さから定義されたデータがあっても OHC の計算を試みる. 例えば, `dep_thres=10.0` の場合, データが 11.0 dBar 以深にしか存在しない場合, OHC は 0.0 もしくは `undef` となる.
- 引数 `neg` は z_{26} より浅い深度で 26 度以下となる層が存在した場合, 積分計算を行う際にその層を無視するか計算に含めるかのフラグである. `.true.` の場合, その層の計算は無視する. `.false.` ならその層も計算に含める. デフォルトは `.true.` で設定されている. `.false.` にした場合, 温度差が負値となる場合も積分に含まれるため, 状況によっては返される OHC が負値となる可能性がある. 定義では, z_{26} より浅い深度では成層安定を仮定しているため, 必ず 26 度より高温となるが, 実際には過渡的な不安定成層プロファイルとなっていることもあることに注意する.

3.20 Trajectory

速度場のデータを与えて、流線、流跡線の計算を行うルーチン集。

3.20.1 Backward_Traject_2d

機能

2 次元ベクトル場のデータからオフラインで後方流跡線解析を行う。

書式

```
call Backward_Traject_2d( dt, stime, step, ini_x, ini_y,  
t, x, y, u, v, traj_x, traj_y, FTF, [opt], [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------|------------------------------|-------|--------------------------------------|
| dt | <R> | in | 計算する時間間隔 [s]. |
| stime | <R> | in | 初期位置での時刻 [s]. |
| step | <I> | in | 計算を行うステップ数. |
| ini_x | <R(:)> | in | 初期位置 x [m]. |
| ini_y | <R(size(ini_x))> | in | 初期位置 y [m]. |
| t | <R(:)> | in | 速度場データのある時刻 (後述). |
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標 [m]. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標 [m]. |
| u | <R(size(x),size(y),size(t))> | in | x 方向のベクトル (後述). |
| v | <R(size(x),size(y),size(t))> | in | y 方向のベクトル (後述). |
| traj_x | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の x 位置座標 [m]. |
| traj_y | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の y 位置座標 [m]. |
| FTF | <L(size(ini_x))> | inout | 計算領域外判定フラグ (後述). |
| opt | <C(*)> | in | 時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム. |
| undef | R | in | 領域外処理用未定義値 (後述). |

定義式

与えられる速度場のデータが時刻 t_1 から t_n までの n 個存在し、その時間間隔は非一様とする。このとき、時刻 t_s から dt ステップで nt 回だけ流跡線を計算するときの模式図が図??である。速度場データのない時刻では、その前後の速度場データから線形内挿を行って速度場を計算している。流跡線の定義式は、座標 (x, y) において、2次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, t)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, t)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, t) = \mathbf{v}(x, y, t) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。流線計算と異なり、速度場が時間の関数でもあるため、パーセルの位置 $\mathbf{x}(x, y, t)$ も時間の関数となっていることがわかる。もし、速度場が定常であれば、速度ベクトルは時間に依存しないので、パーセルの位置ベクトルも時間に依存することはなくなる。このことから、定常な速度場において、流線と流跡線は一致することがわかる。

図??における各変数と引数の対応関係は以下のとおりである。

$$t_s : \text{stime}, \quad dt : \text{dt}, \quad nt : \text{step}, \quad n : \text{size}(t),$$

$$t_i : \text{t}(i)$$

備考

- オプション opt は流跡線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラースキーム.

HO1 ホインスキーム (改良オイラースキーム).

ME1 修正オイラースキーム.

RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム.

RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム.

これらのスキームの詳細については、付録??参照。

- 速度場データ u, v, w および、時刻データ t は時刻が逆向きに入れられなければならない。
- 流跡線が x, y で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する traj_x , traj_y の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `size(ini_x)` を 2 以上にすればその各の初期値に対応した流跡線が計算される。
- `FTF` は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` で指定される各位置と位置座標は速度場 u, v と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$\begin{aligned} h_1 \delta x_1 &= u_1 \delta t, & h_2 \delta x_2 &= u_2 \delta t \\ \Rightarrow \delta x_1 &= \frac{u_1}{h_1} \delta t, & \delta x_2 &= \frac{u_2}{h_2} \delta t \end{aligned}$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度)、

$$x_1 = \lambda, x_2 = \phi, h_1 = a \cos \phi, h_2 = a$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` のうち、`x`, `y` 方向を [rad] 単位で与えたとき、各座標系で [m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u, v を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow u, \quad \frac{v}{a} \rightarrow v$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.20.2 Backward_Traject_3d

機能

3次元ベクトル場のデータからオフラインで後方流跡線解析を行う。

書式

```
call Backward_Traject_3d( dt, stime, step, ini_x, ini_y, ini_z,
t, x, y, z, u, v, w, traj_x, traj_y, traj_z, FTF, [opt], [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------|---|-------|--------------------------------------|
| dt | <R> | in | 計算する時間間隔 [s]. |
| stime | <R> | in | 初期位置での時刻 [s]. |
| step | <I> | in | 計算を行うステップ数. |
| ini_x | <R(:)> | in | 初期位置 x [m]. |
| ini_y | <R(size(ini_x))> | in | 初期位置 y [m]. |
| ini_z | <R(size(ini_x))> | in | 初期位置 z [m]. |
| t | <R(:)> | in | 速度場データのある時刻 (後述). |
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標 [m]. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標 [m]. |
| z | <R(:)> | in | 右手系第三座標 [m]. |
| u | <R(size(x),size(y), size(z), size(t))> | in | x 方向のベクトル (後述). |
| v | <R(size(x),size(y), size(z), size(t))> | in | y 方向のベクトル (後述). |
| w | <R(size(x),size(y), size(z), size(t))> | in | z 方向のベクトル (後述). |
| traj_x | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の x 位置座標 [m]. |
| traj_y | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の y 位置座標 [m]. |
| traj_z | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の z 位置座標 [m]. |
| FTF | <L(size(ini_x))> | inout | 計算領域外判定フラグ (後述). |
| opt | <C(*)> | in | 時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム. |
| undef | R | in | 領域外処理用未定義値 (後述). |

定義式

与えられる速度場のデータが時刻 t_1 から t_n までの n 個存在し、その時間間隔は非一様とする。このとき、時刻 t_s から dt ステップで nt 回だけ流跡線を計算するときの模式図が図??である。速度場データのない時刻では、その前後の速度場データから線形内挿を行って速度場を計算している。流跡線の定義式は、座標 (x, y, z) において、3次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ が定義されており、この速度場に乗って移動する

パーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。流線計算と異なり、速度場が時間の関数でもあるため、パーセルの位置 $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ も時間の関数となっていることがわかる。もし、速度場が定常であれば、速度ベクトルは時間に依存しないので、パーセルの位置ベクトルも時間に依存することはなくなる。このことから、定常な速度場において、流線と流跡線は一致することがわかる。

図??における各変数と引数の対応関係は以下のとおりである。

t_s : stime, dt : dt, nt : step, n : size(t),

t_i : t(i)

備考

- オプション **opt** は流跡線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。
EU1 前方 1 次精度のオイラスキーム.
HO1 ホインスキーム (改良オイラスキーム).
ME1 修正オイラスキーム.
RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム.
RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム.
これらのスキームの詳細については、付録??参照。
- 速度場データ u, v, w および、時刻データ t は時刻が逆向きに入れられなければならない。
- 流跡線が x, y, z で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する **traj_x**, **traj_y**, **traj_z** の要素には **undef** で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- **size(ini_x)** を 2 以上にすればその各の初期値に対応した流跡線が計算される。
- **FTF** は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 **.true.** が領域外に出たことを、 **.false.** は計算領域内に存在することを示す。 **.true.** がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは **undef** の値が入っている。
- 引数 **ini_x**, **ini_y**, **ini_z**, x, y, z , **traj_x**, **traj_y**, **traj_z** で指定される各位置と位置座標は速度場 u, v, w と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$h_1 \delta x_1 = u_1 \delta t, \quad h_2 \delta x_2 = u_2 \delta t, \quad h_3 \delta x_3 = u_3 \delta t$$

$$\Rightarrow \delta x_1 = \frac{u_1}{h_1} \delta t, \quad \delta x_2 = \frac{u_2}{h_2} \delta t, \quad \delta x_3 = \frac{u_3}{h_3} \delta t$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2, 3$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2, x_3) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ, z) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度、 z は高度)、

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \phi, \quad x_3 = z, \quad h_1 = a \cos \phi, \quad h_2 = a, \quad h_3 = 1$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` のうち、`x`, `y` 方向を [rad] 単位、`z` 方向を [m] 単位で与えたとき、各座標系で [m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u , v , w を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}, \quad w \rightarrow \mathbf{w}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.20.3 Forward_Traject_2d

機能

2次元ベクトル場のデータからオフラインで前方流跡線解析を行う。

書式

```
call Forward_Traject_2d( dt, stime, step, ini_x, ini_y, t, x, y, u, v,
traj_x, traj_y, FTF, [opt], [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------|------------------------------|-------|--------------------------------------|
| dt | <R> | in | 計算する時間間隔 [s]. |
| stime | <R> | in | 初期位置での時刻 [s]. |
| step | <I> | in | 計算を行うステップ数. |
| ini_x | <R(:)> | in | 初期位置 x [m]. |
| ini_y | <R(size(ini_x))> | in | 初期位置 y [m]. |
| t | <R(:)> | in | 速度場データのある時刻 (後述). |
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標 [m]. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標 [m]. |
| u | <R(size(x),size(y),size(t))> | in | x 方向のベクトル (後述). |
| v | <R(size(x),size(y),size(t))> | in | y 方向のベクトル (後述). |
| traj_x | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の x 位置座標 [m]. |
| traj_y | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の y 位置座標 [m]. |
| FTF | <L(size(ini_x))> | inout | 計算領域外判定フラグ (後述). |
| opt | <C(*)> | in | 時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム. |
| undef | R | in | 領域外処理用未定義値 (後述). |

定義式

与えられる速度場のデータが時刻 t_1 から t_n までの n 個存在し、その時間間隔は非一様とする。このとき、時刻 t_s から dt ステップで nt 回だけ流跡線を計算するときの模式図が図??である。速度場データのない時刻では、その前後の速度場データから線形内挿を行って速度場を計算している。流跡線の定義式は、座標 (x, y) において、2次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, t)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, t)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, t) = \mathbf{v}(x, y, t) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。流線計算と異なり、速度場が時間の関数でもあるため、パーセルの位置 $\mathbf{x}(x, y, t)$ も時間の関数となっていることがわかる。もし、速度場が定常であれば、速度ベクトルは時間に依存しないので、パーセルの位置ベクトルも時間に依存することはなくなる。このことから、定常な速度場において、流線と流跡線は一致することがわかる。

図??における各変数と引数の対応関係は以下のとおりである。

$$t_s : \text{stime}, \quad dt : \text{dt}, \quad nt : \text{step}, \quad n : \text{size}(t),$$

$$t_i : \text{t}(i)$$

備考

- オプション opt は流跡線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラースキーム.

HO1 ホインスキーム (改良オイラースキーム).

ME1 修正オイラースキーム.

RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム.

RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム.

これらのスキームの詳細については、付録??参照。

- 流跡線が x, y で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する `traj_x`, `traj_y` の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `size(ini_x)` を 2 以上にすればその各の初期値に対応した流跡線が計算される。
- FTF は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` で指定される各位置と位置座標は速度場 \mathbf{u} , \mathbf{v} と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$\begin{aligned} h_1 \delta x_1 &= u_1 \delta t, & h_2 \delta x_2 &= u_2 \delta t \\ \Rightarrow \delta x_1 &= \frac{u_1}{h_1} \delta t, & \delta x_2 &= \frac{u_2}{h_2} \delta t \end{aligned}$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度)、

$$x_1 = \lambda, x_2 = \phi, h_1 = a \cos \phi, h_2 = a$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` のうち、`x`, `y` 方向を [rad] 単位で与えたとき、各座標系で [m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u , v を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.20.4 Forward_Traject_3d

機能

3 次元ベクトル場のデータからオフラインで前方流跡線解析を行う。

書式

```
call Forward_Traject_3d( dt, stime, step, ini_x, ini_y, ini_z,
t, x, y, z, u, v, w, traj_x, traj_y, traj_z, [opt], [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------|---|-------|-------------------------------------|
| dt | <R> | in | 計算する時間間隔 [s]. |
| stime | <R> | in | 初期位置での時刻 [s]. |
| step | <I> | in | 計算を行うステップ数. |
| ini_x | <R(:)> | in | 初期位置 x [m]. |
| ini_y | <R(size(ini_x))> | in | 初期位置 y [m]. |
| ini_z | <R(size(ini_x))> | in | 初期位置 z [m]. |
| t | <R(:)> | in | 速度場データのある時刻 (後述). |
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標 [m]. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標 [m]. |
| z | <R(:)> | in | 右手系第三座標 [m]. |
| u | <R(size(x),size(y), size(z), size(t))> | in | x 方向のベクトル (後述). |
| v | <R(size(x),size(y), size(z), size(t))> | in | y 方向のベクトル (後述). |
| w | <R(size(x),size(y), size(z), size(t))> | in | z 方向のベクトル (後述). |
| traj_x | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の x 位置座標 [m]. |
| traj_y | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の y 位置座標 [m]. |
| traj_z | <R(step,size(ini_x))> | inout | 流跡線の z 位置座標 [m]. |
| FTF | <L(size(ini_x))> | inout | 計算領域外判定フラグ (後述). |
| opt | <C(*)> | in | 時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラスキーム. |
| undef | R | in | 領域外処理用未定義値 (後述). |

定義式

与えられる速度場のデータが時刻 t_1 から t_n までの n 個存在し、その時間間隔は非一様とする。このとき、時刻 t_s から dt ステップで nt 回だけ流跡線を計算するときの模式図が図??である。速度場データのない時刻では、その前後の速度場データから線形内挿を行って速度場を計算している。流跡線の定義式は、座標 (x, y, z) において、3次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。流線計算と異なり、速度場が時間の関数でもあるため、パーセルの位置 $\mathbf{x}(x, y, z, t)$ も時間の関数となっていることがわかる。もし、速度場が定常であれば、速度ベクトルは時間に依存しないので、

パーセルの位置ベクトルも時間に依存することはない。このことから、定常な速度場において、流線と流跡線は一致することがわかる。

図??における各変数と引数の対応関係は以下のとおりである。

$$t_s : \text{stime}, \quad dt : dt, \quad nt : \text{step}, \quad n : \text{size}(t),$$

$$t_i : t(i)$$

備考

- オプション `opt` は流跡線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラスキーム。

HO1 ホインスキーム (改良オイラスキーム)。

ME1 修正オイラスキーム。

RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム。

RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム。

これらのスキームの詳細については、付録??参照。

- 流跡線が x, y, z で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `size(ini_x)` を 2 以上にすればその各の初期値に対応した流跡線が計算される。
- FTF は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` で指定される各位置と位置座標は速度場 u, v, w と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$h_1 \delta x_1 = u_1 \delta t, \quad h_2 \delta x_2 = u_2 \delta t, \quad h_3 \delta x_3 = u_3 \delta t$$

$$\Rightarrow \delta x_1 = \frac{u_1}{h_1} \delta t, \quad \delta x_2 = \frac{u_2}{h_2} \delta t, \quad \delta x_3 = \frac{u_3}{h_3} \delta t$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 $\delta x_i, u_i, h_i, (i = 1, 2, 3)$ はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2, x_3) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに

与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ, z) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度、 z は高度)、

$$x_1 = \lambda, x_2 = \phi, x_3 = z, h_1 = a \cos \phi, h_2 = a, h_3 = 1$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` のうち、`x`, `y` 方向を [rad] 単位、`z` 方向を [m] 単位で与えたとき、各座標系で [m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u, v, w を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}, \quad w \rightarrow \mathbf{w}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.20.5 Stream_Line_2d

機能

2 次元ベクトル場のデータから流線を計算する。

書式

```
call Stream_Line_2d( dt, step, ini_x, ini_y, x, y, u, v, traj_x, traj_y,
FTF, [opt], [undef] )
```

引数

| | | | |
|---------------------|----------------------|--------------------|--------------------------------------|
| <code>dt</code> | <R> | <code>in</code> | 計算する時間間隔 [s]. |
| <code>step</code> | <I> | <code>in</code> | 計算を行うステップ数. |
| <code>ini_x</code> | <R> | <code>in</code> | 初期位置 x [m]. |
| <code>ini_y</code> | <R> | <code>in</code> | 初期位置 y [m]. |
| <code>x</code> | <R(:)> | <code>in</code> | 右手系第一座標 [m]. |
| <code>y</code> | <R(:)> | <code>in</code> | 右手系第二座標 [m]. |
| <code>u</code> | <R(size(x),size(y))> | <code>in</code> | x 方向のベクトル. |
| <code>v</code> | <R(size(x),size(y))> | <code>in</code> | y 方向のベクトル. |
| <code>traj_x</code> | <R(step)> | <code>inout</code> | 流線の x 位置座標 [m]. |
| <code>traj_y</code> | <R(step)> | <code>inout</code> | 流線の y 位置座標 [m]. |
| <code>FTF</code> | <L> | <code>inout</code> | 計算領域外判定フラグ (後述). |
| <code>opt</code> | <C(*)> | <code>in</code> | 時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム. |
| <code>undef</code> | R | <code>in</code> | 領域外処理用未定義値 (後述). |

定義式

流線の定義式は、座標 (x, y) において、2 次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y)$ が定義されており、

この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y) = \mathbf{v}(x, y) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。

備考

- オプション `opt` は流線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラスキーム.

HO1 ホインスキーム (改良オイラスキーム).

ME1 修正オイラスキーム.

RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム.

RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム.

これらのスキームの詳細については、付録??参照。

- 流線が \mathbf{x} , \mathbf{y} で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する `traj_x`, `traj_y` の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- `FTF` は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついていないパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` で指定される各位置と位置座標は速度場 \mathbf{u} , \mathbf{v} と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$\begin{aligned} h_1 \delta x_1 &= u_1 \delta t, & h_2 \delta x_2 &= u_2 \delta t \\ \Rightarrow \delta x_1 &= \frac{u_1}{h_1} \delta t, & \delta x_2 &= \frac{u_2}{h_2} \delta t \end{aligned}$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 δx_i , u_i , h_i , ($i = 1, 2$) はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度)、

$$x_1 = \lambda, x_2 = \phi, h_1 = a \cos \phi, h_2 = a$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `x`, `y`, `traj_x`, `traj_y` のうち、`x`, `y` 方向を `[rad]` 単位で与えたとき、各座標系で `[m s-1]` 単位で測られた速度場 \mathbf{u} , \mathbf{v} を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.20.6 Stream_Line_3d

機能

3 次元ベクトル場のデータから流線を計算する。

書式

```
call Stream_Line_3d( dt, step, ini_x, ini_y, ini_z,
x, y, z, u, v, w, traj_x, traj_y, traj_z, FTF, [opt], [undef] )
```

引数

| | | | |
|--------|----------------------------------|-------|--------------------------------------|
| dt | <R> | in | 計算する時間間隔 [s]. |
| step | <I> | in | 計算を行うステップ数. |
| ini_x | <R> | in | 初期位置 x [m]. |
| ini_y | <R> | in | 初期位置 y [m]. |
| ini_z | <R> | in | 初期位置 z [m]. |
| x | <R(:)> | in | 右手系第一座標 [m]. |
| y | <R(:)> | in | 右手系第二座標 [m]. |
| z | <R(:)> | in | 右手系第三座標 [m]. |
| u | <R(size(x),size(y), size(z))> | in | x 方向のベクトル (後述). |
| v | <R(size(x),size(y), size(z))> | in | y 方向のベクトル (後述). |
| w | <R(size(x),size(y), size(z))> | in | z 方向のベクトル (後述). |
| traj_x | <R(step)> | inout | 流線の x 位置座標 [m]. |
| traj_y | <R(step)> | inout | 流線の y 位置座標 [m]. |
| traj_z | <R(step)> | inout | 流線の z 位置座標 [m]. |
| FTF | <L> | inout | 計算領域外判定フラグ (後述). |
| opt | <C(*)> | in | 時間積分のスキーム (後述). デフォルトは前方オイラースキーム. |
| undef | R | in | 領域外処理用未定義値 (後述). |

定義式

流線の定義式は、座標 (x, y, z) において、3 次元ベクトル $\mathbf{v}(x, y, z)$ が定義されており、この速度場に乗って移動するパーセルの軌跡 $\mathbf{x}(x, y, z)$ を

$$\delta \mathbf{x}(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y, z) \delta t$$

という式の数値積分によって計算するものである。

備考

- オプション `opt` は流線計算の際に行う時間積分の積分スキームを指定するオプションであり、以下の設定が可能である。

EU1 前方 1 次精度のオイラスキーム。

HO1 ホインスキーム (改良オイラスキーム)。

ME1 修正オイラスキーム。

RK3 3 次ルンゲ・クッタキーム。

RK4 4 次ルンゲ・クッタキーム。

これらのスキームの詳細については、付録??参照。

- 流線が x, y, z で指定される領域外に到達した場合、それ以降の時間ステップについては計算を放棄する。そして、放棄された時刻に相当する `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` の要素には `undef` で定義された値が返される。デフォルト設定では、0.0 が返されるようになっている。
- FTF は流跡線解析時に、計算領域外に流されたときの判定フラグ。 `.true.` が領域外に出たことを、 `.false.` は計算領域内に存在することを示す。 `.true.` がついているパーセルについては、その出た時刻ステップ以降が 0.0 もしくは `undef` の値が入っている。
- 引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` で指定される各位置と位置座標は速度場 u, v, w と単位を調整することでデカルト座標系以外の一般直交座標系での計算が可能である。それは、流線計算の定義式を

$$h_1 \delta x_1 = u_1 \delta t, \quad h_2 \delta x_2 = u_2 \delta t, \quad h_3 \delta x_3 = u_3 \delta t$$

$$\Rightarrow \delta x_1 = \frac{u_1}{h_1} \delta t, \quad \delta x_2 = \frac{u_2}{h_2} \delta t, \quad \delta x_3 = \frac{u_3}{h_3} \delta t$$

という形に変形させることで証明される。ここで、 $\delta x_i, u_i, h_i, (i = 1, 2, 3)$ はそれぞれ i 成分のパーセルの位置、オイラー系での速度成分、スケール因子である。今、座標系 (x_1, x_2, x_3) は一般直交座標系を考えている。上式から x_i 系で測られた速度 u_i を、スケール因子を用いて $\frac{u_i}{h_i}$ という形に直してルーチンに与えることで、 δx_i を求めることができる。例えば、薄い球殻座標系 (λ, ϕ, z) の場合 (λ は経度、 ϕ は緯度、 z は高度)、

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \phi, \quad x_3 = z, \quad h_1 = a \cos \phi, \quad h_2 = a, \quad h_3 = 1$$

となるため、引数 `ini_x`, `ini_y`, `ini_z`, `x`, `y`, `z`, `traj_x`, `traj_y`, `traj_z` のうち、 x, y 方向を [rad] 単位、 z 方向を [m] 単位で与えたとき、各座標系で [m s⁻¹] 単位で測られた速度場 u, v, w を

$$\frac{u}{a \cos \phi} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{v}{a} \rightarrow \mathbf{v}, \quad w \rightarrow \mathbf{w}$$

として引数に与えれば、座標系がデカルト系でなくても正確に計算することができる。

3.21 typhoon_analy

台風解析用のスペシャルルーチン集. 主に、デカルト座標系におけるデータを円筒座標系に変換し、接線平均等の処理を行うものの集合体。

3.21.1 grad_wind_pres

機能

傾度風平衡場を満たす気圧場を計算する

書式

```
call grad_wind_pres( r, coril, v, rho, r_ref, p_ref, pres )
```

引数

| | | | |
|-------|-----------------|-------|----------------------------------|
| r | <R,DP(:)> | in | 動径座標 [m]. |
| coril | <R,DP(size(r))> | in | コリオリパラメータ [1/s]. |
| v | <R,DP(size(r))> | in | 軸対称風 [m/s]. |
| rho | <R,DP> | in | サウンディングの密度 [kg/m ³]. |
| r_ref | <R,DP> | in | 積分定数の位置座標 [m]. |
| p_ref | <R,DP> | in | r_ref での気圧 [Pa]. |
| pres | <R,DP(size(r))> | inout | 平衡場の気圧 [Pa]. |

定義式

傾度風平衡：

$$\frac{V_g^2}{r} + fV_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

を満たすように、気圧場の水平分布を計算する。ここで、 V_g は軸対称風、 ρ は大気密度、 p は気圧、 r, z は動径、鉛直座標、 f はコリオリパラメータである。傾度風平衡の式から、軸対称風を元に r 方向に数値積分：

$$\int_{r_{ref}}^r \frac{\partial p}{\partial r} dr = \int_{r_0}^r \rho \left[\frac{V_g^2}{r} + fV_g \right] dr$$

を行う。この式を計算すると、

$$p(r) = p_{ref} + \int_{r_{ref}}^r \rho \left[\frac{V_g^2}{r} + fV_g \right] dr$$

となるので、与えられた軸対称風から各半径における気圧の値が求められる。

備考

なし.

3.21.2 hydro_grad_eqb

機能

サウンディングと軸対称流から静力学・傾度風平衡場の計算を行う。

書式

```
call hydro_grad_eqb( r, z, coril, v, pres_s, rho_s, pres, rho, &
  [error], [dl] )
```

引数

| | | | |
|--------|-------------------------|-------|---|
| r | <R,DP(:)> | in | 動径座標 [m]. |
| z | <R,DP(:)> | in | 鉛直座標 [m]. |
| coril | <R,DP(size(r),size(z))> | in | コリオリパラメータ [1/s]. |
| v | <R,DP(size(r),size(z))> | in | 軸対称流 [m/s]. |
| pres_s | <R,DP(size(z))> | in | サウンディングの気圧 [Pa]. |
| rho_s | <R,DP(size(z))> | in | サウンディングの密度 [kg/m ³]. |
| pres | <R,DP(size(r),size(z))> | inout | 平衡場の気圧 [Pa]. |
| rho | <R,DP(size(r),size(z))> | inout | 平衡場の密度 [kg/m ³]. |
| error | <R,DP> | in | イタレーションの収束条件. デフォルト = 10 ⁻⁵ . |
| dl | <I> | in | デバッグオプション. |

定義式

各高度において、静力学平衡：

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (3.21.54)$$

および、傾度風平衡：

$$\frac{V_g^2}{r} + fV_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.21.55)$$

を満たすように、1次元のサウンディングデータから気圧場、密度場の鉛直構造を修正する。ここで、 V_g は軸対称風、 ρ は大気密度、 p は気圧、 r, z は動径、鉛直座標、 f はコリオリパラメータである。これらの構造が求められれば、理想気体の状態方程式から、温度場も自然に得られる。また、これらの平衡状態が実現しているということは、傾度風平衡版の温度風平衡も同時に成り立つことがわかる^{*15}。

修正の方法は、反復法を用いた収束による修正である。以下にその流れを示す。初期には密度、気圧場を各高度について水平一様に与えておく。また、修正を行う際の基準状態は熱帯低気圧の中心から十分離れた $r(nr)$, $z(nz)$, $nr=size(r)$, $nz=size(z)$ とする。この基準状態は方程式を反復させる際の境界条件となる。

(3.21.54) を (3.21.55) に代入して、 ρ を消去すると、

$$\frac{\partial p}{\partial r} + F(r, z) \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad F(r, z) \equiv \frac{1}{g} \left(\frac{V_g^2}{r} + fV_g \right) \quad (3.21.56)$$

^{*15}傾度風平衡版の温度風の関係式は Emanuel (1986) 等を参照。

となる。一方、 $\partial(3.21.54)/\partial r$, $\partial(3.21.55)/\partial z$ を計算し、それぞれ足し合わせることで p を消去すると、

$$\begin{aligned} F \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial F}{\partial z} &= -\frac{\partial \rho}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(\ln \rho) + F \frac{\partial}{\partial z}(\ln \rho) &= -\frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.21.57)$$

となる。つまり、 p, ρ についてそれぞれ独立な構造方程式が得られたことになる。これらを有限差分法を用いた反復計算によって数値的に値を求める。

これらの式を差分化すると、

$$\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta r} + F_{i,j} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta z} = 0, \quad (3.21.58)$$

$$\frac{\ln \rho_{i+1,j} - \ln \rho_{i,j}}{\Delta r} + F_{i,j} \frac{\ln \rho_{i,j+1} - \ln \rho_{i,j}}{\Delta z} = -\frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\Delta z}, \quad (3.21.59)$$

となる。ここで、 Δr , Δz は動径、鉛直方向の格子間隔、 i, j は動径、鉛直方向の格子番号を表す。なお、元の方程式は 1 階の 2 次元偏微分方程式であるため、 r, z のそれぞれについて 1 箇所の境界条件を設定すれば解が一意に求まる。先述した基準点がこの境界条件に相当し、本ルーチンでは上端 ($j = nz$)、遠方 ($i = nr$) で境界となる。よって、上記の有限差分では 1 次精度の後方差分を用いた。この差分法なら、境界条件を参照点としてそれ以外の点を全て求めることができる。上式を格子点 (i, j) で整理すると、

$$p_{i,j} = (\Delta z + F_{i,j} \Delta r)^{-1} [p_{i+1,j} \Delta z + F_{i,j} p_{i,j+1} \Delta r], \quad (3.21.60)$$

$$\ln \rho_{i,j} = (\Delta z + F_{i,j} \Delta r)^{-1} [\ln \rho_{i+1,j} \Delta z + F_{i,j} \ln \rho_{i,j+1} \Delta r + (F_{i,j+1} - F_{i,j}) \Delta r], \quad (3.21.61)$$

となる。収束計算の初期値は引数で与えられるサウンディングデータを水平一様に設定する。繰り返しにおける収束判定は 1 ステップ前との変化量が `error` 以下なら反復を終了するように設定している。

備考

なし。

3.21.3 Cart_conv_scal

機能

任意のスカラー量を円筒座標系からデカルト座標系に変換する。

書式

```
call Cart_conv_scal( r, theta, v, x, y, xc, yc, u, &
  [undef], [undefg], [undefgc], &
  [stdopt], [axis] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|--|--------------------|---|
| <code>r</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の動径座標. |
| <code>theta</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の接線座標 [rad]. |
| <code>v</code> | <code><R,DP(size(r),size(theta))></code> | <code>in</code> | 変換前の値. |
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第一座標. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第二座標. |
| <code>xc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | x 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>yc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | y 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>u</code> | <code><R,DP(size(x),size(y))></code> | <code>inout</code> | 右手系での変換後の スカラー. |
| <code>[undef]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均可能半径外の値 (後述). |
| <code>[undefg]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均内での欠損値. |
| <code>[undefgc]</code> | <code><C(3)></code> | <code>in</code> | <code>undefg</code> が設定 されたときの処理 (後述). |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |
| <code>axis</code> | <code><C(2)></code> | <code>in</code> | 座標系 (後述). |

定義式

円筒座標系 (r, θ) で定義されているスカラーデータを, その原点が 2 次元デカルト座標系 (x, y) の点 (x_c, y_c) に位置するようにデカルト座標系に変換する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ をデカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ に変換する式は

$$u_{i,j} = v_{m,n} + \frac{v_{m+1,n} - v_{m,n}}{r_{m+1} - r_m}(r_m - r_m) + \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\theta_{n+1} - \theta_n}(\theta_n - \theta_n) \\ + [v_{m+1,n+1} - v_{m,n+1} - v_{m+1,n} + v_{m,n}] \frac{(r_m - r_m)(\theta_n - \theta_n)}{(r_{m+1} - r_m)(\theta_{n+1} - \theta_n)}$$

である ^{*16}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_{m,n} : \mathbf{v},$$

$$r_m : \mathbf{r}, \quad \theta_n : \mathbf{theta}$$

備考

- 座標間の概念図は図?? 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合, デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが, `stdopt` を `.true.` に設定しておけば, 出力しない.

^{*16} この式は??参照。

- オプション引数 `undef` は変換可能半径外に存在する変換量の配列に代入される未定義値である。ここで、変換可能半径とは、円筒座標系で変換を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は変換ができない。このはみ出し部分の、変換が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。
- オプション引数 `undefgc` は変換領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように変換を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は変換領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入れられる。この状況において、`undefgc` の値は
 - inc** 座標変換を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は変換操作に入れずに、有効値が入っている点のみで変換操作を行う。
 - err** 座標変換を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、変換値は `undefg` となる。`undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、**inc** として計算される。
- 引数 `axis` は現在サポートされていない。

3.21.4 Cart_mean_scal

機能

任意のスカラー量を接線平均した円筒座標系から 2 次元デカルト座標系に変換する。

書式

```
call Cart_mean_scal( r, v, x, y, xc, yc, u, &  
[undef], [undefg], [undefgc], &  
[stdopt], [axis] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|--|--------------------|---|
| <code>r</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の動径座標. |
| <code>v</code> | <code><R,DP(size(r))></code> | <code>in</code> | 変換前の値. |
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第一座標. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第二座標. |
| <code>xc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | x 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>yc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | y 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>u</code> | <code><R,DP(size(x),size(y))></code> | <code>inout</code> | 右手系での変換後の スカラー. |
| <code>[undef]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均可能半径外の値 (後述). |
| <code>[undefg]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均内での欠損値. |
| <code>[undefgc]</code> | <code><C(3)></code> | <code>in</code> | <code>undefg</code> が設定 されたときの処理 (後述). |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |
| <code>axis</code> | <code><C(2)></code> | <code>in</code> | 座標系 (後述). |

定義式

1 次元の動径方向円筒座標系 (r) で定義されているスカラーデータを, その原点が 2 次元デカルト座標系 (x, y) の点 (x_c, y_c) に位置するようにデカルト座標系に変換する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

円筒座標系 (r_m) で定義されるスカラー量 v_m をデカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ に変換する式は

$$u_{i,j} = v_m + \frac{v_{m+1} - v_m}{r_{m+1} - r_m}(r_{m+1} - r_m)$$

である^{*17}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_m : \mathbf{v}, \quad r_m : \mathbf{r}$$

備考

- 座標間の概念図は図?? 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合, デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが, `stdopt` を `.true.` に設定しておけば, 出力しない.
- オプション引数 `undef` は変換可能半径外に存在する変換量の配列に代入される未定義値である。ここで, 変換可能半径とは, 円筒座標系で変換を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし, この半径が計算領域 `x, y` の外に出た場合, はみ出している部分は変換ができない。このはみ出し部分の, 変換が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし, `undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。

^{*17}この式は??参照。

- オプション引数 `undefgc` は変換領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように変換を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は変換領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入れられる。この状況において、`undefgc` の値は
 - inc** 座標変換を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は変換操作に入れずに、有効値が入っている点のみで変換操作を行う。
 - err** 座標変換を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、変換値は `undefg` となる。`undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、**inc** として計算される。
- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する。変換前のデータがデカルト座標系であるなら、`axis='xy'` と指定する。球面緯度経度座標系であるなら、`axis='ll'` と指定する。デフォルトではデカルト座標系が指定されている。

3.21.5 tangent_conv_scal

機能

任意のスカラー量をデカルト座標系から円筒座標系に変換する。

書式

```
call tangent_conv_scal( x, y, xc, yc, u, r, theta, v, &
  [undef], [undefg], [undefgc], &
  [stdopt], [axis] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|--|--------------------|---|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第一座標. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第二座標. |
| <code>xc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | x 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>yc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | y 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>u</code> | <code><R,DP(size(x),size(y))></code> | <code>in</code> | 右手系での変換前の スカラー. |
| <code>r</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の動径座標. |
| <code>theta</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の接線座標 [rad]. |
| <code>v</code> | <code><R,DP(size(r),size(theta))></code> | <code>inout</code> | 変換後の値. |
| <code>[undef]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均可能半径外の値 (後述). |
| <code>[undefg]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均内での欠損値. |
| <code>[undefgc]</code> | <code><C(3)></code> | <code>in</code> | <code>undefg</code> が設定 されたときの処理 (後述). |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |
| <code>axis</code> | <code><C(2)></code> | <code>in</code> | 座標系 (後述). |

定義式

2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に、スカラーデータを変換し、 θ 方向に平均化する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

デカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ を円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ に変換する式は

$$v_{m,n} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}(x_m - x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}(y_n - y_j) \\ + [u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}] \frac{(x_m - x_i)(y_n - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

である^{*18}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_{m,n} : \mathbf{v}, \\ r_m : \mathbf{r}, \quad \theta_n : \mathbf{theta}$$

備考

- 座標間の概念図は図 3.1 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領

^{*18}この式は??参照。

域 x, y の外に出た場合, はみ出している部分は平均ができない. このはみ出し部分の, 平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている. もし, `undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される.

- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において, 欠損値 `undefg` が設定されている場合, どのように平均を行うかを判定する. このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない. `undefg` は接線平均領域内において, デカルト座標系で欠損値が存在する場合, デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入れられる. この状況において, `undefgc` の値は

inc 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, その点での値は平均操作に入れずに, 有効値が入っている点のみで平均操作を行う. これに対応して, 内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる.

err 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, 平均値は `undefg` となる. アノマリ計算においては, この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる.

`undefg` が設定されており, `undefgc` が指定されていないデフォルトでは, **inc** として計算される.

- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する. 変換前のデータがデカルト座標系であるなら, `axis='xy'` と指定する. 球面緯度経度座標系であるなら, `axis='ll'` と指定する. デフォルトではデカルト座標系が指定されている.

3.21.6 tangent_mean_anom_scal

機能

任意のスカラー量をデカルト座標系から円筒座標系に変換し, 接線方向に平均したアノマリーを計算する.

書式

```
call tangent_mean_anom_scal( x, y, xc, yc, u, r, theta, v, &
                             [undef], [undefg], [undefgc], &
                             [stdopt], [axis] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|--|--------------------|--|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第一座標. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第二座標. |
| <code>xc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | x 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>yc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | y 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>u</code> | <code><R,DP(size(x),size(y))></code> | <code>in</code> | 右手系でのアノマリをとるスカラー. |
| <code>r</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の動径座標. |
| <code>theta</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の接線座標 [rad]. |
| <code>v</code> | <code><R,DP(size(r),size(theta))></code> | <code>inout</code> | アノマリ値. |
| <code>[undef]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均可能半径外の値 (後述). |
| <code>[undefg]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均内での欠損値. |
| <code>[undefgc]</code> | <code><C(3)></code> | <code>in</code> | <code>undefg</code> が設定されたときの処理 (後述). |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |
| <code>axis</code> | <code><C(2)></code> | <code>in</code> | 座標系 (後述). |

定義式

2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に、スカラーデータを変換し、 θ 方向に平均化する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

デカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ を円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ に変換する式は

$$v_{m,n} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}(x_m - x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}(y_n - y_j) \\ + [u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}] \frac{(x_m - x_i)(y_n - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

である^{*19}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_{m,n} : \mathbf{v}, \\ r_m : \mathbf{r}, \quad \theta_n : \mathbf{theta}$$

備考

- 座標間の概念図は図 3.1 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領

^{*19}この式は??参照。

域 x, y の外に出た場合, はみ出している部分は平均ができない. このはみ出し部分の, 平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている. もし, `undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される.

- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において, 欠損値 `undefg` が設定されている場合, どのように平均を行うかを判定する. このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない. `undefg` は接線平均領域内において, デカルト座標系で欠損値が存在する場合, デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入れられる. この状況において, `undefgc` の値は

inc 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, その点での値は平均操作に入れずに, 有効値が入っている点のみで平均操作を行う. これに対応して, 内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる.

err 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, 平均値は `undefg` となる. アノマリ計算においては, この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる.

`undefg` が設定されており, `undefgc` が指定されていないデフォルトでは, **inc** として計算される.

- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する. 変換前のデータがデカルト座標系であるなら, `axis='xy'` と指定する. 球面緯度経度座標系であるなら, `axis='ll'` と指定する. デフォルトではデカルト座標系が指定されている.

3.21.7 tangent_mean_anom_scal_Cart

機能

任意のスカラー量を接線方向に平均したアノマリーを計算し, デカルト座標系に戻す.

書式

```
call tangent_mean_anom_scal( x, y, xc, yc, scal, r, theta, scal_anom,
                             [undef], [undefg], [undefgc], [stdopt], [axis] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|--|--------------------|--|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | デカルト第一座標. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | デカルト第二座標. |
| <code>xc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | デカルト x 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>yc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | デカルト y 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>scal</code> | <code><R,DP(size(x),size(y))></code> | <code>in</code> | デカルト系でのアノマリをとるスカラー. |
| <code>r</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の動径座標. |
| <code>theta</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の接線座標 [rad]. |
| <code>scal_anom</code> | <code><R,DP(size(x),size(y))></code> | <code>inout</code> | デカルト系でのアノマリの値. |
| <code>[undef]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均可能半径外の値 (後述). |
| <code>[undefg]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均内での欠損値. |
| <code>[undefgc]</code> | <code><C(3)></code> | <code>in</code> | <code>undefg</code> が設定されたときの処理 (後述). |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |
| <code>axis</code> | <code><C(2)></code> | <code>in</code> | 座標系 (後述). |

定義式

`tangent_mean_scal` で計算した接線平均値を用いて, 元のデカルト系での値のアノマリを計算する. デカルト座標系の各点での円筒座標系中心からの距離を元に, その距離の近接両端での接線平均値を内挿処理し, その内挿値をそのデカルト座標系での接線平均値とする.

備考

- 探索点が探索範囲外に存在している場合, デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが, `stdopt` を `.true.` に設定しておけば, 出力しない.
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である. ここで, 接線平均可能半径とは, 円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである. もし, この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合, はみ出している部分は平均ができない. このはみ出し部分の, 平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている. もし, `undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される.
- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において, 欠損値 `undefg` が設定されている場合, どのように平均を行うかを判定する. このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない. `undefg` は接線平均領域内において, デカルト座標系で欠損値が存在する場合, デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入られる. この状況において, `undefgc` の値は
 - `inc` 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, その点での値は平均操作に入れずに, 有効値が入っている点のみで平均操作を行う. これに対応して, 内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる.

err 接線平均を行う際, 円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば, 平均値は `undefg` となる. アノマリ計算においては, この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる.

`undefg` が設定されており, `undefgc` が指定されていないデフォルトでは, `inc` として計算される.

- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する. 変換前のデータがデカルト座標系であるなら, `axis='xy'` と指定する. 球面緯度経度座標系であるなら, `axis='ll'` と指定する. デフォルトではデカルト座標系が指定されている.

3.21.8 `tangent_mean_anom_vec`

機能

デカルト座標系で定義された任意の 2 次元ベクトルをデカルト座標系から円筒座標系に変換し, 接線方向に平均し, そのアノマリをとる. このとき, 判別フラグを用いることで, 動径方向成分と接線方向成分に分割できる.

書式

```
call tangent_mean_anom_vec( charc, x, y, xc, yc, u1, u2, r, theta, v,  
  
[undef], [undefg], [undefgc], [stdopt] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-----------------------------|-------|--|
| charc | <C(6)> | in | 接線成分か動径成分の どちらに平均するか. "scalar" = 動径外向き成分. "vector" = 接線反時計成分. |
| x | <R,DP(:)> | in | デカルト第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | デカルト第二座標. |
| xc | <R,DP> | in | デカルト x 系での円筒座標原点 (後述). |
| yc | <R,DP> | in | デカルト y 系での円筒座標原点 (後述). |
| u1 | <R,DP(size(x),size(y))> | in | デカルト系での平均するベクトル. x 成分. |
| u2 | <R,DP(size(x),size(y))> | in | デカルト系での平均するベクトル. y 成分. |
| r | <R,DP(:)> | in | 円筒座標系の動径座標. |
| theta | <R,DP(:)> | in | 円筒座標系の接線座標 [rad]. |
| v | <R,DP(size(r),size(theta))> | inout | アノマリの値. |
| [undef] | <R,DP> | in | 接線平均可能半径外の値 (後述). |
| [undefg] | <R,DP> | in | 接線平均内での欠損値. |
| [undefgc] | <C(3)> | in | undefg が設定 されたときの処理 (後述). |
| stdopt | <L> | in | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは .false. |

定義式

行う処理は `tangent_mean_scal` とほとんど同じ. 最初にフラグ `charc` でデカルト系ベクトルを円筒系ベクトルに変換し, そのうちフラグ成分のみをスカラーとして計算すれば, 上の処理が実現される. ここで, 任意のデカルト系におけるベクトルを $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ とし, 円筒座標系の位置ベクトルを $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ とする. ここで, \mathbf{e}_r は動径方向外向きの基底ベクトルである. このとき, この位置ベクトルはデカルト座標系で表現すると, $\mathbf{r} = (x, y)$ で表現できるので, デカルト座標系同士の内積は

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{r}| |\mathbf{u}_r|$$

という量を表現することになる. ここで, \mathbf{u}_r はデカルト系でのベクトルの動径成分である. よって, これを距離で割れば動径方向外向きのベクトルが得られることになる. 接線方向の成分もこれと同様の考え方で, 位置ベクトルとデカルト系ベクトルの外積から反時計回りを正とする円筒座標系の接線成分を抽出することができる. 2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に, スカラーデータを変換し, θ 方向に平均化する. 座標系の変換は双線形内挿を行う.

備考

- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
 - オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は平均ができない。このはみ出し部分の、平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。
 - オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように平均を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は接線平均領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への内挿の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入れられる。この状況において、`undefgc` の値は
 - inc** 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は平均操作に入れずに、有効値が入っている点のみで平均操作を行う。これに対応して、内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる。
 - err** 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、平均値は `undefg` となる。アノマリ計算においては、この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる。
- `undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、`inc` として計算される。

3.21.9 tangent_mean_scal

機能

任意のスカラー量をデカルト座標系から円筒座標系に変換し、接線方向に平均する。

書式

```
call tangent_mean_scal( x, y, xc, yc, u, r, theta, v, &  
[undef], [undefg], [undefgc], &  
[stdopt], [axis] )
```

引数

| | | | |
|------------------------|--|--------------------|--|
| <code>x</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第一座標. |
| <code>y</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 右手系第二座標. |
| <code>xc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | x 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>yc</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | y 系での円筒座標原点 (後述). |
| <code>u</code> | <code><R,DP(size(x),size(y))></code> | <code>in</code> | 右手系での平均するスカラー. |
| <code>r</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の動径座標. |
| <code>theta</code> | <code><R,DP(:)></code> | <code>in</code> | 円筒座標系の接線座標 [rad]. |
| <code>v</code> | <code><R,DP(size(r))></code> | <code>inout</code> | 接線平均したスカラー. |
| <code>[undef]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均可能半径外の値 (後述). |
| <code>[undefg]</code> | <code><R,DP></code> | <code>in</code> | 接線平均内での欠損値. |
| <code>[undefgc]</code> | <code><C(3)></code> | <code>in</code> | <code>undefg</code> が設定されたときの処理 (後述). |
| <code>stdopt</code> | <code><L></code> | <code>in</code> | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |
| <code>axis</code> | <code><C(2)></code> | <code>in</code> | 座標系 (後述). |

定義式

2次元デカルト座標系 (x, y) における点 (x_c, y_c) を原点とする円筒座標系 (r, θ) に、スカラーデータを変換し、 θ 方向に平均化する。座標系の変換は双線形内挿を行う。

デカルト系 (x_i, y_j) で定義されたあるスカラー量 $u_{i,j}$ を円筒座標系 (r_m, θ_n) で定義されるスカラー量 $v_{m,n}$ に変換する式は

$$v_{m,n} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}(x_m - x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}(y_n - y_j) \\ + [u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}] \frac{(x_m - x_i)(y_n - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}$$

である^{*20}。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_i : \mathbf{x}, \quad y_j : \mathbf{y}, \quad u_{i,j} : \mathbf{u}, \quad v_{m,n} : \mathbf{v},$$

$$r_m : \mathbf{r}, \quad \theta_n : \mathbf{theta}$$

備考

- 座標間の概念図は図 3.1 参照.
- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない.
- オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は平均ができない。このはみ出し

^{*20} この式は??参照。

部分の、平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。

- オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように平均を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていない場合は機能しない。`undefg` は接線平均領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への変換の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の内挿点は `undefg` の値が入れられる。この状況において、`undefgc` の値は

inc 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は平均操作に入れずに、有効値が入っている点のみで平均操作を行う。これに対応して、内挿点が欠損の場合は平均も欠損となる。

err 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、平均値は `undefg` となる。平均計算においては、この平均値を参照する平均計算点のすべてで欠損となる。

`undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、**inc** として計算される。

- 引数 `axis` は計算基準となる座標系を選択する。変換前のデータがデカルト座標系であるなら、`axis='xy'` と指定する。球面緯度経度座標系であるなら、`axis='ll'` と指定する。デフォルトではデカルト座標系が指定されている。

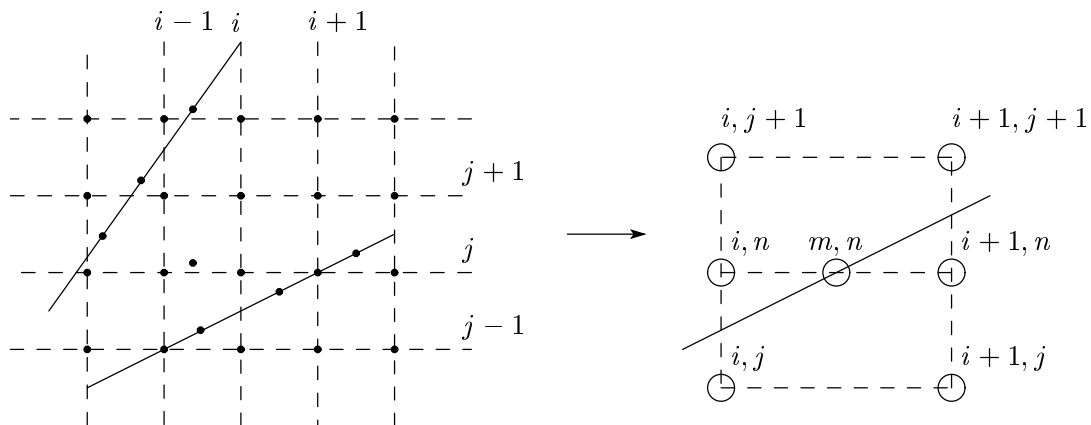


図 3.1: デカルト座標系から円筒座標系への双線形補間の概念。円筒座標系で m, n 点を求めたい場合は、デカルト座標系で j 方向に内挿を計算し、その内挿点から i 方向に線形内挿する。

3.21.10 tangent_mean_vec

機能

デカルト座標系で定義された任意の 2 次元ベクトルをデカルト座標系から円筒座標系に変換し、接線方向に平均する。このとき、判別フラグを用いることで、動径方向成分と接線方向成分に分割できる。

書式

```
call tangent_mean_vec( charc, x, y, xc, yc, u1, u2, r, theta, v,
  [undef], [undefg], [undefgc], [stdopt] )
```

引数

| | | | |
|-----------|-------------------------|-------|--|
| charc | <C(6)> | in | 接線成分か動径成分の どちらに平均するか。 "scalar" = 動径外向き成分。 "vector" = 接線反時計成分。 |
| x | <R,DP(:)> | in | デカルト第一座標。 |
| y | <R,DP(:)> | in | デカルト第二座標。 |
| xc | <R,DP> | in | デカルト x 系での円筒座標原点 (後述)。 |
| yc | <R,DP> | in | デカルト y 系での円筒座標原点 (後述)。 |
| u1 | <R,DP(size(x),size(y))> | in | デカルト系での平均するベクトル。 x 成分。 |
| u2 | <R,DP(size(x),size(y))> | in | デカルト系での平均するベクトル。 y 成分。 |
| r | <R,DP(:)> | in | 円筒座標系の動径座標。 |
| theta | <R,DP(:)> | in | 円筒座標系の接線座標 [rad]。 |
| v | <R,DP(size(r))> | inout | 接線平均したスカラー。 |
| [undef] | <R,DP> | in | 接線平均可能半径外の値 (後述)。 |
| [undefg] | <R,DP> | in | 接線平均内での欠損値。 |
| [undefgc] | <C(3)> | in | undefg が設定 されたときの処理 (後述)。 |
| stdopt | <L> | in | エラー出力フラグ (後述)。 デフォルトは .false. |

定義式

行う処理は `tangent_mean_scal` とほとんど同じ。最初にフラグ `charc` でデカルト系ベクトルを円筒系ベクトルに変換し、そのうちフラグ成分のみをスカラーとして計算すれば、上の処理が実現される。ここで、任意のデカルト系におけるベクトルを $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ とし、円筒座標系の位置ベクトルを $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ とする。ここで、 \mathbf{e}_r は動径方向外向きの基底ベクトルである。このとき、この位置ベクトルはデカルト座標

系で表現すると、 $\mathbf{r} = (x, y)$ で表現できるので、デカルト座標系同士の内積は

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{r}| |\mathbf{u}_r|$$

という量を表現することになる。ここで、 \mathbf{u}_r はデカルト系でのベクトルの動径成分である。よって、これを距離で割れば動径方向外向きのベクトルが得られることになる。接線方向の成分もこれと同様の考え方で、位置ベクトルとデカルト系ベクトルの外積から反時計回りを正とする円筒座標系の接線成分を抽出することができる。

備考

- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが、`stdopt` を `.true.` に設定しておけば、出力しない。
 - オプション引数 `undef` は接線平均可能半径外に存在する接線平均量の配列に代入される未定義値である。ここで、接線平均可能半径とは、円筒座標系で接線平均を行う半径の最大値 `r(size(r))` のことである。もし、この半径が計算領域 `x,y` の外に出た場合、はみ出している部分は平均ができない。このはみ出し部分の、平均が行えない領域については `undef` 値が返されるようになっている。もし、`undef` が設定されていない場合はゼロが代入されて返される。
 - オプション引数 `undefgc` は接線平均領域内において、欠損値 `undefg` が設定されている場合、どのように平均を行うかを判定する。このオプションは `undefg` が設定されていなければ機能しない。`undefg` は接線平均領域内において、デカルト座標系で欠損値が存在する場合、デカルトから円筒への変換の際にデカルト系の参照点が `undefg` であれば円筒系の変換点は `undefg` の値が入れられる。この状況において、`undefgc` の値は
 - inc** 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、その点での値は平均操作に入れずに、有効値が入っている点のみで平均操作を行う。これに対応して、内挿点が欠損の場合はアノマリも欠損となる。
 - err** 接線平均を行う際、円筒系内挿点の一部に `undefg` が設定されていれば、平均値は `undefg` となる。アノマリ計算においては、この平均値を参照するアノマリ計算点のすべてで欠損となる。
- `undefg` が設定されており、`undefgc` が指定されていないデフォルトでは、`inc` として計算される。

3.21.11 CPS_Hart

機能

Hart (2003a) の手法を用いて、低気圧位相空間 (CPS) パラメータを計算する。詳細は北畠 (2011; 天気) を参照のこと。低気圧の半径 500 km 以内における力学・熱力学場の構造から、その低気圧の構造的特徴について分類するためのパラメータである。

書式

```
call CPS_Hart( x, y, center, z300, z600, z900, mv, B, VTL, VTU )
```

引数

| | | | |
|--------|-------------------------|----|--------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | x 方向座標 [m]. |
| y | <R,DP(:)> | in | y 方向座標 [m]. |
| center | <R,DP(2)> | in | 低気圧中心の座標 (後述). |
| z300 | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 300 hPa のジオポテンシャル高度 [m]. |
| z600 | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 600 hPa のジオポテンシャル高度 [m]. |
| z900 | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 900 hPa のジオポテンシャル高度 [m]. |
| mv | <R,DP(2)> | in | 移動速度 [m/s] (後述). |
| B | <R,DP> | in | 対称性パラメータ [m] (後述). |
| VTL | <R,DP> | in | 下層温度核パラメータ [m/s] (後述). |
| VTU | <R,DP> | in | 上層温度核パラメータ [m/s] (後述). |

定義式

低気圧中心から 500 km 半径以内において、以下のパラメータを計算する。

$$B = \left(\overline{Z_{600hPa} - Z_{900hPa}}|_{Right} - \overline{Z_{600hPa} - Z_{900hPa}}|_{Left} \right) \quad (3.21.62)$$

$$-V_T^L = \frac{\partial(\Delta Z)}{\partial \ln p} \Big|_{900hPa}^{600hPa} \quad (3.21.63)$$

$$-V_T^U = \frac{\partial(\Delta Z)}{\partial \ln p} \Big|_{600hPa}^{300hPa} \quad (3.21.64)$$

$$(3.21.65)$$

ここで、 Z_i は i 面高度におけるジオポテンシャル高度、 ΔZ は同一高度面における半径 500 km 以内での $Z_{max} - Z_{min}$ 、 p は圧力である。また、上線は 500 km 以内での平均値を表す。

「Right」および「Left」という表記は、低気圧の中心の移動方向に相対的に右側、左側ということを意味している。つまり、これらをまとめると、図??のようになる。

パラメータ B は低気圧移動方向の右と左での平均的な層厚の差を表し、差が小さいほど左右での温度の偏りがなく、軸対称な構造になっていることを表している。パラメータ V_T は低気圧周辺の温度分布について表すパラメータである。 ΔZ は 500 km 以内でのジオポテンシャル高度の最大と最小の差なので、この差が大きいほど 500 km 以内での温度変化が大きいことになる。任意の 2 層でのこの差を比較したとき、上層の方が差が大きいほどその層内は暖気核構造になっていることを表している (図??)。

備考

- 低気圧中心は一般的に、海面更正気圧の最低点をとればよい。

- 移動速度の計算方法は使用者に依存するが, `mv(1)` は x 方向の速度成分, `mv(2)` は y 方向の速度成分を用いなければならない。これらの速度成分のアスペクト比から移動方向を計算している。

3.21.12 DC_Braun

機能

Braun (2002) の手法を用いて, 熱帯低気圧の中心を計算する。水平解像度が細かくなると, 熱帯低気圧の内部コア領域における局所的な気圧偏差が現れるようになる。海面気圧の最低値で熱帯低気圧の中心を定義すると, この局所的な気圧偏差の影響により振動するようになる^{*21}。そこで, Braun (2002) では, 以下の定義の項目に示す手法を用いて, この振動現象を除去できる熱帯低気圧の中心推定手法が開発された。

書式

```
call DC_Braun( x, y, fg, pres, search_dis, var_dis, center, &
               [undef], [stdopt] )
```

引数

| | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------|---|
| <code>x</code> | <R,DP(:)> | in | x 方向座標 [m]. |
| <code>y</code> | <R,DP(:)> | in | y 方向座標 [m]. |
| <code>fg</code> | <I(2)> | in | 計算に用いる第一推定値の格子点番号 (後述). |
| <code>pres</code> | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 等高度面での気圧 (後述). |
| <code>search_dis</code> | <R,DP> | in | 検索する領域 [m] (後述). |
| <code>var_dis</code> | <R,DP> | in | 偏差計算する領域 [m] (後述). |
| <code>center</code> | <I(2)> | inout | 求められた中心 (後述). |
| <code>undef</code> | <R,DP> | in | 未定義値 (後述). |
| <code>stdopt</code> | <L> | in | エラー出力フラグ (後述). デフォルトは <code>.false.</code> . |

定義式

海面気圧の最低点を第一推定値として, その周囲 100 km 程度の全格子点について, その点を中心とした半径 65 km 程度の円形領域について接線平均を行い, 各格子点におけるその接線平均からの標準偏差を足し合わせた値が最も最低となる点を熱帯低気圧の中心と定義する手法を用いている。より詳細な手法の計算順序については付録?? 参照。

備考

- 引数 `undef` は計算範囲内に未定義値がある場合に指定すると, この値に該当する格子点は偏差計算に使用しない。

^{*21}実際に, 海面気圧の最低値で定義される熱帯低気圧の中心と Braun (2002) の手法で定義される熱帯低気圧の中心でどのような差がみられるかについては付録参照。

- 探索点が探索範囲外に存在している場合、デフォルトでは標準出力に Warning メッセージが出力されるが, `stdopt` を `.true.` に設定しておけば, 出力しない.
- 引数 `fg` は第一推定値となる格子点の x 方向, y 方向の格子点番号を与える. この格子点番号は x, y の配列要素番号のことである. 一般的にこの第一推定値には海面気圧の最低点が用いられる. `fg`, `center` とともに, 第一番目が x 座標の格子点番号, 第二番目が y 座標の格子点番号となる.
- 引数 `pres` には一般的に海面気圧が用いられる. この変数は熱帯低気圧の軸対称性を求めるのに用いるので, 等高度面上での気圧ならどの高度でもよい. ただし, 格子点の値が地表面気圧の場合, 何らかの手法を用いて海面気圧に校正しておく必要がある. 静力学モデルの場合, 気圧と対応関係にある等圧面でのジオポテンシャル高度でも構わない. また, この物理量は偏差計算に用いるだけなので, 単位は全格子点について統一してあれば任意の単位系を用いることができる.
- 引数 `search_dis`, `var_dis` の関係は図 5.11, 5.12 参照. Braun (2002) の文献には `var_dis` は 65 km 程度で行うと記述されている. これは, 一般的な熱帯低気圧の内部コア領域の外側付近に相当する.

3.21.13 SPLB_Kurihara

機能

Kurihara et al. (1990) の手法を用いて, 任意の場の変数について水平方向にフィルタリングを行う.

書式

```
call SPLB_Kurihara( axopt, phi0, x, y, Lx, Ly, ival, oval, &
  [optm], [optnx], [optny] )
```

引数

| | | | |
|--------------------|-------------------------|-------|-------------------------------------|
| <code>axopt</code> | <C(2)> | in | 計算する座標 (後述). |
| <code>x</code> | <R,DP(:)> | in | x 方向座標 [m] or [deg]. |
| <code>y</code> | <R,DP(:)> | in | y 方向座標 [m] or [deg]. |
| <code>Lx</code> | <R,DP(2)> | in | フィルタする x 方向の領域 [m] or [deg] (後述). |
| <code>Ly</code> | <R,DP(2)> | in | フィルタする y 方向の領域 [m] or [deg] (後述). |
| <code>ival</code> | <R,DP(size(x),size(y))> | in | フィルタする 2 次元変数. |
| <code>oval</code> | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | フィルタされた 2 次元変数. |
| <code>optm</code> | <I(:)> | in | フィルタする波数 (後述). |
| <code>optnx</code> | <I(:)> | in | x 方向高解像度版格子点 (後述). |
| <code>optny</code> | <I(:)> | in | y 方向高解像度版格子点 (後述). |

定義式

任意の場の変数 $F_{i,j}$ に対して, 指定波数の成分をフィルターアウトする [Kurihara et al. \(1990\)](#) の手法を用いる. ただし, オリジナルではなく, [Nguyen and Chen \(2011\)](#) による高解像度版データへの適用を可能にした修正版を用いる. 定義式は [Nguyen and Chen \(2011\)](#) の (3), (4), (5) 式^{*22}

$$\overline{F}_{i,j}^E = F_{i,j} + K_m(F_{i-q_{n1},j} + F_{i+q_{n1},j} - 2F_{i,j}), \quad F_{i,j}^E = \overline{F}_{i,j}^E + K_m(\overline{F}_{i,j-q_{n2}}^E + \overline{F}_{i,j+q_{n2}}^E - 2\overline{F}_{i,j}^E) \quad (3.21.66)$$

$$q_{n1} = \left\lceil \frac{R \cos \phi_0 \delta \phi}{n_1 \Delta_x} \right\rceil, \quad n_1 = 1, 2, 4, \dots, M_1, \quad (3.21.67)$$

$$q_{n2} = \left\lceil \frac{R \delta \phi}{n_2 \Delta_y} \right\rceil, \quad n_2 = 1, 2, 4, \dots, M_2,$$

$$M_1 = \left\lceil \frac{R \cos \phi_0 \delta \phi}{\Delta_x} \right\rceil, \quad (3.21.68)$$

$$M_2 = \left\lceil \frac{R \delta \phi}{\Delta_y} \right\rceil,$$

$$K_m = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{m} \right)^{-1}, \quad m = 2, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 2, 8, 9, 2. \quad (3.21.69)$$

を用いて, 最終的にフィルタリングされた場の変数 $F_{i,j}^E$ が得られる. ここで, Δ_x , Δ_y はモデルの x, y 方向格子点解像度, $\delta \phi$ は 1 度分のラジアン, ϕ_0 は基準緯度, R は地球半径である. また, (3.21.67), (3.21.68) における四角括弧はガウス記号である. この q_{n1}, q_{n2} が [Nguyen and Chen \(2011\)](#) で導入された高解像度データ拡張処理部分である. もし, $n_1 = n_2 = 1$ の場合は, [Kurihara et al. \(1990\)](#) に一致する. 上式は水平方向 i, j について範囲 L_x , L_y の範囲全ての格子点について適用される. 定義式の導出は??参照.

このときの引数との対応関係は

$$\Delta_x : \text{x}(2) - \text{x}(1), \quad \Delta_y : \text{y}(2) - \text{y}(1), \quad \phi_0 : \text{phi0},$$

$$L_x : \text{Lx}(2) - \text{Lx}(1), \quad L_y : \text{Ly}(2) - \text{Ly}(1), \quad F_{i,j} : \text{ival}(i, j), \quad F_{i,j}^E : \text{oval}(i, j),$$

$$m : \text{optm}, \quad n_1 : \text{optnx}, \quad n_2 : \text{optny}.$$

備考

- 引数 `axopt` は座標 x, y の格子点座標系, '`xy`' がデカルト座標系 (x, y の単位は [m]), '`11`' が球面緯度経度座標系 (x, y の単位は [deg]).
- 引数 `optm` は指定しない場合, 2,3,4,2,5,6,7,2,8,9,2 の 11 個の要素をもつ配列としてフィルタリング係数 K_m が計算される.
- 引数 `optnx`, `optny` は指定しない場合, どちらも要素数 1, 値は 1 となり, この場合 [Kurihara et al. \(1990\)](#) の定義式と完全に一致する.

^{*22}ただし, オリジナルの式ではなく, 東西と南北方向で独立な定義式に修正してある.

3.21.14 calc_taufil

機能

Rozoff et al. (2006) において定義される filamentation time を計算する.

書式

```
call tangent_conv_scal( x, y, u, v, val, [undef], [sx], [sy] )
```

引数

| | | | |
|-------|-------------------------|-------|-------------------------|
| x | <R,DP(:)> | in | 右手系第一座標. |
| y | <R,DP(:)> | in | 右手系第二座標. |
| u | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 水平 x 成分の速度 (後述). |
| v | <R,DP(size(x),size(y))> | in | 水平 y 成分の速度 (後述). |
| val | <R,DP(size(x),size(y))> | inout | filamentation time [s]. |
| undef | <R,DP> | in | 未定義値 (後述). |
| sx | <R,DP(size(x),size(y))> | in | x 方向スケール因子 (後述). |
| sy | <R,DP(size(x),size(y))> | in | y 方向スケール因子 (後述). |

定義式

Rozoff et al. (2006) における filamentation time (τ_{fil}) は

$$\tau_{\text{fil}} \equiv \frac{2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 - \zeta^2}}, \quad (S_1^2 + S_2^2 > \zeta^2),$$

$$S_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1},$$

$$S_2 = \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right),$$

$$\zeta = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 u_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 u_1) \right].$$

ここで、 S_1, S_2, ζ はそれぞれ伸長変形速度, シア一変形速度, 鉛直渦度である。このとき、引数は以下の対応をする。

$$x_1 : \mathbf{x}, \quad x_2 : \mathbf{y}, \quad u_1 : \mathbf{u}, \quad u_2 : \mathbf{v},$$

$$h_1 : \mathbf{sx}, \quad h_2 : \mathbf{sy}.$$

備考

- 未定義値 `undef` は入力された速度場が未定義の場合、`val` に代入されるが、 $S_1^2 + S_2^2 > \zeta^2$ を満たさない場合も `val` に代入される。
- `undef` が指定されない場合、 $S_1^2 + S_2^2 > \zeta^2$ を満たさない `val` には 0 が代入される。ただし、これは定義からは不当であることに注意する。

- 水平速度成分と水平方向のスケール因子は以下の関係をもつように定義されなければならない.

$$u_1 = h_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad u_2 = h_2 \frac{dx_2}{dt}.$$

なお, この定義された速度, スケール因子はともに MKS 単位系で与えられなければならない. もしそうでなければ, τ_{fil} の単位は [s] にならない.

第4章 サンプルプログラム

ここでは、各ルーチンの使用例としていくつかのサンプルプログラムをあげておく。

4.1 サンプルプログラムのコンパイル方法

`demo` ディレクトリ以下に、本ライブラリを用いたサンプルプログラムが複数同梱されている。本サンプルプログラムの実行には STPK ライブラリが正常にインストールされており、NetCDF ライブラリ、`gtool5` ライブラリがインストールされている必要がある。サンプルプログラムの計算結果は NetCDF データで出力されるため、可視化には別途可視化ツールが必要である。

サンプルプログラムのコンパイルには、`demo/Mkinclude` を各自の環境に合わせて編集しなければならない。変更する可能性がある箇所は以下のとおりである。

| | |
|---------------------|------------------------------------|
| <code>FC</code> | STPK をインストールしたコンパイラ。 |
| <code>FFLAGS</code> | インストール時のコンパイルオプション。 |
| <code>ISTDIR</code> | STPK のインストールディレクトリ。 |
| <code>INSTNC</code> | <code>netcdf</code> のインストールディレクトリ。 |
| <code>INSTGT</code> | <code>gtool5</code> のインストールディレクトリ。 |

コンパイルは `demo` ディレクトリで `make` コマンドを実行すればよい。

もし、`DCLF90` がインストールされているなら、`make draw` と実行することで、2次元のグラフを描画することのできる実行ファイル `draw` が作成される。また、`Ruby-DCL` がインストールされていれば、同じディレクトリに同梱されている `dclplot` を用いて、テキストフォーマットのデータを `gnuplot` のようにグラフ化することができる。この `dclplot` は Ruby スクリプトであり、`ruby dclplot` で実行すると、どのような引数を与えなければならないかというような `usage` 情報が出力されるので、それを参考にされたい。

`draw` コマンドの使い方については、各サンプルプログラムのファイル名の前に `draw_` とヘッダのついた拡張子 `.nml` のネームリストファイルがあるので、例えば、`poison` を用いた結果得られたデータ `poison.nc` を可視化したい場合は、`./draw < draw_poison.nml` で可視化することができる。この `draw` に対応したネームリストファイルの各変数は以下

のとおりである.

```

&drawinput
fig_type = 1 ! 図の種類 1: 等値線, シェード
! 2: 等値線, シェード, ベクトル
! -1: 横軸折れ線, マーカー
! -2: 縦軸折れ線, マーカー
! 折れ線を引くなら, cont_val に変数名,
! マーカーをうつなら, shade_val に変数名,
! 両方とも描画可能.
! 横軸折れ線の場合, 横軸の描画範囲は xmax, xmin で
! そのときの縦軸の描画範囲は cmin, cmax, smin, smax で設
定でき,
! cmin, cmax は折れ線, smin, smax はマーカーに対応.
! shade_val, cont_val それぞれ設定されているときは絶対値
が
! 大きい方で設定される.
! ymin, ymax で設定された範囲内に存在するすべての y 格子の
! x 軸データを複数折れ線 (マーカー) で描画する.
! もし 1 本のみ欲しければ, ymin = ymax と設定すること.
! 縦軸折れ線の場合, 横軸折れ線の全く逆の変数設定をしておく
こと.
! ex. 横軸折れ線で xmin, xmax の場合, 縦軸折れ線で
は ymin, ymax
! がこの変数に対応している.
nx = 100 ! 横軸の格子点数
ny = 100 ! 縦軸の格子点数
xmin = 0.0 ! 横軸の左端
xmax = 1.0 ! 横軸の右端
ymin = 0.0 ! 縦軸の下端
ymax = 1.0 ! 縦軸の上端
fname = 'poison.nc' ! 読み込む netcdf ファイル
txtname = '' ! テキストカラムデータ
cont_val = 'rho' ! 等値線で描く変数
shade_val = 'psi' ! カラーシェードで描く変数
vx_val = '' ! ベクトル x 成分で描く変数
vy_val = '' ! ベクトル y 成分で描く変数
cmin = -4.0 ! 等値線の最小値
cmax = 0.0 ! 等値線の最大値
smin = 0.0 ! カラーシェードの最小値
smax = 3.5 ! カラーシェードの最大値
x_axis = 'x' ! 横軸の変数名
y_axis = 'y' ! 縦軸の変数名
sfact = 1.0 ! シェードのファクター
cfact = 1.0 ! 等値線のファクター
vxfact = 1.0 ! 単位ベクトルの長さ x
vyfact = 1.0 ! 単位ベクトルの長さ y
title = ''
/

```

他の draw 用ネームリストファイルも全て同じ変数となっている. 各ネームリストファイルは各サンプルを可視化する際, 何も変更しなくても描画することができる.

4.2 各プログラムの説明

本プログラム群はルーチン・関数レベルの出力結果をチェックするプログラムを `unit` というディレクトリに、それ以外の中規模テストプログラムは各ディレクトリに格納してある。以下では、`unit` とそれ以外のプログラムについて、使い方等を示す。

4.2.1 cov

モジュール `Statistics` のテスト用プログラム。ある与えられたデータファイル `data.org` を元に、分布図を作成するプログラム。ただし、その分布図を元に回帰直線を引き、相関係数を計算する。

実行方法・実行結果

本プログラムは単体で実行するだけであり、その出力結果は以下のようになる。

```
*****
slope = 4.4496446E-06
intercept = -3.6121133E-07
Cor_Coe = 3.6029361E-02
data number = 246
*****
```

4.2.2 fft_test

FFT ルーチンのテストプログラム。実数データを与えて実 FFT を計算し、逆変換を行い元の実データに戻す。戻したときに、元データとどれだけ誤差があるかを表示する。また、同じ動作を標準入力から指定する回数分繰り返す。FFT のパフォーマンステストも兼ねているので、上とまったく同じ作業を離散フーリエ変換についても行い、両者の実行時間を表示する。用いるデータはデータ数の中央にピークをもつガウシアン分布である。

実行方法

`make` すると、実行ファイル `fft_test` が作成されているので、実行すると、

```
Input the data number (odd number).
```

と聞かれる。これはデータの個数であり、実 FFT 変換を行うため、必ず偶数でなければならない。次に

```
Input the loop number.
```

と聞かれる。これは同じ動作を何回繰り返すかを指定する。

```
Do calculate the prime factors? [y/n]
```

と聞かれる。これはデータ数を素因数分解するかどうかを聞いている。これを 'y' とすると、FFT ルーチンが開始されるごとに毎回分解し、回転行列を計算する。本ルーチンでは、データ数が多くなるとともに最もボトルネックになるのが、回転行列の計算であるため、loop number を多くとっている場合には、これを 'n' にして、最初に計算した値を毎度参照するようにした方が、FFT 本体のパフォーマンスはよい。

計算結果

```
Input the data number (odd number).
4096
Input the loop number.
10
Do calculate the prime factors? [y/n]
n
          12          0          0          0          1
-----
fft error is  7.2353985E-04
fft error is  7.6539267E-04
-----
-----
cpu time (rot) is  0.4000240      [s].
cpu time (fft) is  0.2280140      [s].
cpu time (dft) is  1.372087      [s].
-----
```

備考

特になし。

4.2.3 fft_data

FFT ルーチンの使用例プログラム。テキスト形式の実数データを与えて実 FFT を計算し、そのスペクトル分布を別ファイルに出力する。

実行方法

make すると、実行ファイル `fft_data` が作成されているので、実行すると、

```
Input a reading file name.
If there is no file, input 'dummy'
```

と聞かれる。これは読み込むテキストデータのファイル名を入力する。もしファイルがなく、テスト計算のみ行いたい場合は、`dummy` と入力すればよい。すると、あらかじめプログラム内で三角関数の重ね合わせデータを作成して、その FFT 計算を行う。ファイルのデータ個数は偶数でも奇数でも構わない。ただし、奇数の場合は実 FFT 計算を行う都合上、一番後ろのデータは読み込むが用いない。以下、`dummy` と入力した場合の例を示す。次に、

```
Automatically, sample file is producted.
result prim          2          0          2          0
### Finished calculating.
Input the output file name..
```

1

と聞かれる。これはスペクトル計算したデータを出力するファイル名を入力する。

```
Input the calculating period.
(data period)
```

と聞かれる。これは計算を行ったデータの期間を入力する。単位は任意。この値は出力されるテキストデータの "frequency" に反映される。

計算結果

計算の結果出力されるデータは左から

```
波のノード数, 波数, 入力データ 1 行目, ...
```

となる。ここで、データの期間を T とすると、ノード数 n と波の波数 k とデータ期間 T の関係は

$$2\pi n = kT$$

である。つまり、上のデータはそれぞれ

$$\text{波のノード数} = n, \quad \text{波数} = k = \frac{2\pi n}{T}$$

をそれぞれ表している。これを考慮してサンプルデータを可視化したものが図 4.1 である。

備考

- 入力データが `dummy` でない場合、次に

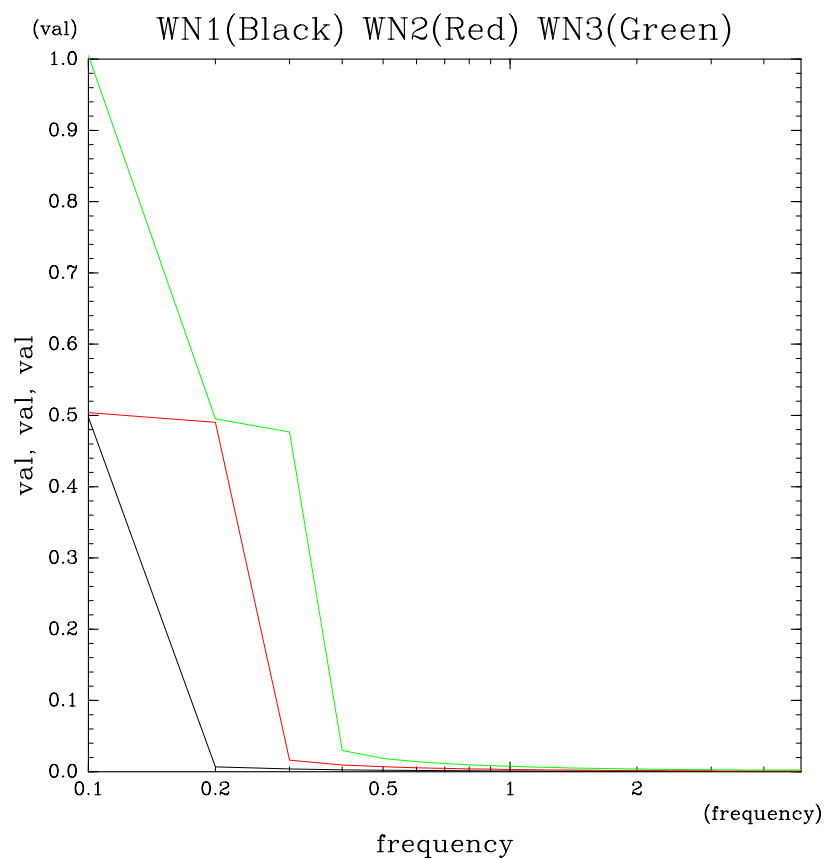


図 4.1: 実数データのスペクトル分布。黒、赤、緑がそれぞれ波のノード数 1, 1+2, 1+2+3 の波で作成したデータのスペクトル分布に対応している。それぞれ波数（横軸）の 1, 2, 3 に対応した箇所でピークが見られる。

Input the reading number of array.

と聞かれる。これはデータのカラム数がいくつあるかを入力するもので、本プログラムでは入力されたカラムごとに FFT 計算してスペクトルデータを出力する。よって、出力データはこの質問で入力したカラム数に 2 カラム追加された (上記のノード数データと波数データを追加された) ものとして出力される。

4.2.4 matrix_test

3 次元行列を与え、そのデータをもとに様々な行列計算ルーチンを実行するプログラム。

実行方法

本プログラムは単体で実行すればよい。実行すると、どのような計算を行うかを聞かれるので、標準入力で番号を入力する。番号は以下のような対応になっている。

1. ガウスの消去法を用いて、3 元の連立方程式の求解を行う。
2. LU 分解を用いて、3 元連立方程式の求解を行う。
3. ガウスザイデル法を用いて、3 元連立方程式の求解を行う。
4. ヤコビ法を用いて、3 元連立方程式の求解を行う。
5. ガウスザイデル法を SOR で加速しながら、3 元連立方程式の求解を行う。
6. ヤコビ法を SOR で加速しながら、3 元連立方程式の求解を行う。
7. 3 次正方行列の逆行列を計算する。
8. ベキ乗法を用いて 3 次正方行列の最大固有値とそれに対応する固有ベクトルを計算する。
9. ヤコビ法を用いて、3 次正方行列の全固有値を計算する。
10. QR 法を用いて、3 次正方行列の全固有値と固有ベクトルを計算する。

4.2.5 normal_poly

モジュール `poly_normal`, `special_function` のテストプログラム。標準入力する関数名の関数を一定の定義域において計算し、テキストカラムデータで出力するプログラム。

本プログラムの実行によって出力されたテキストデータファイルは同じディレクトリに同梱されている ruby スクリプト `dclplot` を実行することで容易に可視化できる。

実行方法

本プログラムは単体で実行することができ、実行するとどの関数を計算するかということを標準入力で決定する。各番号は以下のような対応をしている。

1. ルジャンドル多項式.
2. エルミート多項式.
3. ラゲール多項式.
4. ヤコビ多項式.
5. ゲーゲンバウアー多項式.
6. チェビシェフ多項式.
7. ソニン多項式.
8. ベッセル関数.
9. ガンマ関数.
10. ノイマン関数.
11. 変形ベッセル関数.
12. 変形ノイマン関数.

計算結果 ルジャンドル多項式の場合

図 4.2 にルジャンドル多項式の場合を示す。

エルミート多項式の場合

図 4.3 にエルミート多項式の場合を示す。

ラゲール多項式の場合

図 4.4 にラゲール多項式の場合を示す。

ベッセル関数の場合

図 4.5 にベッセル関数の場合を示す。

ノイマン関数の場合

図 4.6 にノイマン関数の場合を示す。

変形ベッセル関数の場合

図 4.7 に変形ベッセル関数の場合を示す。

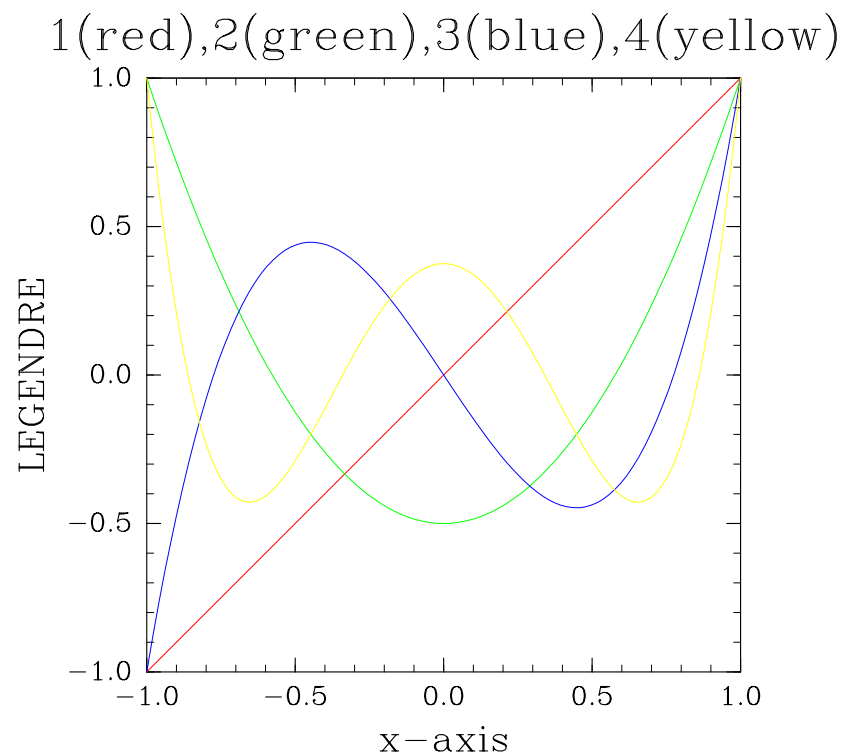


図 4.2: ルジャンドル多項式 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

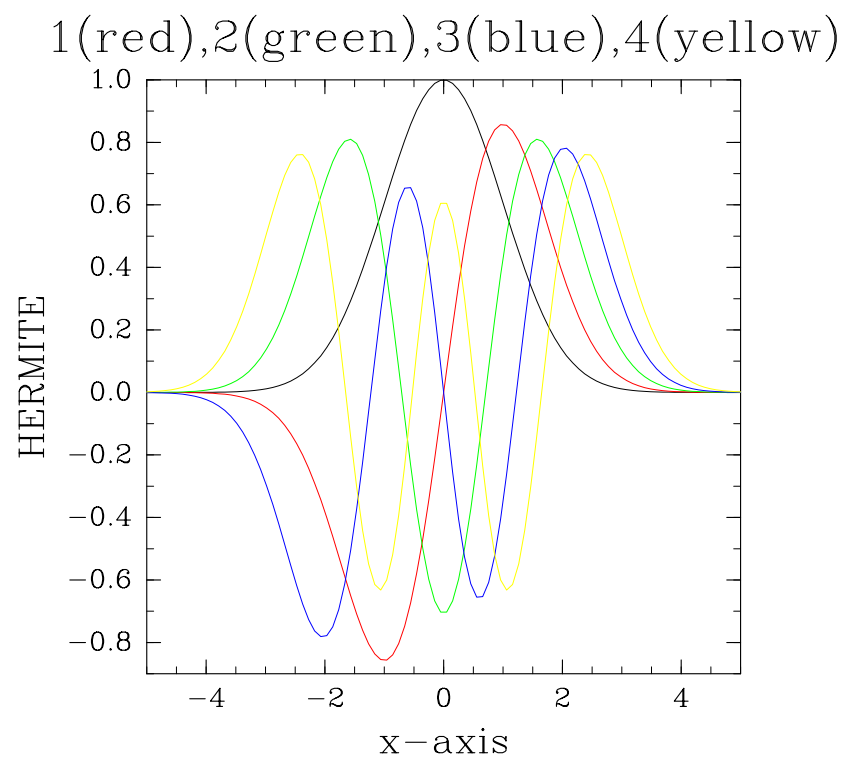


図 4.3: エルミート多項式 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

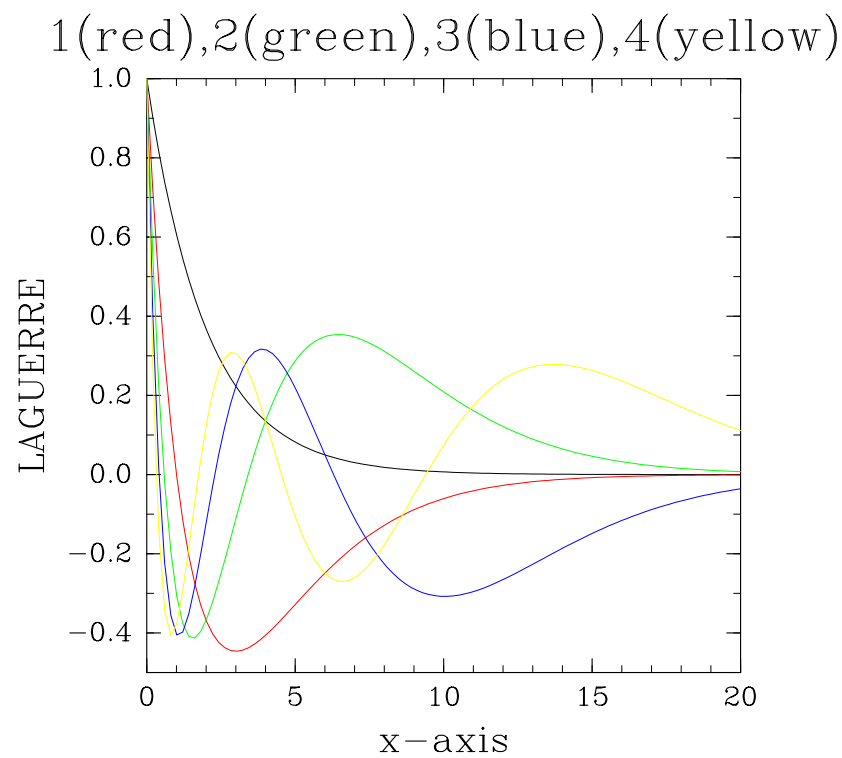


図 4.4: ラゲール多項式 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

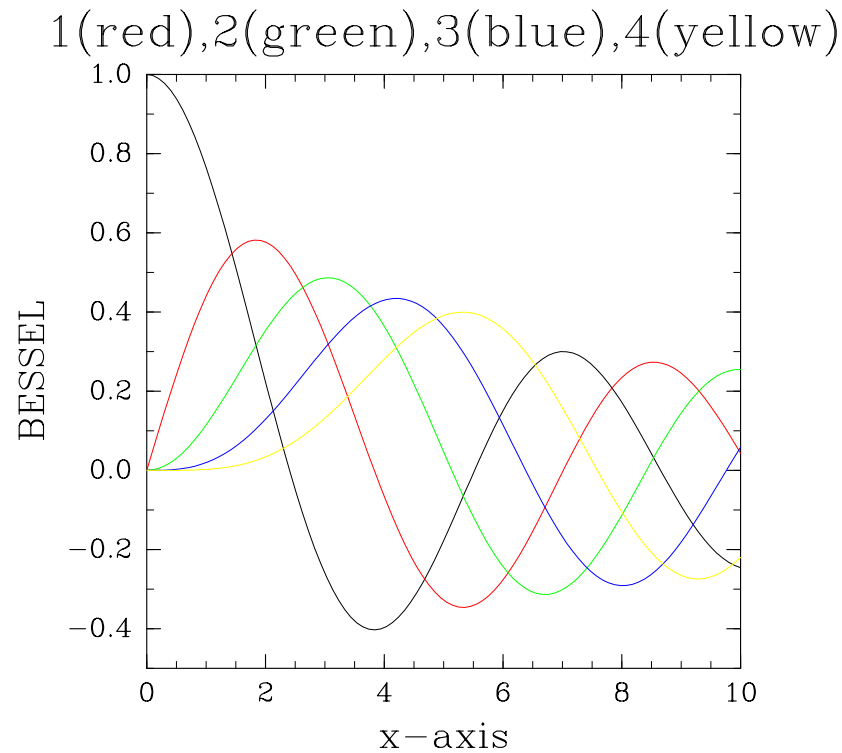


図 4.5: ベッセル関数 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

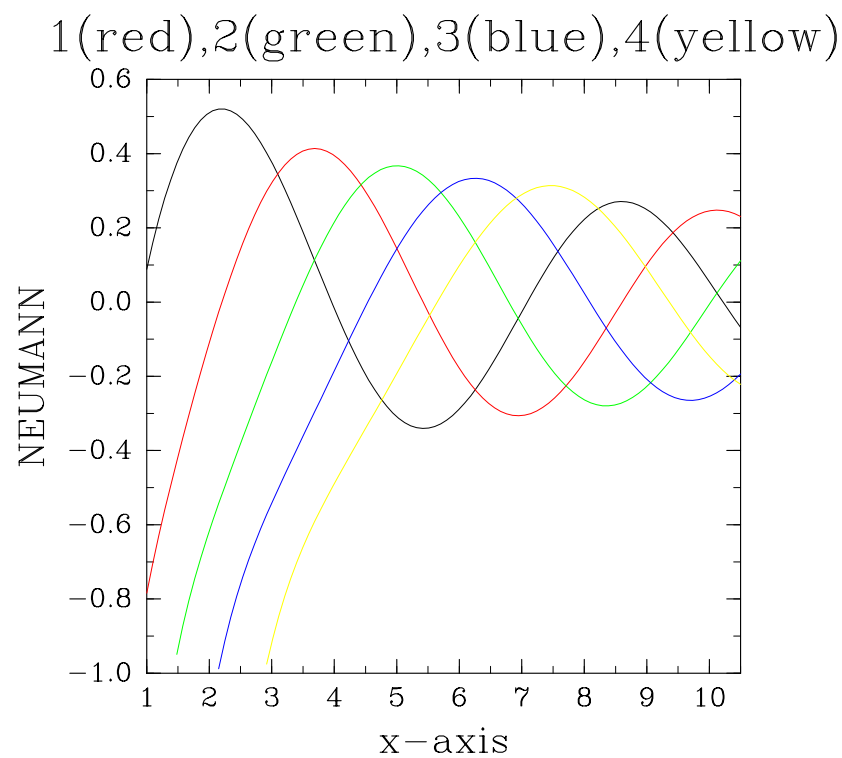


図 4.6: ノイマン関数 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

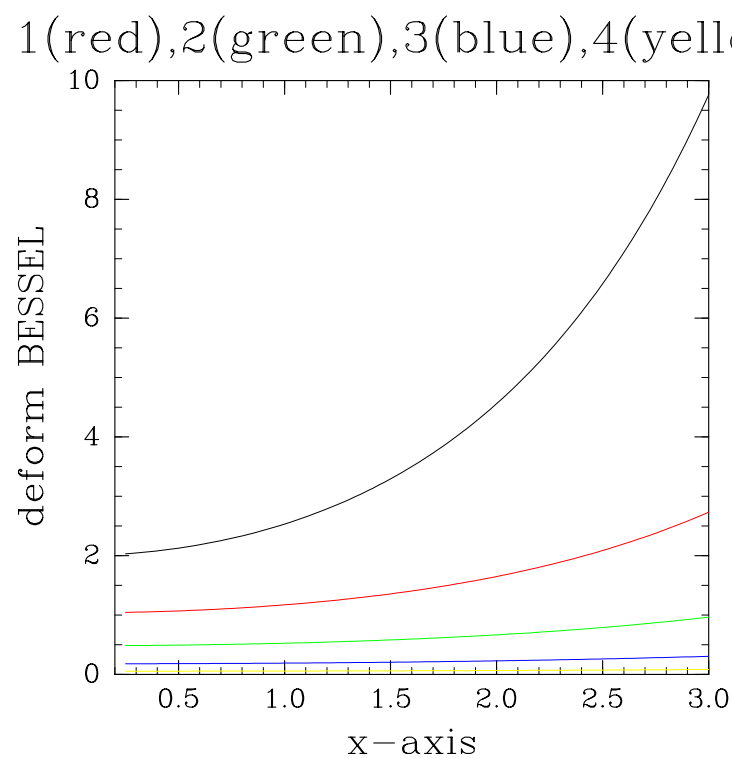


図 4.7: 変形ベッセル関数 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

1(red),2(green),3(blue),4(yellow)

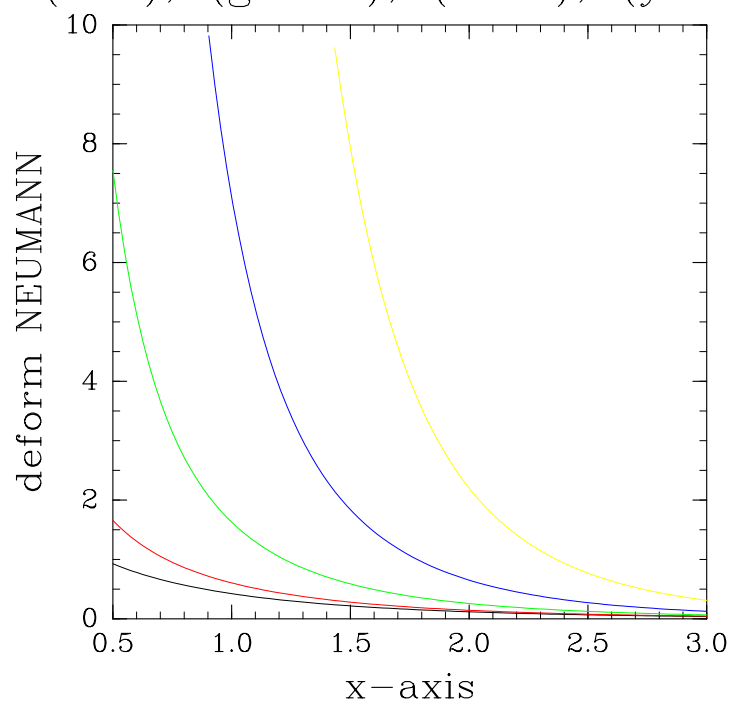


図 4.8: 変形ノイマン関数 (黒線が 0 次, 赤線が 1 次, 緑線が 2 次, 青線が 3 次, 黄線が 4 次).

変形ノイマン関数の場合

図 4.8 に変形ノイマン関数の場合を示す.

ガンマ関数の場合

図 4.9 にガンマ関数の場合を示す
1(red),2(green),3(blue),4(yellow)

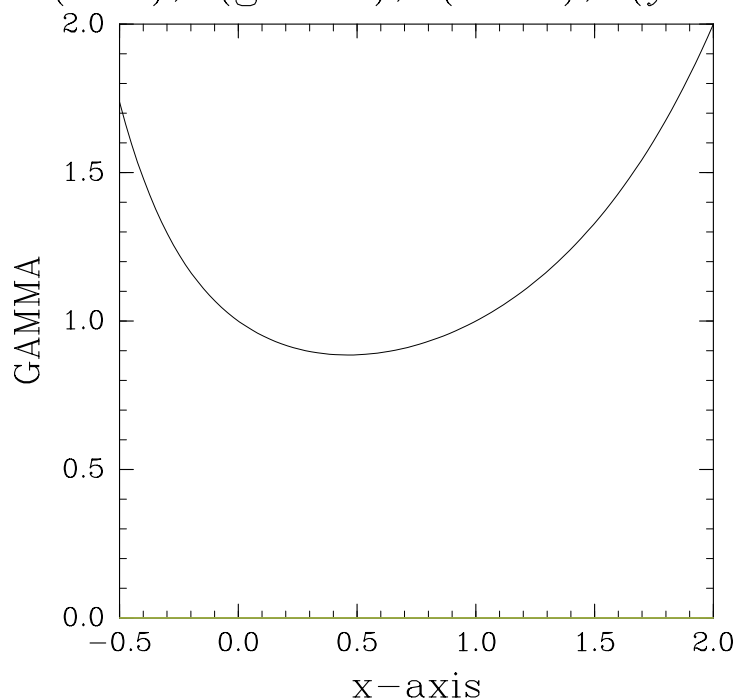


図 4.9: ガンマ関数.

4.2.6 read_mgdsst_nc

mgdsst データを netcdf データに変換するためのプログラム.

実行方法・ネームリスト

実行前に, 変換する mgdsst ファイル名を全て `sst.list` という名称のファイルにテキストで保存しておく. その元ファイル名の拡張子を `.nc` とした名称で netcdf ファイルは生成される. 実行は, 単体で実行すれば, 先のリストに示された分だけ自動的に netcdf ファイルに変換される.

```
$ ./read_mgdsst_nc
```

ここで, オリジナルの mgdsst データは海水を示す値が 888 であるが, この変換によって, その値は 263.0 K に設定されることに注意.

計算結果

本プログラムの結果から得られた netcdf のデータをそのまま描画したものが図 4.10

である．本結果の描画ツールはこちらでは用意していないので，各自使用しているツールを用いて変換されたい．

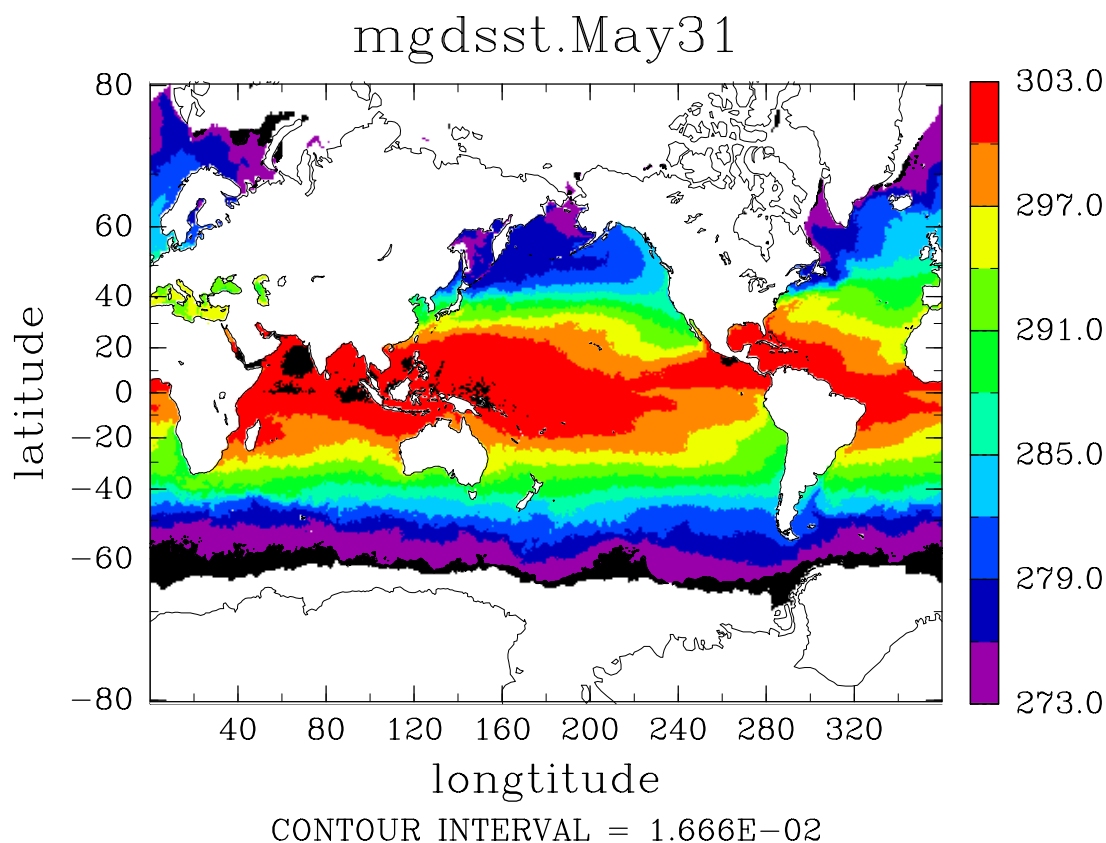


図 4.10: netcdf に変換されたデータから生成された全球海面水温の分布．

4.2.7 thermo

`Thermo_Function` に登録されている関数について，テストを行うプログラム．気圧，温度，湿度等の情報を与えて，返された値が妥当なものであるかを検証するプログラム．

実行方法

`make` すると，実行ファイル `thermo` が作成されているので，実行すると以下のような質問が出力される．

```

pressure [hPa]
1000.0
temperature [K]
300.0
Relative Humidity [%]
50.0

```

順次, 値を入力すると, 以下のように各ルーチンを用いて計算した結果が出力される.

```

DEBUG : RHT_2_e in Thermo_Function : 1.76668E+03 [Pa]
DEBUG : eP_2_qv in Thermo_Function : 1.11965E-02 [kg kg-1]
DEBUG : TP_2_rho in Thermo_Function : 1.16144E+00 [kg m-3]
DEBUG : theta_dry in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : qv_2_sh in Thermo_Function : 1.10725E-02 [kg kg-1]
DEBUG : tetens in Thermo_Function : 3.52565E+03 [Pa]
DEBUG : goff_gratch in Thermo_Function : 3.53320E+03 [Pa]
DEBUG : goff_gratch_i in Thermo_Function : 4.56536E+03 [Pa]
DEBUG : es_Bolton in Thermo_Function : 3.53336E+03 [Pa]
DEBUG : es_TD in Thermo_Function : 2.88717E+02 [Pa]
DEBUG : LH in Thermo_Function : 2.43771E+06 [J kg-1]
DEBUG : eP_2_qv in Thermo_Function : 1.11965E-02 [kg kg-1]
DEBUG : TP_2_qvs in Thermo_Function : 2.28030E-02 [kg kg-1]
DEBUG : qvP_2_e in Thermo_Function : 1.76668E+03 [Pa]
DEBUG : theta_dry in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : theta_moist in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : thetaP_2_T in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : thetaT_2_P in Thermo_Function : 1.00000E+05 [Pa]
DEBUG : TqvP_2_TLCL in Thermo_Function : 2.86147E+02 [K]
DEBUG : thetae_Bolton in Thermo_Function : 3.27661E+02 [K]
DEBUG : thetaes_Bolton in Thermo_Function : 3.67287E+02 [K]
DEBUG : TqvP_2_thetae in Thermo_Function : 3.27064E+02 [K]
DEBUG : TqvP_2_thetaes in Thermo_Function : 3.60804E+02 [K]
DEBUG : RHT_2_e in Thermo_Function : 1.76668E+03 [Pa]
DEBUG : eT_2_RH in Thermo_Function : 5.00000E+01 [%]
DEBUG : RHTP_2_qv in Thermo_Function : 1.11965E-02 [kg kg-1]
DEBUG : qvTP_2_RH in Thermo_Function : 5.00000E+01 [%]
DEBUG : qvT_2_Tv in Thermo_Function : 3.02014E+02 [K]
DEBUG : TqvP_2_thetav in Thermo_Function : 3.02014E+02 [K]
DEBUG : exner_func_dry in Thermo_Function : 1.00000E+00 [1]
DEBUG : hypsometric_form in Thermo_Function : 9.88683E+04 [Pa]
DEBUG : rhoT_2_P in Thermo_Function : 1.00000E+05 [Pa]
DEBUG : rhoP_2_T in Thermo_Function : 3.00000E+02 [K]
DEBUG : TP_2_rho in Thermo_Function : 1.16144E+00 [kg m-3]
DEBUG : get_gamma_d in Thermo_Function : -9.77092E-03 [K m-1]
DEBUG : sh_2_qv in Thermo_Function : 1.13232E-02 [kg kg-1]
DEBUG : Cefp in Thermo_Function : 1.01359E+03 [J K-1 kg-1]
DEBUG : Cl in Thermo_Function : 4.19000E+03 [J K-1 kg-1]
DEBUG : Tq_2_Trho in Thermo_Function : 3.02014E+02 [K]
DEBUG : esi_Emanuel in Thermo_Function : 4.58907E+03 [Pa]
DEBUG : thetae_Emanuel in Thermo_Function : 3.27608E+02 [K]
DEBUG : thetaw_Emanuel in Thermo_Function : 2.55824E+02 [K]
DEBUG : moist_laps_temp in Thermo_Function : 2.96495E+02 [K]

```

4.2.8 thermo2

Thermo_Advanced_Function に登録されている関数について、テストを行うプログラム。Jordan (1958) のサウンディングデータをもとに、基準高度の情報を与えて、返された値が妥当なものであるかを検証するプログラム。

実行方法

make すると、実行ファイル thermo2 が作成されているので、実行すると以下のような質問が出力される。

```
Input the reference height [m].  
500.0
```

値を入力すると、以下のように各ルーチンを用いて計算した結果が出力される。

```
DEBUG : precip_water in Thermo_Advanced_Function :    4.54026E+01 [mm]  
DEBUG : CAPE in Thermo_Advanced_Function :    4.07556E+02 [J kg-1]  
DEBUG : CIN in Thermo_Advanced_Function :   -2.85806E+01 [J kg-1]  
DEBUG : z_LCL in Thermo_Advanced_Function :    9.28418E+02 [m]  
DEBUG : z_LFC in Thermo_Advanced_Function :    2.97419E+03 [m]  
DEBUG : z_LNB in Thermo_Advanced_Function :    1.15760E+04 [m]  
DEBUG : T_LFC in Thermo_Advanced_Function :    2.82911E+02 [K]  
DEBUG : T_LNB in Thermo_Advanced_Function :    2.24629E+02 [K]
```

4.2.9 time_check

Basis モジュールの日時カウント用関数 counter_day, counter_sec および、タイムゾーン変換ルーチン time_zone_convert のテストプログラム。任意の 2 日時を与えて、その期間の日数と秒数を表示する。

実行方法

実行すると、以下のような質問が表示されるので、適切に答える。

```

Input the start time [yyyy:mm:dd HH:MM:SS].
[Example] 2013:01:01 13:00:01
2012:12:30 23:59:59
Input the end time [yyyy:mm:dd HH:MM:SS].
[Example] 2013:01:01 13:00:01
2013:01:01 00:00:00
You input start time : 2012/12/30 23:59:59
You input end time   : 2013/01/01 00:00:00
                    3 [day],      86401 [sec]
start time (UTC)     : 2012/12/30 14:59:59

```

この場合、2012/12/30 23:59:59 から、2013/01/01 00:00:00 までの日数と秒数を計算する設定である。計算結果は最後に表示されている通り、日数は 3 日分、秒数で計算すると 86401 秒となる。また、最後は与えた計算開始時刻について、JST と仮定したときの、その時刻に対応する UTC の時刻を出力する。

4.2.10 traj_sample

Forward_Traject, Backward_Traject のテスト用プログラム。三角関数型に時間変化する 2 次元水平一様風の場合について、前方・後方流跡線を計算する。

実行方法・実行結果

本プログラムは単体で実行するだけであり、以下のような計算設定を入力する質問が表示される。

```

input scheme of time integration.
EU1 or RK4.
RK4
input direction of trajectory for time.
1 = Forward, 2 = Backward.
2

```

最初の質問は時間積分のスキームの種類であり、EU1 は 1 次オイラースキーム、RK4 は 4 次ルンゲ＝クッタスキームである。次の質問は積分の方向である。1 は前方流跡線、2 は後方流跡線を計算する。

計算結果

図 4.11 は点 (0.1, 0.1) から開始時に北東方向に一様な風が吹いている場における後方流跡線の軌跡を示す。風の場合は水平一様であるが、時間について三角関数型に変化するので、軌跡は円形に変化していることがわかる。

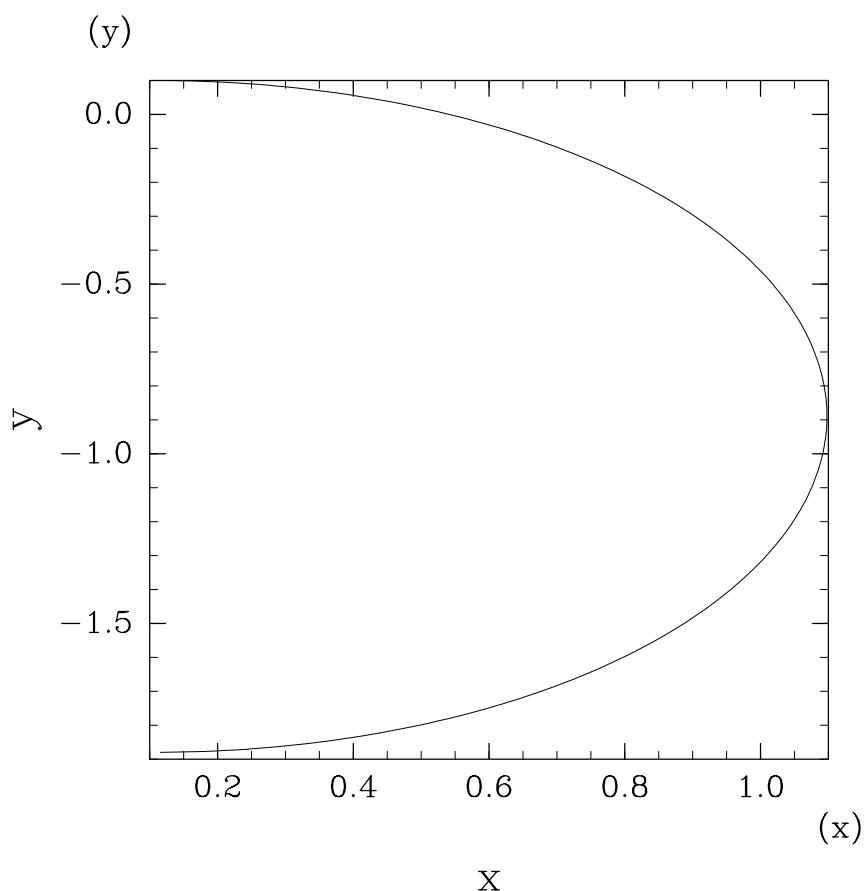


図 4.11: 流跡線解析の結果.

4.2.11 wind

モジュール `Derivation`, `Trajectory` のルーチンをテストするプログラム.
 解析的な気圧場を与えて, そこから気圧勾配を計算し地衡風場を, その得られた地衡風について渦度を計算し, さらに速度場から流線計算を行う. 気圧場の分布と最後に計算された流線の軌跡が一致することを確認することができる. ここで与える気圧場 $p(x, y)$ は

$$p(x, y) = \cos x + \cos y$$

である.

計算結果

解析的に与えた気圧場は図 4.12, この気圧場から計算される水平速度場は図 4.13, 得られた速度場から計算される鉛直渦度場は図 4.14, 水平速度場をもとに計算される

流線は図 4.15 である。ここで、流線は領域中心から最も近い円形であり、気圧場の等値線と同心円を形成していることに注意。

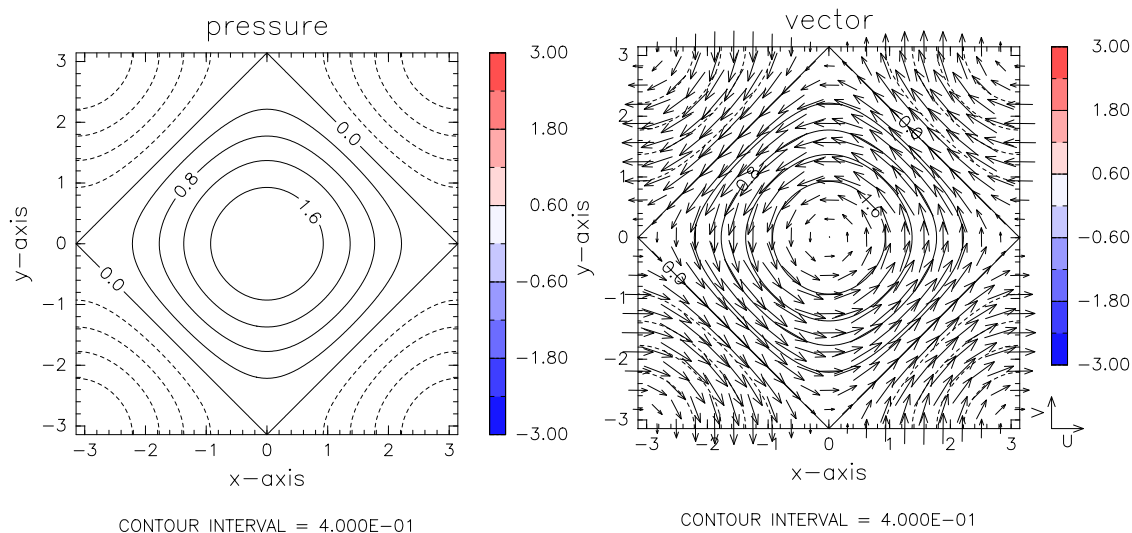


図 4.12: 解析的に与えられた気圧の場.

図 4.13: 気圧場から診断的に求められた水平風速場.

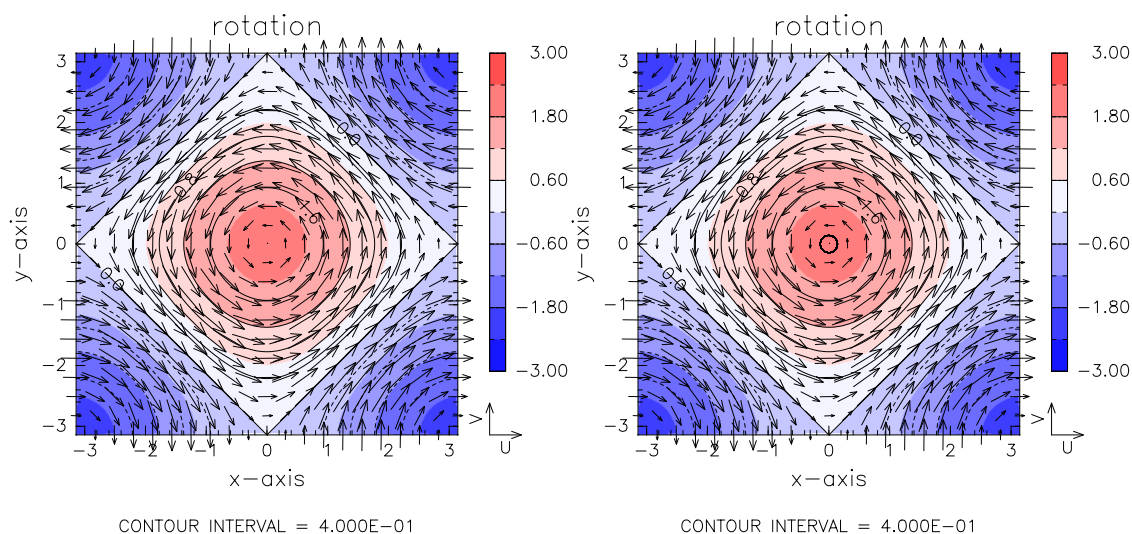


図 4.14: 速度場から求められた鉛直渦度場. 図 4.15: 速度場から計算される流線の軌跡.

4.2.12 advection

モジュール `fftpt` のテスト用プログラム. 線形 1 次元の移流方程式について, スペクトル法を用いてその時間発展を計算する.

計算を行う方程式系は空間方向に 1 次元の物理量 $u(x, t)$ についての純移流方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

である．これを空間方向にはスペクトル展開し，時間方向にはクランクニ科尔ソンスキームを用いている．空間格子数等はネームリストファイル `advection.nml` で設定可能である．

実行方法・ネームリスト

```
./advection < advection.nml
```

この結果，`advection.nc` が出力される．また，ネームリストの変数は以下のとおりである．

```
&input
  nx=100  ! 空間格子点数
  dt=0.05 ! 時間間隔
  nt=100  ! 計算ステップ数
  xmin=0.0 ! 領域左端
  dx=0.0628 ! 空間格子間隔
/
```

計算結果

4.2.13 diffusion

モジュール `ffttp` のテスト用プログラム．線形 1 次元の拡散方程式について，スペクトル法を用いてその時間発展を計算する．

計算を行う方程式系は空間方向に 1 次元の物理量 $u(x, t)$ についての純拡散方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

である．これを空間方向にはスペクトル展開し，時間方向にはクランクニ科尔ソンスキームを用いている．空間格子数等はネームリストファイル `diffusion.nml` で設定可能である．

実行方法・ネームリスト

```
./diffusion < diffusion.nml
```

この結果，`diffusion.nc` が出力される．また，ネームリストの変数は以下のとおりである．

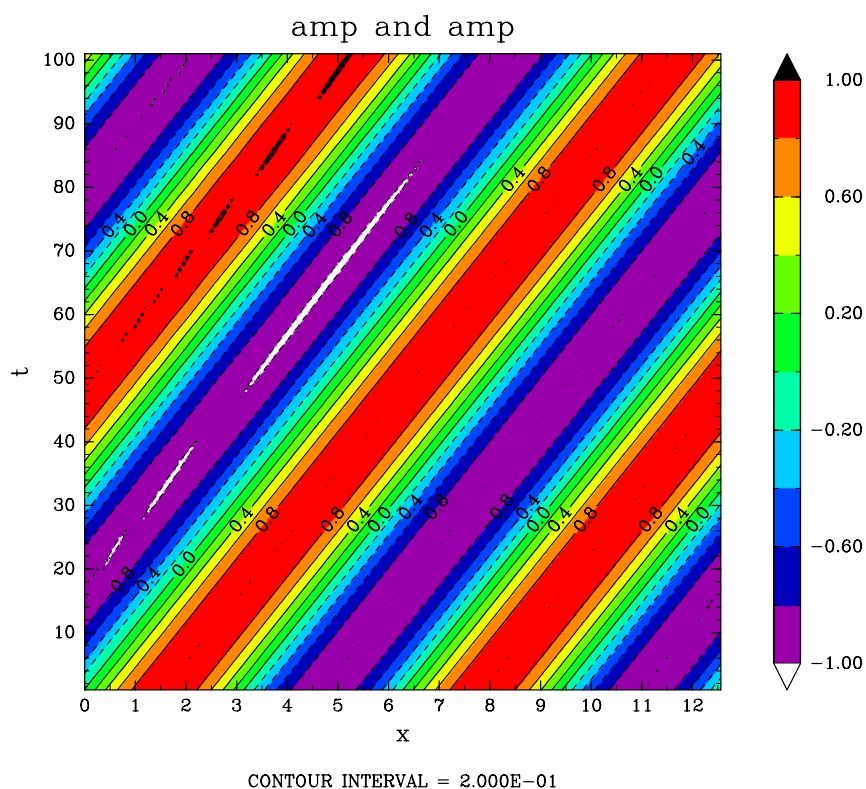


図 4.16: 波の時系列.

```
&input
nx=100  ! 空間格子点数
dt=0.01 ! 時間間隔
nt=100  ! 計算ステップ数
xmin=0.0 ! 領域左端
dx=0.0628 ! 空間格子間隔
/
```

計算結果

4.2.14 poisson

2次元水平面におけるポアソン方程式を計算するプログラム. 強制項は領域の中心に有限領域をもつテーブル関数型の強制を設定している.

計算する方程式は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\rho$$

である. ここで, ψ は 2 次元の未知関数, ρ は 2 次元の強制である.

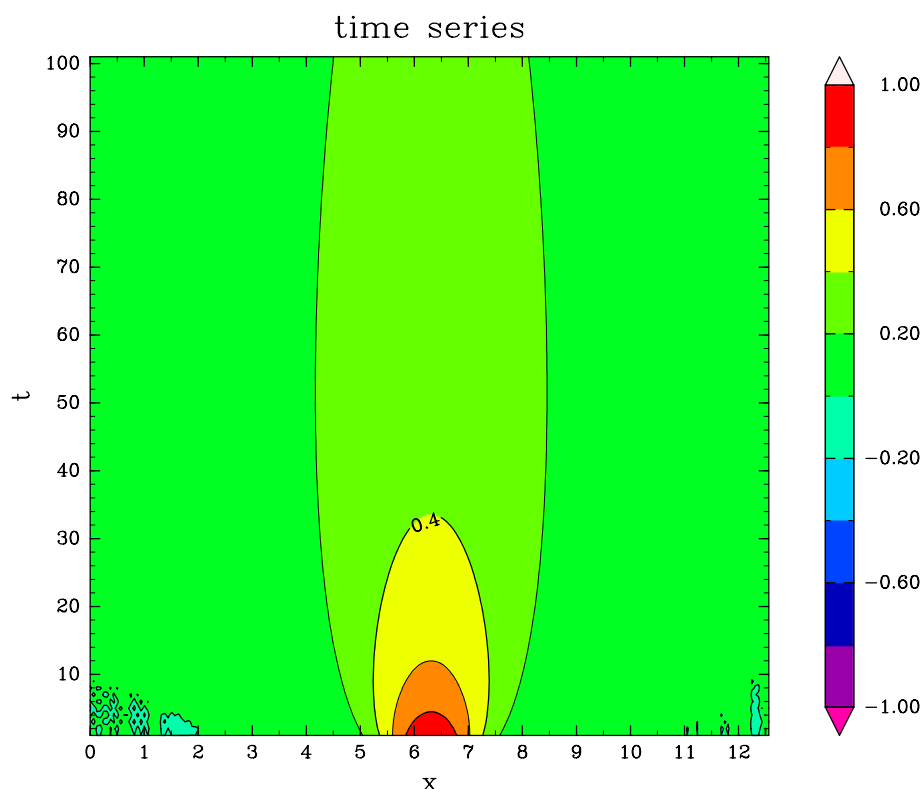


図 4.17: 波の時系列.

実行方法・ネームリスト

実行プログラムは `poison` というプログラム単体である. ネームリストファイルは `poison.nml`. 以下のように実行することができる.

```
./poison < poison.nml
```

ネームリストの変数は以下のとおりである.

```
&input
nx=100      ! x 方向格子数
ny=100      ! y 方向格子数
tp='1221'   ! 計算領域境界条件
method=2    ! 計算手法
ter_flag=.false. ! 内部領域境界をおく.
/
```

上記プログラムを実行すると, `poison.nc` という名前の NetCDF ファイルが出力される. 描画には `draw` プログラムを用いればよい. このときの描画設定ファイルは

draw_poison.nml である。また、計算結果のデータ出力とともに、演算に要した時間が標準出力で以下のように出力される。

```
*** MESSAGE [HistoryCreate1] *** "poison.nc" is created (origin=0. [])
*** MESSAGE [HistoryClose] *** "poison.nc" is closed
-----
Main solver running time =    1.02846E+01
This Method is Jacobi Method.
-----
```

計算結果

領域中心に円形テーブル関数型の強制を与えたときのポアソン方程式の計算結果は図 4.18 である。

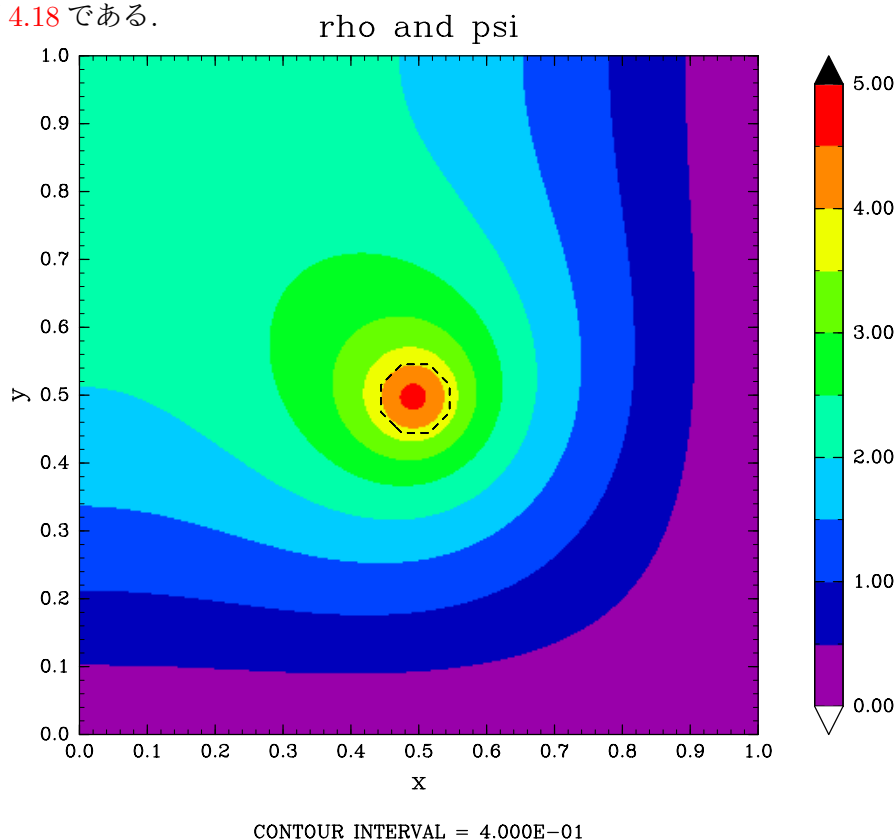


図 4.18: 領域中心にテーブル関数型の強制を与えた場合のポアソン応答。カラーが応答の分布であり、等値線が強制の境界である。

- 備考
- 境界条件の設定 `tp` はポアソンソルバの引数としてそのまま与えているので、境界条件の数字の意味は??, ?? 参照。
 - ポアソンソルバの設定 `method` は, 1 がガウスザイデル, 2 がヤコビ法。
 - 本ルーチンは内部に任意の境界をもつ計算でも行うことができる。変数のうち,

ter_bound は `.true.` に指定すると、内部境界領域が存在する設定で計算を行う。この内部境界領域を含んだ形で計算した結果が図 4.19 である。

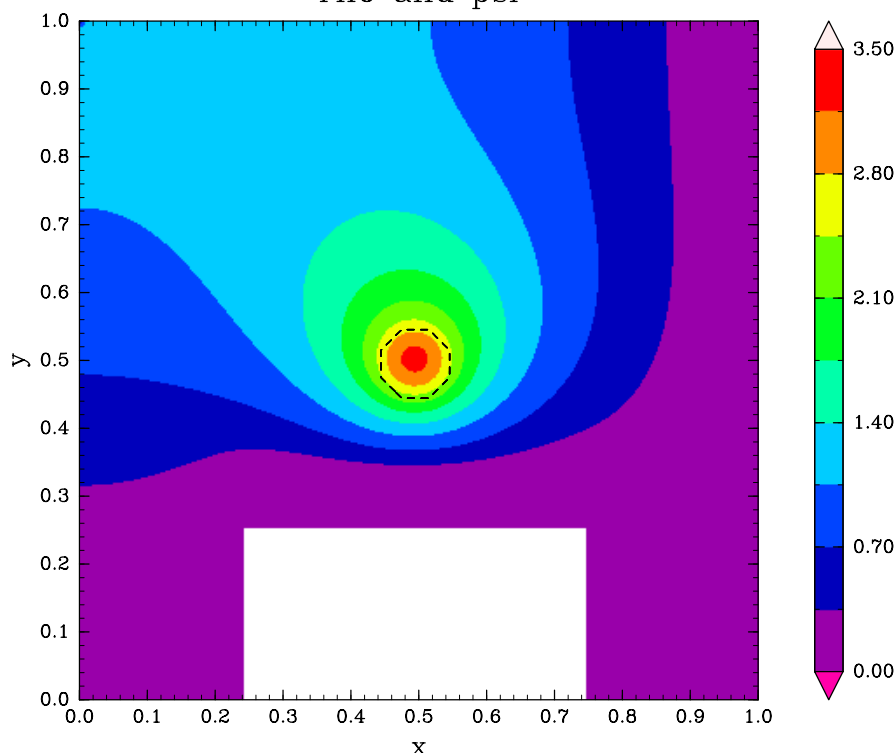


図 4.19: 領域中心にテーブル関数型の強制を与え、内部領域に未定義境界領域をもつ場合のポアソン応答。カラーが応答の分布であり、等値線が強制の境界である。白抜きの領域が内部境界領域であり、この領域では反復計算を行っていない。

4.2.15 adjust

教育用プログラム。線形 1 次元の f 面浅水方程式について、有限差分法を用いて地衡流調節と重力波放射をシミュレーションするプログラム。

方程式系などの詳細は 5.7.3 参照。

実行方法・ネームリスト

実行プログラムは `adjust` というプログラム単体である。初期値は `netcdf` 形式の 1 次元格子座標データとその格子点で定義された高さ、水平速度 2 成分のデータが格納されているファイルを読み込む。サンプル初期値は `ruby-netcdf` がインストールされていれば、`make.rb` というスクリプトを実行することで作成できる。この初期値データは水平速度がすべてゼロで高さのみ計算領域の中心で不連続となるプロファイルデータである (図 4.20 参照)。もしこのデータ以外で計算したい場合は各自でデータを用意すること。

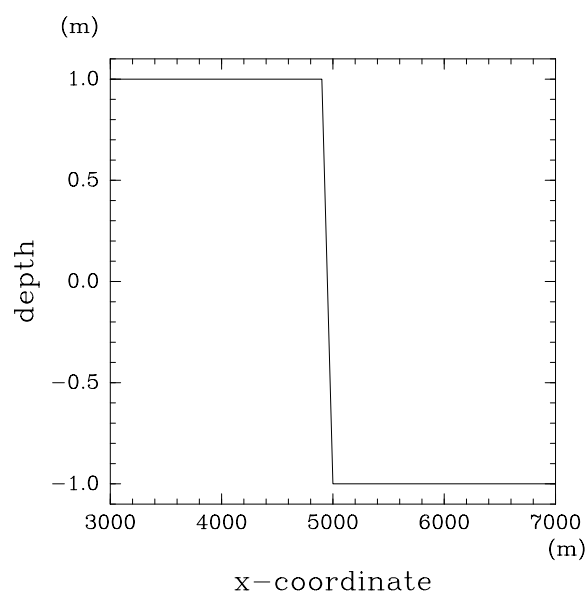


図 4.20: モデル初期の高さ偏差.

実行方法は以下のコマンドである。

```
./adjust < adjust.nml
```

この結果, `adjust.nml` の `oname` で設定されているファイル名で計算結果が出力される。

ネームリストの変数は以下のとおりである。

```
&input
  corioli = 1.0e-1    ! コリオリパラメータ [1/s]
! beta = 1.0e-5      ! ベータ係数 [1/m s]
  beta = 0.0         ! ベータ係数 [1/m s]
  mean_height = 100.0 ! 流体層の平均厚さ [m]
  fname = 'init.dat'  ! 初期値ファイル
  oname = 'result.nc' ! 結果の出力ファイル
  nt = 80000          ! 計算時間ステップ
  dt = 0.1            ! 時間間隔 [s]
  dmpstep = 100       ! 結果の出力ステップ間隔
  nx = 100            ! x 方向の格子点数
  x_axis = 'x'        ! 初期値ファイルの x 軸の名前
  val_height = 'ht'   ! 流体層の深さ分布の名前
  val_ubar = 'ub'     ! x 方向の一般風の名前
  val_vbar = 'vb'     ! y 方向の一般風の名前
  val_h = 'h'         ! 初期値ファイルの深さ変動の名前
  val_u = 'u'         ! 初期値ファイルの x 方向速度の名前
  val_v = 'v'         ! 初期値ファイルの x 直交方向速度の名前
```

```

bound = 2          ! 境界条件 "1" = no gradient, "2" = open bound
                   ! "3" = 周期境界条件
steady_flag = 'xxx' ! 定常状態の基本場を結果データに入れるかどうか.
                   ! 1 文字目 = 山の高さ (ht)
                   ! 2 文字目 = x 方向の流速 (ubar)
                   ! 3 文字目 = y 方向の流速 (vbar)
regist_flag = 'ox'  ! 各物理量への付加力項フラグ
                   ! regist_flag(1) = 粘性による抵抗 (波数依存)
                   ! regist_flag(2) = エクマン摩擦による抵抗
regist_coe = 1.0, 1.0, 1.0
                   ! regist_flag で指定した各付加力の係数
                   ! regist_coe(1) = 粘性係数 (u', v' への寄与)
                   ! regist_coe(2) = 拡散係数 (h' への寄与)
                   ! regist_coe(3) = エクマン摩擦のスピンアップ時間 [1/s]
/

```

計算結果

デフォルトのネームリストに設定されている外部パラメータの各設定値から、重力波の位相速度はおよそ 31 m/s、変形半径はおよそ 300 m となっている。このとき、定常状態となったときの高さの偏差と地衡流調節によって駆動される地衡流を示した図がそれぞれ 4.21, 4.22 である。

図 4.23 は高さの偏差の時系列にロスビー変形半径を黒線で重ねたものである。同様に地衡流の分布を示した図が 4.24 である。

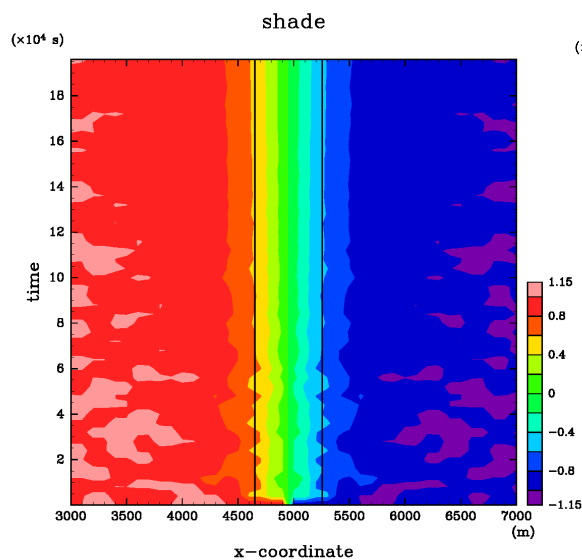


図 4.21: 高さの時系列変化。黒線がロスビー変形半径。

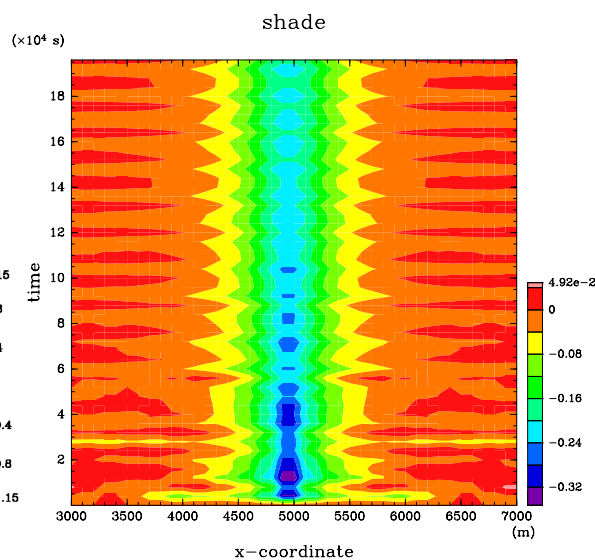


図 4.22: 地衡流の時系列変化。

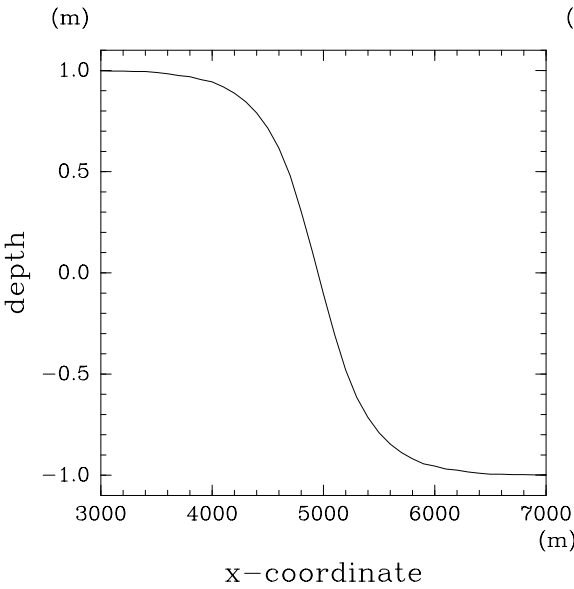


図 4.23: 定常状態での高さ。

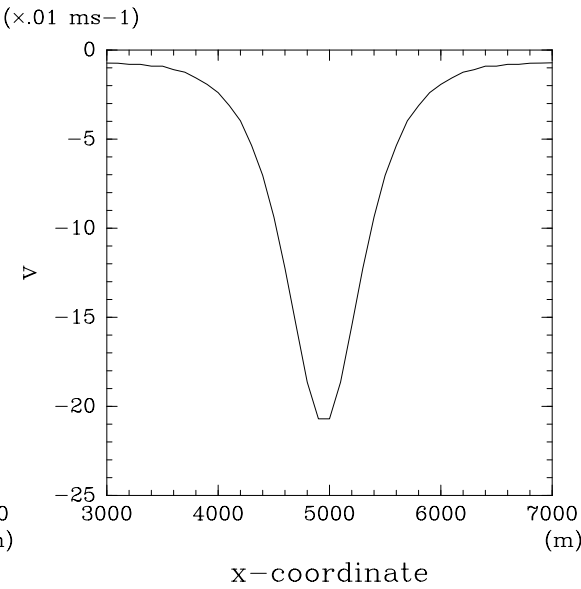


図 4.24: 定常状態での地衡流の分布。

さらに、図 4.25 は図 4.21 の積分開始初期部分だけを示したものであるが、顕著な重力波が中心から左右外向きに伝播していることがわかる。また、この時系列から重力波の位相速度を計算するとおよそ 30 m/s 程度で先に示した理論値とよく合うことがわかる。波のエネルギーは振幅の 2 乗に比例するため、この図からエネルギーが重力波とともに外向きに伝播している様子も明らかであろう。

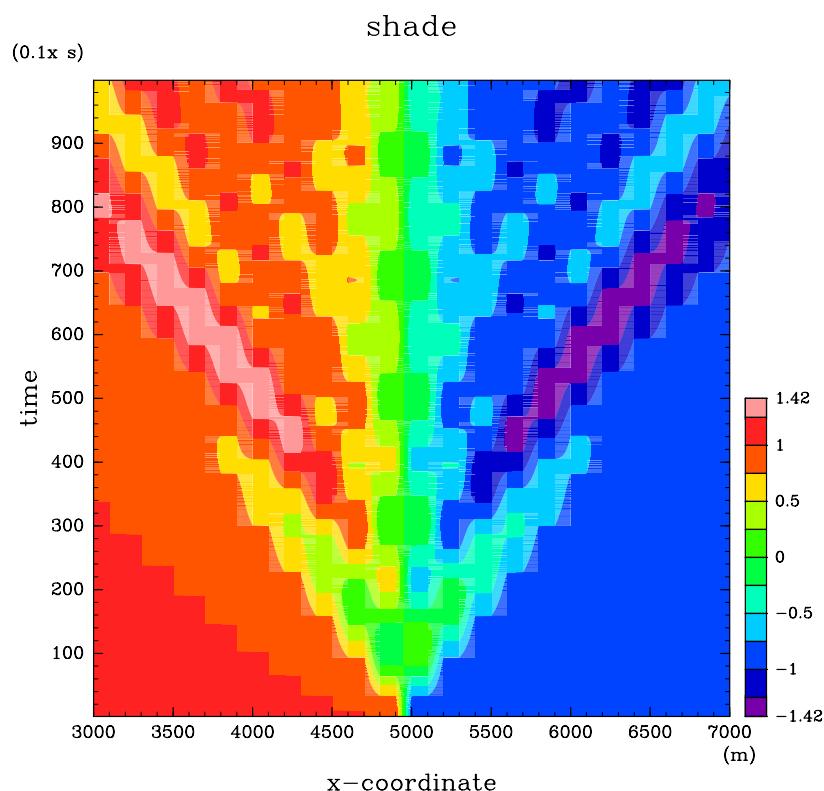


図 4.25: 積分開始初期における重力波の外向き伝播.

4.2.16 Thorpe_2d

Thorpe and Bishop (1995) によって計算された PV inversion の 3 次元理想モデルを 2 次元版にして簡易計算させたモデル。領域中央に円形の PV アノマリーを配置し、それに応答するジオポテンシャルの分布を計算する。ソースコードの強制項部分を変更するだけで、様々なタイプのアノマリーに対する応答を計算することができる。出力結果は、ジオポテンシャルとそこから計算される地衡風の分布が格納されている。

実行方法・ネームリスト

本プログラムは以下のように実行する.

```
$ ./Thorpe_2d < Thorpe_2d.nml
これにより計算結果である Thorpe_2d.nc が生成される.
```

また, 実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである.

```
&input
nx=100
ny=100
tp='1111'
method=2
/
```

計算結果

本プログラムの結果から得られた 2 次元循環の分布は図 4.26 に示す. 2 次元計算であるため, 地衡風は 1 成分しか計算することはできない. カラーで示した量は紙面に垂直な成分を示したものである.

4.2.17 Thorpe_3d

Thorpe and Bishop (1995) によって計算された PV inversion の 3 次元理想モデルを計算させるモデル. 領域中央に円形の PV アノマリーを配置し, それに応答するジオポテンシャルの分布を計算する. ソースコードの強制項部分を変更するだけで, 様々なタイプのアノマリに対する応答を計算することができる. 出力結果は, ジオポテンシャルとそこから計算される地衡風の分布が格納されている.

実行方法・ネームリスト

本プログラムは以下のように実行する.

```
$ ./Thorpe_3d < Thorpe_3d.nml
これにより計算結果である Thorpe_3d.nc が生成される.
```

また, 実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである.

```
&input
nx=100
ny=100
nz=100
tp='111111'
method=2
/
```

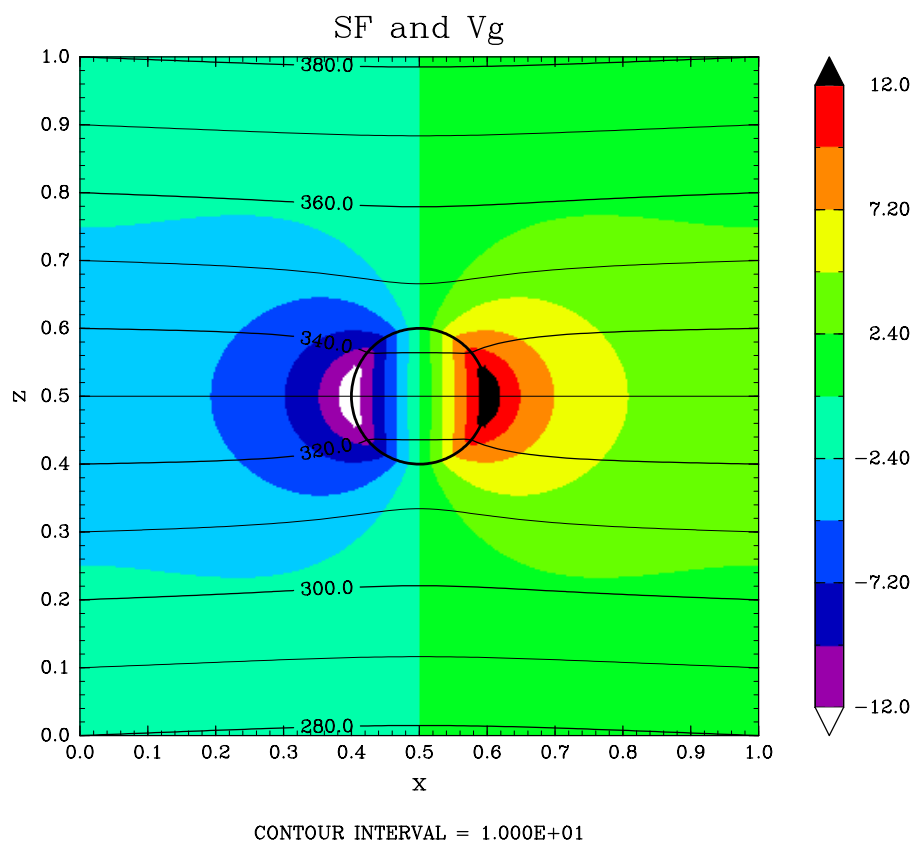


図 4.26: 中央の円形の黒線を境界にもつ PV アノマリが存在する場合の温位 (等値線) と地衡風 (カラー) の応答.

計算結果

本プログラムの結果から得られた 2 次循環の分布は図 4.27 に示す. y 軸の中心を通る $x-z$ 断面で, カラーで示した量は紙面に垂直な成分を示したものである.

図 4.27: 中央の円形の黒線を境界にもつ PV アノマリが存在する場合の温位 (等値線) と地衡風 (カラー) の応答.

4.2.18 SEQ

Pendergrass and Willoughby 2009 (MWR) における 2 次元軸対称ソーヤーエリアッセンモデル (SEQ) である. 接線風の渦の分布と環境場の温度構造, 壁雲を想定した非断熱加

熱の分布を与えると、静力学、傾度風バランスを満たした 2 次循環 (インフロー + 上昇流) の分布を計算する (いわゆる強制・応答問題)。

demo/SEQ 以下にモデル一式が格納されている。demo/SEQ のディレクトリには、さらに詳細に各循環を示した図も同梱されているので、確認されたい。元の論文の結果とほぼ同様の結果となっていることが確認されるであろう。

なお、詳細なモデル方程式等については付録参照。

実行方法・ネームリスト

本プログラムは 3 つのプログラムを順に実行することで 2 次循環を計算する。

1. `sound_make` は 1 次元の理想的なサウンディングファイルを作成する。既にサウンディングがある場合は、このプロセスは省略することができる。
2. `initial_make` は先の 1 次元サウンディングファイルを 2 次元方向に拡張する。その際、このプログラム内で定義されている 1 次循環に基づいて、傾度風バランス、温度風バランスするように温度や気圧の水平分布を修正する。
3. 先の 2 次元初期値生成プログラムで作成された 1 次循環と非断熱加熱の分布、温度分布をもとに、2 次循環の分布を計算する。

```
$ ./sound_make < SEQ.nml
```

を実行すると、`sounding.dat` が生成される。

```
$ ./initial_make < SEQ.nml
```

を実行すると、先の `sounding.dat` に基づいて、2 次元の初期値データ `initial.nc` が生成される。

```
$ ./SEQ < SEQ.nml
```

を実行すると、`initial.nc` から 2 次循環の分布を診断的に計算する。その結果は `result_initial.nc` というファイルに出力される。ここで、実行環境がマルチコア環境であるなら、以下のコマンドを実行することにより、openMP 並列が設定される。

```
export OMP_NUM_THREADS=[number]
```

ここで、`[number]` には並列数を入力する。ただし、openMP 並列を行う場合は、`../Mkinclude` の Fortran コンパイルフラグに openMP を実行するオプションをつけて `make` しておく必要があることに注意。

また、実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

```
&input
nr = 751  ! radial grid number
nz = 21  ! vertical grid number
dr = 2000.0 ! radial grid interval [m]
dz = 1000.0 ! vertical grid interval [m]
bc = '1112' ! boundary conditions for poisson solver
          ! bc(1:1) = bottom
```

```

! bc(2:2) = center
! bc(3:3) = top
! bc(4:4) = outside
! '1' = rigid lid, '2' = non flux

fname = 'noq_init.nc' ! forcing profile data (2d)
sound_name = 'sounding.dat' ! sounding data (1d)
coril = 20.0 ! latitude [deg] (Using of calculating Coriolis parameter)
mom_flag = 1 ! momentum source flag
! "0" = No momentum.
! "1" = calculating with Vt.
! "2" = reading from the file of "fname".

/

```

計算結果

本プログラムの結果から得られた 2 次循環の分布は図 4.28 に示す.

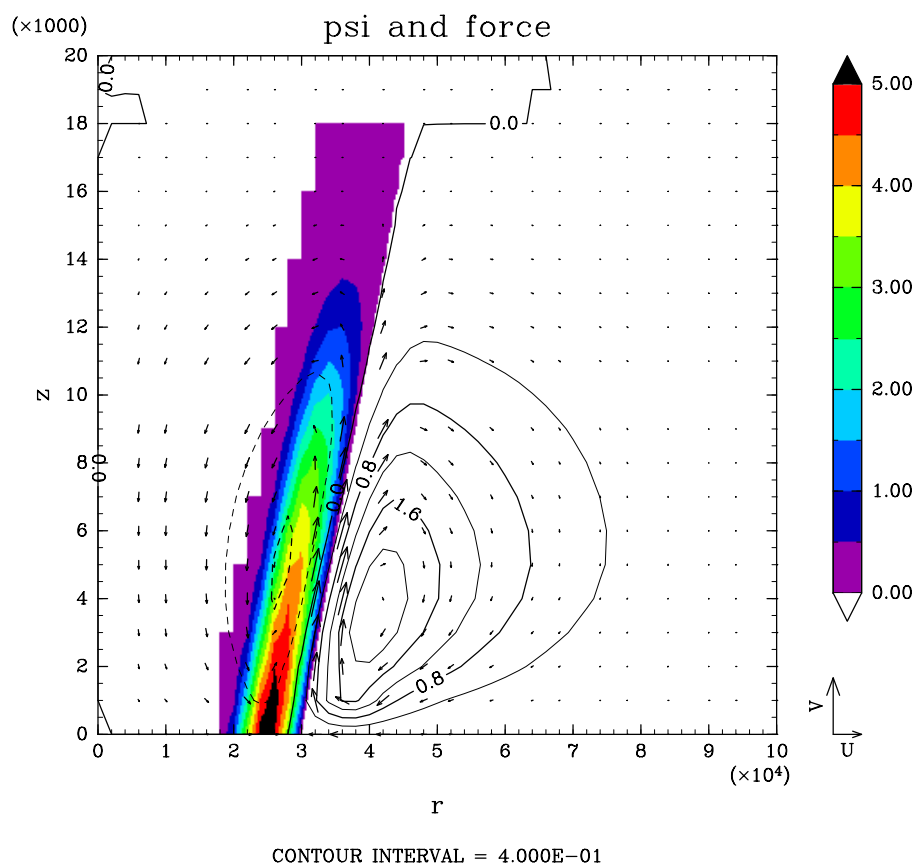


図 4.28: 診断的に求められた 2 次循環 (矢印) と非断熱加熱の分布 (カラー), さらに質量流線関数 (等値線) である.

描画

同ディレクトリに格納されている描画プログラムは親ディレクトリで

```
$ make draw
```

を実行すれば, SEQ ディレクトリにシンボリックリンクされている `draw` が使用できる. `draw` の使用方法は付録?? 参照.

4.2.19 sound_analysis

任意のテキストカラムデータを読み込み可視化するためのプログラム群. 可視化のためには, Fortran 90 版 DCL がインストールされている必要がある.

本プログラム群は高層気象観測における未処理のテキストカラムデータから初期解析のための可視化を自動で行うという目的で作成されたものである.

プログラム構成

本プログラムは以下のプログラム群で構成されている.

sound_conv

テキストカラム形式で格納された大気鉛直プロファイルデータから, CReSS の 1 次元初期値を作成するための変換プログラム. 本プログラムは DCL がインストールされていなくても実行が可能である.

sound_1d

`sound_conv` で変換されたデータを元に, 鉛直プロファイル図を作成し, 可降水量等の鉛直パラメータを計算するプログラム. 実行には DCL がインストールされている必要がある.

sound_2d

`sound_conv` で変換されたデータを元に, 鉛直プロファイルの時系列図を作成し, 可降水量等の鉛直パラメータの時系列図も作成するプログラム. 実行には DCL がインストールされている必要がある.

コンパイル方法

DCL がインストールされていない場合, つまり CReSS 用の初期値作成のみ行いたい場合は,

```
$ make sound_conv
```

と実行すれば, 同ディレクトリに `sound_conv` というプログラムが作成されている. DCL がインストールされている場合, つまり可視化まで行いたい場合,

```
$ make sound_draw
```

と実行すれば, 同ディレクトリに `sound_1d`, `sound_2d` が作成されている.

実行方法

本プログラム群は全て以下のような形式で実行が可能である。

```
$ ./[program file] < [program file].nml
```

実行の流れは図 4.29 に示すとおりである。可視化を行うには必ず `sound_conv` を実行して読み込むための専用形式に変換しなければならない。

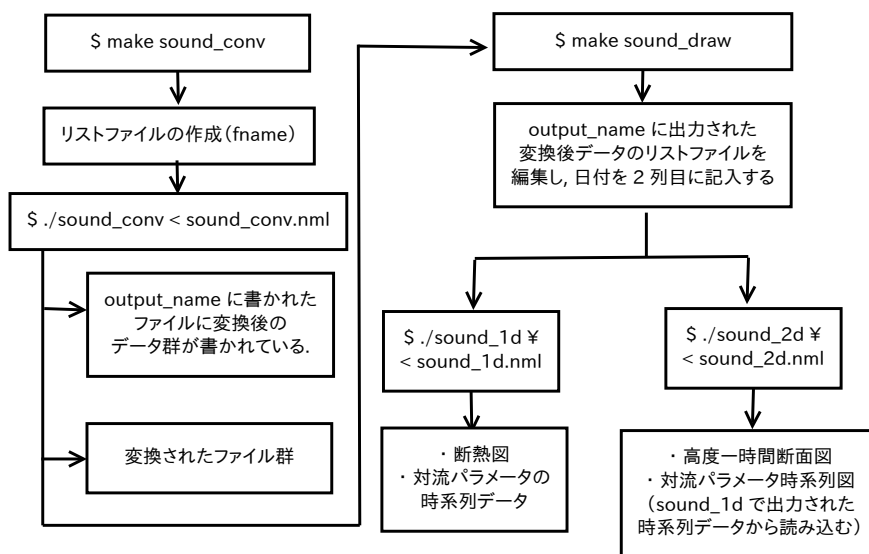


図 4.29: `sound_analysis` におけるプログラムの実行流れ。

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである。

sound_conv

```

&input
fname = 'list.dat' ! 変換するファイル列が書かれたリストファイル
sign_flag = '0a00000006510000000032400000000000000000' ! 各カラムの表す
変数
! '1' = height
! '2' = temperature
! '3' = pressure
! '4' = vapor
! '5' = west wind ! positive value is from west to east
! '6' = south wind ! positive value is from south to north
! '7' = tmp1
! '8' = tmp2
! '9' = tmp3
! '0' = no read
! 'a' = starting observation time [s] (option)
undef = '--' ! 欠損値として定義されている文字

```

```

conv_undef = -999.0 ! 変換後のデータに対する欠損値
skip_num = 8 ! 先頭の読み飛ばし行数 [ヘッダー等を読み飛ばす]
unity = 'm', 'degC', 'hPa', '%', 'degree', 'false' ! 単位
! unity(1:1) = 'm' .or. 'km' ! 高度の単位
! unity(2:2) = 'K' .or. 'degC' .or. 'PK' ! 温度の単位
! unity(3:3) = 'Pa' .or. 'hPa' ! 気圧の単位
! unity(4:4) = '%' .or. 'g/kg' .or. 'kg/kg' ! 水蒸気量の単位
! unity(5:5) = 'm/s' .or. 'rad' .or. 'degree' ! 風速の単位
! unity(6:6) = 'true' or 'false' ! 風向
! もし、風が風速と風向で記録されている場合は rad が角度を表し、
! 原点方位は北、かつ、時計まわりに正方向とする。
! このような単位で記録されている場合、"west wind" に風速、
! "south wind" に風向が読み込まれるように sign_flag を設定する。
! unity(6:6) :
! 風が流れる方向を正として格納している場合 'true'
! 風が流れてくる方向を正として格納している場合 'false'
! [exam.] : 北向きの風が正なら、'true'、北風が正なら 'false'。
limit_height = 300.0 ! reading start height [m]
snd_height = 100.0 ! 観測点の標高 [m]
output_name = 'tested.dat' ! 変換したファイル列が書き込まれるリストファイ
ル名
conv_inter = .true. ! 変換データを間引くかどうか
dz_conv = 100.0 ! conv_inter = .true. のときの間引き間隔 [m]
hydro_ref = 1013.25e2 ! あるいは 3 のどちらかがない場合、静力学関係から
! 補完を行う。1 が指定されない場合、基準高度 [m] を、3 が指定されな
い
! 場合、基準圧力 [Pa] を hydro_ref に指定する。
rev_flag = .false. ! 入力データが高度について上向きに入っているなら .false.
! 下向きに入っているなら .true. で順番を逆にする。
! CReSS の 1 次元入力データを変換するなら .true.
! ラジオゾンデデータを変換するなら .false.
/
sound_1d

&input
z_ref = -999.0 ! 対流パラメータ計算の際の基準高度 [m]
p_ref = 950.0e2 ! 対流パラメータ計算の際の基準高度 [Pa]
! もし、z_ref を基準とするなら、p_ref = -999.0,
! p_ref を基準とするなら、z_ref=-999.0 とすること。
list_name = 'tested.dat' ! sound_conv で変換したデータリストファイル
dmp_flag = .true. ! 対流パラメータをテキストデータとして保存する [true].
!draw_flag = 'xoxox' ! 描画に関するフラグ。
draw_flag = 'oxooo' ! 描画に関するフラグ。
! 'o' = デフォルト設定で描画する。'x' = 描画しない。
! その他の文字による設定は以下参照。
! draw_flag(1:1) = 温位、相当温位、飽和相当温位図を作成する。
! draw_flag(2:2) = Skew-T を作成する。
! draw_flag(3:3) = 図に水平風速の分布を追記する。
! draw_flag(4:4) = 図に各対流パラメータの計算結果を表示する。
! draw_flag(5:5) = 速度場を元にホドグラフを作成する。
draw_region_z = 0.0, 17000.0 ! 描画する高度領域 [m]

```

```

draw_region_p = 10000.0, 100000.0 ! 描画する圧力領域 [Pa]
! draw_region はどちらも要素数 2 の 1 次元配列であり,
! draw_region(1) はグラフの下端, draw_region(2) はグラフの上端
領域.
IWS = 2
undef = -999.0 ! 欠損値
unit_v = 15.0 ! 風速分布を表記する際の単位ベクトル [m/s]
sysfont = 'Nimbus Sans L Bold 12'
/

sound_2d

&input
flist = 'tested.dat' ! 描画用時系列データファイル
! 時系列データは 1 列目にファイル名,
! 2 列目に yyyyymmddhh 形式でその時刻を入れる
conv_dat = 'convec_parmtested.dat' ! sound_1d で出力される対流パラメー
タを読み込み,
! 時系列図を作成する.
conv_list = 'tzpxxx' ! conv_dat のデータのうち, 描くデータが入っている
! カラムの順番に 'o' をつける. 'x' なら書かない.
! 't' は時刻が格納されている列
! 複数 'o' が入っている場合は, 別々の時系列図として
! 出力する.
! 'z', 'p' は対流パラメータを計算した基準高度が格
納
! されている列を表す.
! 時系列のタイトルはそれぞれ, データ行の先頭を参照.
conv_undef = -999.0 ! conv_dat の未定義値.
dz = 100.0 ! 描画間隔 [m]
z_bot = 300.0 ! 描画下端 [m]
z_top = 17000.0 ! 描画上端 [m]
IWS = 2 ! DCL 描画デバイス
title_txt = 'Equivalent PT' ! タイトル
cmin = 300.0 ! 等値線の最小値
cmax = 400.0 ! 等値線の最大値
smin = 300.0 ! カラーの最小値
smax = 400.0 ! カラーの最大値
cont_val = 'ept' ! 等値線として表示する変数名*
shade_val = 'ept' ! カラーとして表示する変数名*
vec_val = .true. ! 水平風速ベクトルを描くか [true で描く]
cnum = 10 ! 等値線の本数
snum = 10 ! カラーの数
undef = -999.0 ! 未定義値
sysfont = 'Nimbus Sans L Bold 12'
/
! * 描画変数の種類は以下のとおり
! 'temp' = 温度
! 'rh' = 湿度
! 'qv' = 混合比
! 'pt' = 温位
! 'ept' = 相当温位
! 'sept' = 飽和相当温位
! 'east' = 東西風
! 'north' = 南北風

```

これらのネームリストに必ず入力しなければならない「変換するファイル列が書かれたリストファイル」というものは、変換したいファイルが複数存在する場合、そのファイルたちの名前を 1 行 1 ファイルで並べた 1 つのリストファイルを作成するという意味である。例として、201103.dat から 201203.dat という 13 個のファイルを順に変換したいとすると、test.dat という空ファイルに

```
201103.dat
201104.dat
:
201202.dat
201203.dat
```

という内容を書けばよい。ネームリストファイルの「変換するファイル列が書かれたリストファイル」には、test.dat が該当する。

さらに、sound_1d、sound_2d については、「読み込むファイルリストの書かれたファイル」は、1 列目にファイル名を記述し、2 列目には、そのファイルに対応する日付を `yyyymmddhh` というフォーマットで格納する。可視化した際のタイトルはこの 2 列目の文字が代入される。上の例を用いると、

```
201103.dat 2011030100
201104.dat 2011040100
:
201202.dat 2012020100
201203.dat 2012030100
```

という形式でリストファイルを作成すればよい。重要なことは、これらのプログラムに必要なファイルは実際に気象データの入ったテキストカラムデータ群とそのデータ群をリストアップした 1 つのリストファイルである、ということである。

ちなみに、可視化用プログラムのリストファイルは読み込むデータファイル名に "unknown" という単語を記述し、後ろに日付を入れると、その日は欠損値扱いとし、時系列作成プログラム内で白抜き表示される。sound_2d を実行する際、リストファイルの日時の最初は 00 時、最後も 00 時で統一すること。該当するデータがない場合は先述の "unknown" で代用すること。

計算結果

図 4.30, 4.31, 4.32 参照。

4.2.20 NM01

浅水系における軸対称流な基本場に埋め込まれた非軸対称成分の時間発展を計算する非線形ハイブリッドスペクトルモデル（その発展の様子から、洗濯機モデルと作成者は命

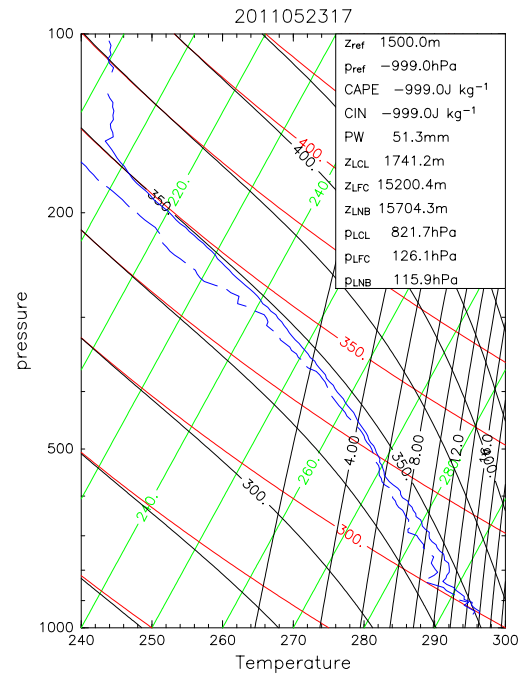
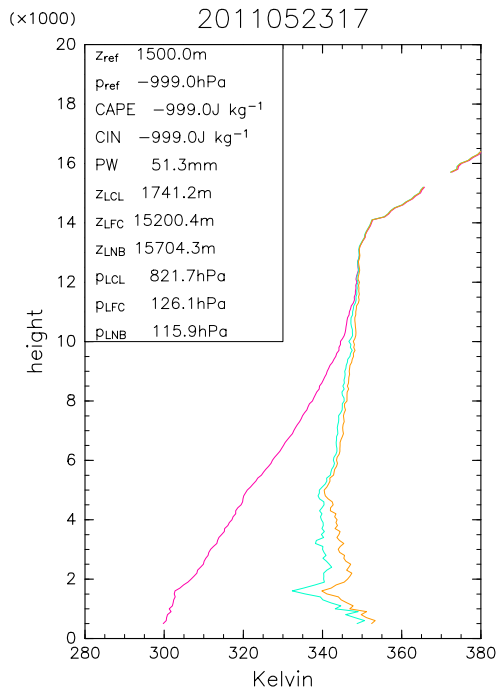


図 4.30: sound_1d で可視化されるサウンディングプロファイル (Skew-T 版). 図 4.31: sound_1d で可視化されるサウンディングプロファイル (エマグラム版).

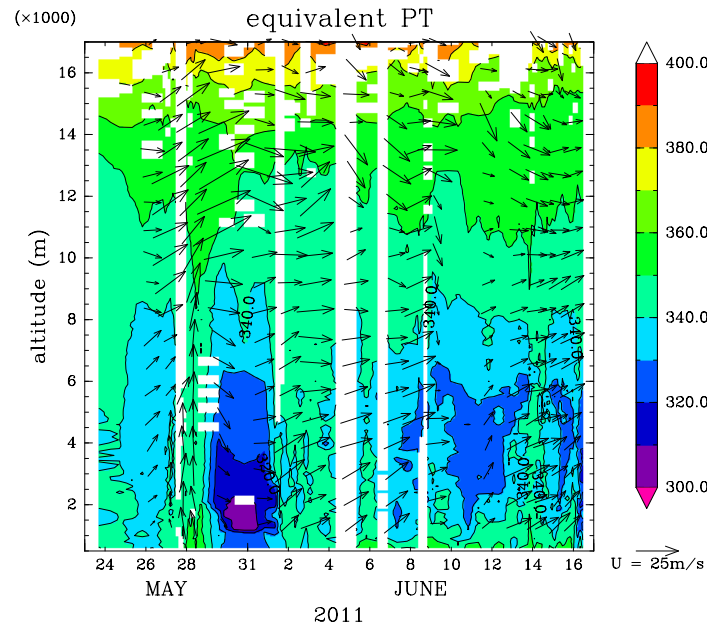


図 4.32: sound_2d で可視化される高度-時間断面図.

名). 以下はモデルの詳細である.

座標系は円筒座標系 (r, θ) 、微分の評価は r 方向には 2 次精度の中心差分、 θ 方向にはフーリエスペクトル法を採用した。スペクトル法における非線形項計算は変換法を用いている。定常な軸対称流を基本場とし、初期にその流れに埋め込まれた有限振幅の擾乱の時

間発展を計算する。接線方向の軸対称流の動径分布を与えると傾度風バランスするように基本場の深さが自動的に与えられる。また、動径方向の基本場についても接線方向の軸対称流と同様に動径方向の分布を与えれば時間発展で考慮することができる^{*1}。

本モデルは単一プロセッサのみで計算させるシングル版 (NM01_s) と複数プロセッサで計算させるマルチ版 (NM01_m) が存在する。シングル版は OpenMP 並列のみ行っているが、マルチ版は OpenMP 並列に加え、ノード間については MPI 並列も行っている。

シングル版

コンパイル

本プログラムは 2 つのプログラムを順に実行することで非軸対称成分の時間発展を計算する。

1. 以下のコマンドにより、実行ファイル (make_init, VRWS) を生成する。

```
$ make
```

2. make_init は動径方向の軸対称流の分布ファイルを作成する。既に分布ファイルがある場合は、このプロセスは省略することができる。
3. VRWS は先の軸対称流の分布をもとに、ネームリスト（後述）で設定された波数の単色波を初期値としてその非軸対称成分の時間発展を計算する。

実行方法

以下のコマンドを順次実行する。

```
$ ./make_init
input the initial file name. (作成する初期データファイル名)
You have velocity data [y/n]. (軸対称のデータがあるか; 後述)
$ export OMP_NUM_THREADS=[number] (CPU 並列数; 任意)
$ ./VRWS < namelist.nml
```

- make_init では、2 つ目に聞かれる質問で、軸対称風のデータも全くないときは "y" を選択する。すると、make_init に設定されている理想的な動径方向の速度分布が与えられる。高度場は計算した理想的なプロファイルから地衡流バランスするような分布が自動的に計算される。
- "n" を選ぶと、実行者が用意した風の動径プロファイルのデータを使って計算させることができる。このとき、読み込む形式は NetCDF 形式のみ対応している。"n" と選択すると、

^{*1} 方程式系などのモデルの詳細は付録 5.7.2 参照。

```
input file name and radial grid number.
radial flow is forced to zero ? [y/n].
```

という 2 つの質問を聞かれるので, 1 つ目は用意した NetCDF ファイルの名前と格子点数を, 2 つ目は動径風がデータとして入っている場合, それを計算で使用するか, それともゼロとして計算しないかを入力する. "Y" ならば, 動径風も計算に組み込む.

- OMP_NUM_THREADS は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり, もし, コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば, この環境変数の設定によって並列計算が可能である. [number] には並列数を入力する.
- VRWS を実行すると, 計算が開始する. その結果は namelist.nml の foname で設定しているファイルに出力される.

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである.

```
&input
nr = 196  ! radial grid number
hnt = 90  ! tangential truncation wavenumber
          ! tangential grid number is equal to "2 * hnt + 1"
nt = 72000 ! calculating time step
rmin = 0.0 ! radial center [default]
dr = 4000.0 ! radial grid interval [m]
dt = 0.5 ! time interval [s]
dmpstp = 600 ! dumping time step
          ! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"
fname = "initial.nc" ! data for axisymmetric profiles
foname = "result.nc" ! result data
ni = 10000 ! radial grid number in "fname"
nl_flag = .false. ! flag of non-linear term
          ! "false" is not calculating a non linear terms
r_dmp = 600000.0 ! effective radius for Rayleigh damping
          ! the damping is forced outside this radius
time_flag = '1' ! time scheme :
               ! [1] = 4th order's Runge-Kutta
               ! [2] = Leap Frog
               ! [3] = 1th Explicit Euler
force_flag = 'ooooooooxx' ! forcing flag
                      ! 'o' = calculating, 'x' = neglecting
                      ! force_flag(1:1) = linear advection term
                      ! force_flag(2:2) = coriolis term
                      ! force_flag(3:3) = diffusion term
                      ! force_flag(4:4) = Reiley dumping term
```

```

! force_flag(5:5) = non-linear advection term
! force_flag(6:6) = centrifugal force term
! force_flag(7:7) = divergence term [only "depth"]
! force_flag(8:8) = gravity wave term
! force_flag(9:9) = temporary value [not using]
! force_flag(10:10) = temporary value [not using]

diff_r = 1.0 ! radial diffusion coefficient [m^2/s]
diff_t = 1.0 ! tangential diffusion coefficient [m^2/s]
init_n = -1 ! initial non-axisymmetric wave number
           ! -1 = random wave
/

```

計算結果

本プログラムの結果から得られた非軸対称成分の分布は図 4.33 に示す。

描画

同ディレクトリに格納されている描画プログラム `draw_polar` を実行することで描画が可能である。このプログラムの使用法は付録 ?? 参照。

マルチ版

[注意] 本プログラムを `make` コマンドによってコンパイルする場合、`Makefile` の初期設定は `../../Mkinclude_MPI` に記述されているので、ここを自身の環境に合った設定にすること。

コンパイル

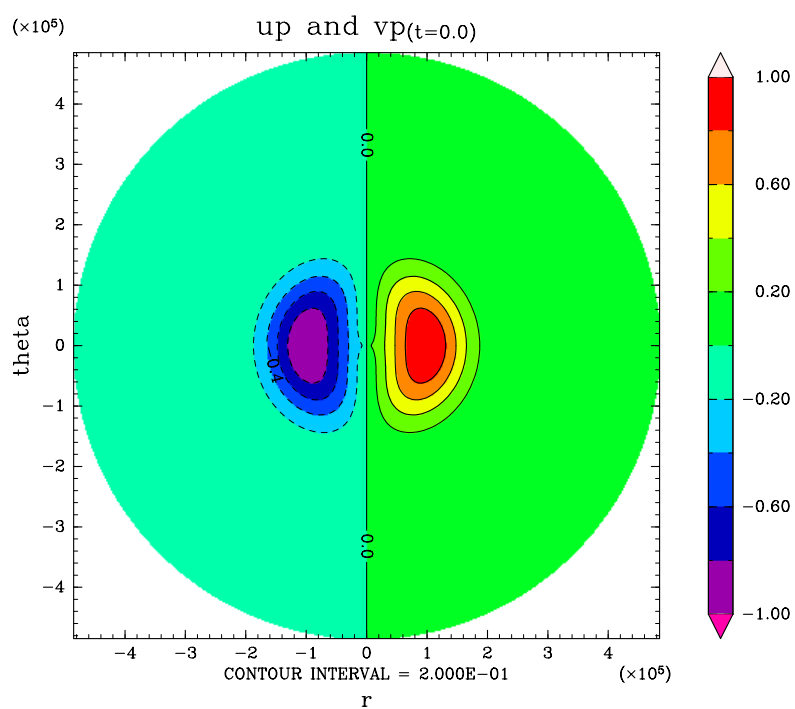
本プログラムは STPK をコンパイルした Fortran コンパイラと同一のコンパイラでビルドされた MPI ライブラリが必要である。現在、OpenMPI による並列化は正常に機能している。

本プログラムは 4 つのプログラムを順に実行することで非軸対称成分の時間発展を計算する。

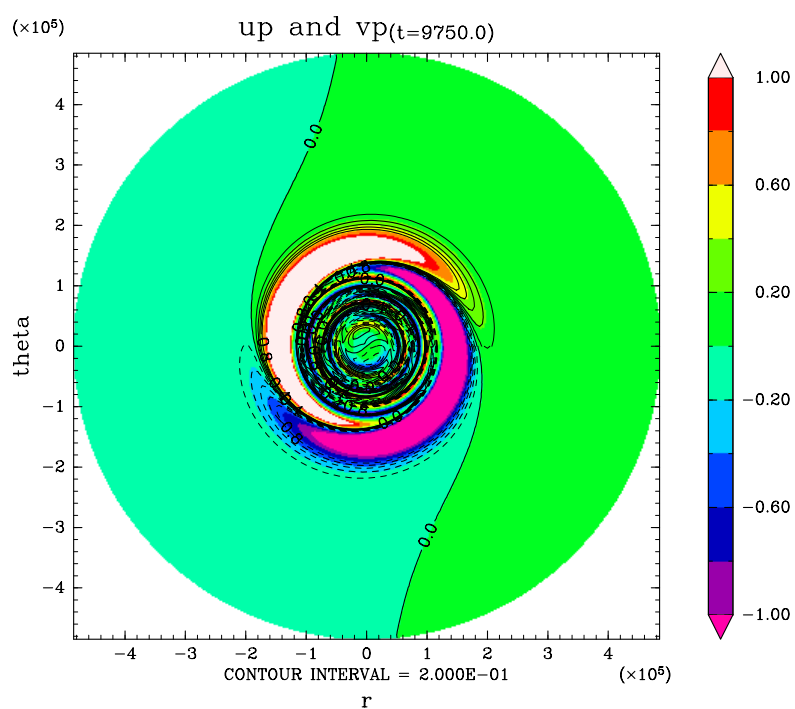
1. 以下のコマンドにより、実行ファイル (`make_init`, `splitter`, `cpmbinator`, `VRWS`) を生成する。

```
$ make
```

2. `make_init` は動径方向の軸対称流の分布ファイルを作成する。既に分布ファイルがある場合は、このプロセスは省略することができる。
3. `splitter` は `make_init` によって作成、あるいはすでに用意されている分布ファイルを `namelist` ファイルの情報をもとにして適切な初期値データに分割する (各プロセッサが各自読み込むファイルに分割する)。



(a)



(b)

図 4.33: 計算結果から得られた非軸対称成分のうち, 等値線で動径方向の速度, カラーで接線方向の速度を示す. 上は初期値, 下は初期からある程度時間が経過した時刻の非軸対称成分の分布.

4. VRWS は先の軸対称風の分布をもとに、ネームリスト（後述）で設定された波数の単色波を初期値としてその非軸対称成分の時間発展を計算する。
5. combinator は VRWS の計算結果（分割データ）を namelist ファイルの設定をもとに 1 つに合わせる。

実行方法

以下のコマンドを順次実行する。

```
$ ./make_init
input the initial file name. (作成する初期データファイル名)
You have velocity data [y/n]. (軸対称のデータがあるか; 後述)
./splitter < namelist.nml
$ export OMP_NUM_THREADS=[number] (CPU 並列数; 任意)
$ mpirun -np [並列ノード数 (proc)] ./VRWS < namelist.nml (後述)
./combinator < namelist.nml
```

- `make_init` では、2 つ目に聞かれる質問で、軸対称風のデータも全くないときは "y" を選択する。すると、`make_init` に設定されている理想的な動径方向の速度分布が与えられる。高度場は計算した理想的なプロファイルから地衡流バランスするような分布が自動的に計算される。
- "n" を選ぶと、実行者が用意した風の動径プロファイルのデータを使って計算させることができる。このとき、読み込む形式は NetCDF 形式のみ対応している。"n" と選択すると、

```
input file name and radial grid number.
radial flow is forced to zero ? [y/n].
```

という 2 つの質問を聞かれるので、1 つ目は用意した NetCDF ファイルの名前と格子点数を、2 つ目は動径風がデータとして入っている場合、それを計算で使用するか、それともゼロとして計算しないかを入力する。"Y" ならば、動径風も計算に組み込む。

- `splitter` は namelist ファイルの `fname` で設定されたファイル名のファイルを読み込み、各プロセッサが読み込むための最適な初期値データを作成する。
- `OMP_NUM_THREADS` は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり、もし、コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば、この環境変数の設定によって並列計算が可能である。[number] には並列数を入力する。
- ここでは、OpenMPI の並列実行コマンド `mpirun` を用いる。並列ノード数は namelist ファイルに設定される `proc` で指定している数と同じものを用いること。VRWS を実行すると、計算が開始する。その結果は namelist.nml の `fname` で設定しているファイルに出力される。

- combinator は VRWS で出力された分割ファイルを 1 つに結合する. このとき, 結合されたファイル名は namelist ファイルの foname で設定されたものとなる.

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである.

```
&input
nr = 198 ! radial grid number
hnt = 90 ! tangential truncation wavenumber
          ! tangential grid number is equal to "2 * hnt + 1"
nt = 720 ! calculating time step
rmin = 0.0 ! radial center [default]
dr = 4000.0 ! radial grid interval [m]
dtl = 0.5 ! large time interval [s]
dts = 0.5 ! small time interval [s]
dmpstp = 50 ! dumping time step
          ! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"
fname = "initial.nc" ! data for axisymmetric profiles
foname = "result.nc" ! result data
ni = 10000 ! radial grid number in "fname"
nl_flag = .false. ! flag of non-linear term
          ! "false" is not calculating a non linear terms
r_dmp = 600000.0 ! effective radius for Rayleigh damping
          ! the damping is forced outside this radius
time_flag = '1' ! time scheme :
              ! [1] = 4th order's Runge-Kutta
              ! [2] = Leap Frog
              ! [3] = 1th Explicit Euler
force_flag = 'oooooooo' ! forcing flag
                  ! 'o' = calculating, 'x' = neglecting
                  ! force_flag(1:1) = linear advection term
                  ! force_flag(2:2) = corioli term
                  ! force_flag(3:3) = diffusion term
                  ! force_flag(4:4) = Reiley dumping term
                  ! force_flag(5:5) = non-linear advection term
                  ! force_flag(6:6) = centifugal force term
                  ! force_flag(7:7) = divergence term [only "depth"]
                  ! force_flag(8:8) = gravity wave term
                  ! force_flag(9:9) = temporary value [not using]
                  ! force_flag(10:10) = temporary value [not using]
diff_r = 1.0 ! radial diffusion coefficient [m^2/s]
diff_t = 1.0 ! tangential diffusion coefficient [m^2/s]
init_n = -1 ! initial non-axisymmtric wave number
          ! -1 = random wave
/
&para
proc = 2 ! MPI parallel number (nodes number)
/
```

計算結果

結果はシングル版と同じ (図 4.33 参照).

描画

同ディレクトリに格納されている描画プログラム `draw_polar` を実行することで描画が可能である. このプログラムの使用法は付録 ?? 参照.

4.2.21 Karman

2次元流におけるカルマン渦をシミュレーションする有限差分モデルである (参考文献: 中道, 2006).

座標系はデカルト座標系 (x, y) 、微分の評価は 2 次精度の中心差分を採用した. 非線形移流項として, Arakawa Jacobian (Arakawa, 1966) を採用している^{*2}.

コンパイル

1. 以下のコマンドにより, 実行ファイル (`Karman`) を生成する.

```
$ make
```

2. `Karman` はネームリスト (後述) で設定された初期データファイル `fname` のデータを元にして流線関数-渦度法を用いて渦度の時間発展を計算する.

実行方法

以下のコマンドを実行する.

```
$ export OMP_NUM_THREADS=number
$ ./Karman < namelist.nml
```

- `OMP_NUM_THREADS` は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり, もし, コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば, この環境変数の設定によって並列計算が可能である. `[number]` には並列数を入力する.
- `Karman` を実行すると, 計算が開始する. その結果は `namelist.nml` の `fname` で設定しているファイルに出力される.

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである.

```
&input
```

^{*2}方程式系などのモデルの詳細は付録??参照.

```

nx = 400      ! X-coordinate grid number
ny = 100      ! Y-coordinate grid number
nt = 100000   ! calculating time step
xmin = 0.0    ! X-coordinate original point
ymin = 0.0    ! Y-coordinate original point
dx = 0.1      ! X-coordinate grid interval [m]
dy = 0.1      ! Y-coordinate grid interval [m]
dt = 0.001    ! time interval [s]
dmpstp = 1000 ! dumping time step
               ! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"
fname = ""    ! initial data file name.
               ! if there is no, automatically,
               ! being made by the program.
foname = "result.nc" ! result data
inner_file = 'colum.txt' ! inner boundary file
time_flag = '1' ! time scheme :
               ! [1] = 4th order's Runge-Kutta
               ! [2] = Leap Frog
               ! [3] = 1th Explicit Euler
undef = -999.0 ! undefined value
init_type = 'psi' ! the tpe of initial value.
               ! 'psi' = strem line, 'omg' = vorticity.
ubar = 1.0      ! mean flow [m/s]
eps = 1.0e-4    ! convergent condition for poisson solver
nu = 0.01       ! diffusion coefficient
/

```

未定義領域の指定

最も重要な設定は, `colum.txt` ファイルの設定である. このファイルはカルマン渦を計算する際に設置される柱の占有領域を設定するテキストファイルである. ここでは, 以下の条件を仮定したときの `colum.txt` の設定方法を記述する.

- x, y 方向の格子数は 20×10 点.
- 柱は正方形 (この形は設定次第で任意の形を指定できる) で長さは格子点について 2×2 の大きさとする (柱の実際の大きさは "格子点数 \times 格子点間隔").
- 柱の位置は格子点で数えて左から 4 点目, 下から 4 点目とする.
- 柱の境界条件はディリクレ型. (ポアソンソルバ用ルーチンの境界条件指定で 1 番が指定される)

このとき, `colum.txt` の指定方法として以下の決まりが存在する.

- テキストファイルの 2 行目から書き始める. 1 行目はダミー用なので何らかの任意の文字列を設定しておくこと (文字は何でもよい).
- 1 行の文字数は x 方向の格子点数と同じ. 1 列の文字数は y 方向の格子点数と上記のダミー用 1 行分を足し合わせた分に同じである (上の例の場合, 1 行の文字数は 20, 1 列の文字数は 11).

- 計算を行う領域は "0", 計算を行わない領域は "-" で指定する. この "-" の格子点が柱の存在する領域となる.
- 柱の境界は "0" ではない境界条件の種類を指定する数値が入る. (境界条件の種類と指定すべき数値は Poisson ソルバルーチンの内部境界条件設定と同じにしてある).
- "-" と "0" は隣接してはならない. 必ず, 境界条件指定の数値が入らなければならない.
- 注意すべきは, テキストで記述される y 方向の格子は上から順に読み込まれるので, y 座標の下端はテキストでいうと 2 行めに記述される.

これらの決まりを守りながら、上の仮定に基づいて設定した `column.txt` の例は以下である。

column.txt の設定例

```
|--- 10 ---||--- 20 ---|  
000000000000000000000000  
000000000000000000000000  
001111000000000000000000  
001--10000000000000000000  
001--10000000000000000000  
001111000000000000000000  
000000000000000000000000  
000000000000000000000000  
000000000000000000000000  
000000000000000000000000
```

計算結果

本プログラムの結果から得られた相対渦度と流線関数の分布は図 4.34 に示す.

描画

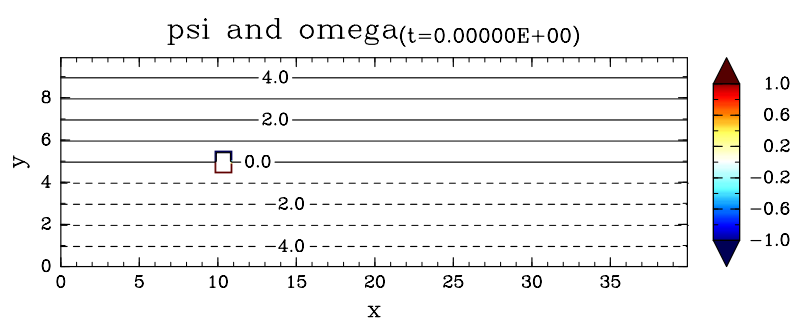
同ディレクトリに格納されている描画プログラム `draw_anim` を実行することで描画が可能である。このプログラムの使用法は付録 ?? 参照。

4.2.22 BAROVOR

順圧非発散流体において渦の非線形時間発展をシミュレーションするモデルである (参考文献: 石岡, 2004).

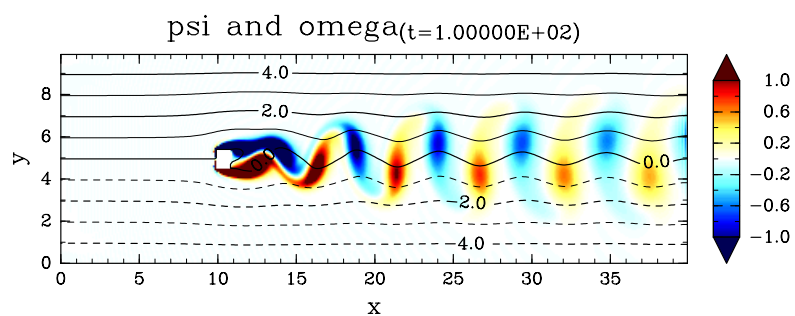
座標系はデカルト座標系 (x, y) 、微分の評価は二重フーリエ級数によるスペクトル法を採用した。非線形移流項として変換法を用いている^{*3}。

*³方程式系などのモデルの詳細は付録??参照.



CONTOUR INTERVAL = 1.000E+00

(a)



CONTOUR INTERVAL = 1.000E+00

(b)

図 4.34: 初期時刻 (上) とある程度時間が経過したとき (下) の相対渦度 (カラー) と流線関数 (等値線).

コンパイル

1. 以下のコマンドにより, 実行ファイル (FFT_BAROVOR) を生成する.

```
$ make fft
```

2. FFT_BAROVOR はネームリスト (後述) で設定された初期データファイル `ininame` で与えられる渦度のデータを元にして流線関数の時間発展を計算する.

実行方法

以下のコマンドを実行する.

```
$ export OMP_NUM_THREADS=number  
$ ./FFT_BAROVOR < FFT_BAROVOR.nml
```

- OMP_NUM_THREADS は OpenMP 並列における CPU の並列数に対応する環境変数であり, もし, コンパイル時に OpenMP の実行が可能なオプションをつけておけば, この環境変数の設定によって並列計算が可能である. [number] には並列数を入力する.
- FFT_BAROVOR を実行すると, 計算が開始する. その結果は FFT_BAROVOR.nml の `foname` で設定しているファイルに出力される.

ネームリスト

実行に必要なネームリストファイルの内容は以下のとおりである.

```
&input  
nxi = 1000 ! X-coordinate grid number of initial data  
nyi = 1000 ! Y-coordinate grid number of initial data  
nx = 500   ! X-coordinate grid number  
ny = 500   ! Y-coordinate grid number  
nt = 180000 ! calculating time step  
xmin = 0.0 ! X-coordinate original point  
ymin = 0.0 ! Y-coordinate original point  
dx = 2.0e3 ! X-coordinate grid interval [m]  
dy = 2.0e3 ! Y-coordinate grid interval [m]  
dt = 1.0e0 ! time interval [s]  
dmpstp = 3600 ! dumping time step  
           ! dumping time interval is equal to "dmpstp * dt"  
ininame = "initial.nc" ! initial data file name.  
                       ! if there is no, automatically,  
                       ! being made by the program.  
inix = 'x'             ! X-coordinate name  
iniy = 'y'             ! Y-coordinate name  
iniz = 'zeta'          ! vorticity name  
foname = "result.nc"   ! result data
```

```

time_flag = 'RK4'      ! time scheme :
eps = 5.0e0            ! convergent condition for poisson solver
nu = 0.01              ! diffusion coefficient
betaf = 1.0e-11        ! beta coefficient
adv_flag = 'f'
boundary = '1111'      ! boundary condition
/

```

計算結果

本プログラムの結果から得られた相対渦度の分布は図 4.35 に示す.

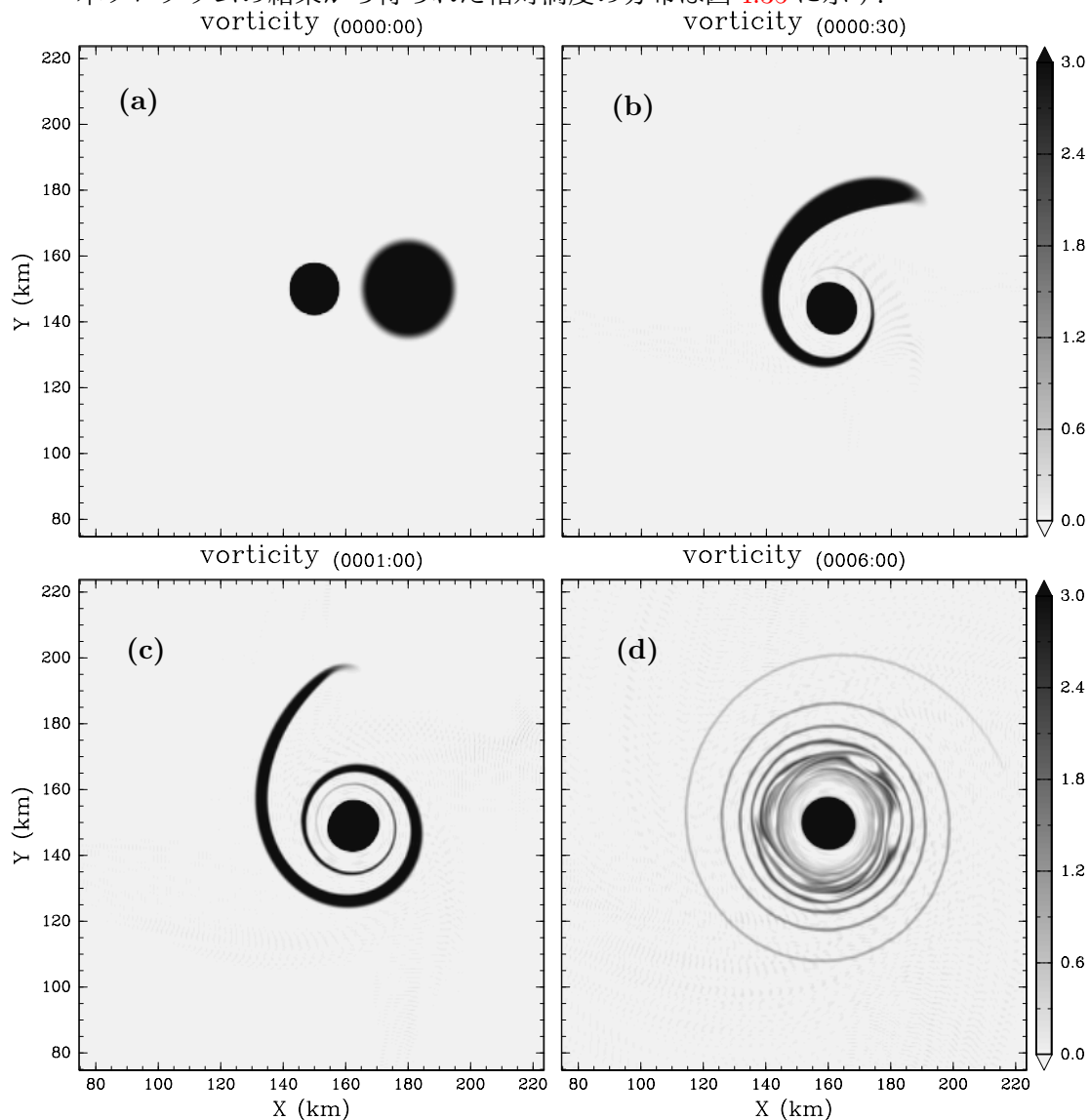


図 4.35: 渦対の非線形時間発展. (a) 初期時刻 から (b) 30 分, (c) 1 時間, (d) 6 時間後の相対渦度.

4.3 Piecewise PV inversion を用いた台風ボーガス作成プログラム PPVI

本プログラムは吉野他 (2003) による Piecewise PV inversion を利用した台風ボーガスを作成するプログラムである。オリジナルの手法は吉野他 (2008) でまとめられている。

4.3.1 準地衡流 PV とその inversion

ここでは、準地衡流系における PV とその inversion の方法について述べる。準地衡流系における PV は圧力座標系 (q_p) に対して Holton (2004) の (6.25) など、幾何高度座標系 (q_z) に対しては Holton and Hakim (2012) の (6.17) などそれぞれ以下のように定義される：

$$\begin{aligned} q_p &\equiv \frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \Phi + f + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right), \\ q_z &\equiv \frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla_z^2 p + f + f \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{d\theta_0}{dz} \right)^{-1} \theta \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

ここで、 Φ , f_0 , f はそれぞれジオポテンシャル、基準緯度でのコリオリパラメータ、コリオリパラメータをそれぞれ表し、 σ は以下で定義される：

$$\sigma \equiv -\frac{R_d T_0}{p} \frac{d \ln \theta_0}{dp}.$$

R_d , T_0 , θ_0 はそれぞれ乾燥大気気体定数、基本場の温度、基本場の温位である。また、 ρ_0 は基本場の密度、 p は圧力を表している。ここでは、気象庁などで配信されている客観解析データへの適用を念頭において、水平方向には緯度、経度座標を、鉛直方向には圧力座標を用いることにする。ただし、高度座標についても適宜記載する。

次に、地衡流流線関数 Ψ を導入する。この関数は地衡流 \mathbf{V}_g について、

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{k} \times \nabla \Psi$$

という関係を満たすものである^{*4}。この地衡流流線関数はジオポテンシャルと

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi$$

という関係にあることも明らかである。特に、 f_0 が定数なら、直に

$$\Psi = \frac{\Phi}{f_0} \quad (4.3.2)$$

である。準地衡流 PV である q は以下の条件を満たす流れにおいて保存量である：

^{*4}地衡流が非発散である条件を満たす関数として定義される。

- 流れが地衡流（ロスビー数が 1 よりはるかに小さい流れ）である。
- 非断熱加熱、摩擦がない。

もし、準地衡流 PV の空間、時間分布が完全に得られていたとしたら、(4.3.1) を解くことで、 Φ の時空間分布を得ることができる。ジオポテンシャルが得られれば、地衡流関係から水平風、静力学関係から温度を求めることができる。これは、 q という物理量の時空間分布のみで、大気の力学、熱力学場がすべて再現することができることを意味している。ただし、再現のためには、いくつかの仮定に伴う拘束条件があるので、その仮定が成り立たないような場合は再現することができないことに注意する。準地衡流 PV の場合、その時空間分布から得られるのは地衡流と静力学平衡状態の熱力学場の時空間分布である。

(4.3.1) は既知の q について、線形の 3 次元楕円型偏微分方程式であるので、適当な境界条件のもと、 Φ は一意に求めることができる。さらに、線形であることから、準地衡流 PV が任意の q_n の重ね合わせ：

$$q = \sum_n^N q_n$$

である場合、それぞれの q_n について

$$\begin{aligned} q_{pn} &= \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi_n + f_n + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi_n}{\partial p} \right), \\ q_{zn} &\equiv \frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla_z^2 p_n + f_n + f \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0 N^2} \frac{\partial p_n}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

が成り立つ。つまり、 Φ_n , (p_n) は q_n という PV が構成するジオポテンシャル (圧力) である。ここで、

$$N^2 \equiv \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz}$$

であり、基本場に対する温位と圧力の摂動 θ_n は

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{\rho_0}{\theta_0} g \theta_n$$

という関係で静力学平衡している。

具体的な q の分布に対して、 Φ を解くには、数値的な手法が用いられる。(4.3.3) 式を緯度、経度座標で表現すると、

$$\begin{aligned} f_0(q_n - f_n) &= \left[\frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\tan \phi}{a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{f_0^2}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \right] \Phi_n \\ \Rightarrow f_0(q_n - f_n) a^2 \cos^2 \phi &= \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \sin \phi \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right. \\ &\quad \left. + a^2 \cos^2 \phi \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{f_0^2}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] \Phi_n. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

このとき、側面の境界条件は側面でのジオポテンシャル値が得られているとして、

$$\Phi_n = \Phi_n(\lambda, \phi), \quad \lambda = \lambda_W, \lambda_E, \quad \phi = \phi_S, \phi_N \quad (4.3.5)$$

となる。ここで、 $\lambda_W, \lambda_E, \phi_S, \phi_N$ はそれぞれ西端、東端の経度と南端、北端の緯度を表す。また、上下の境界条件は上下端での温度が得られているとして、静力学関係から

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial p} = -\frac{R_d T_n}{p}, \quad (p = p_s, p = p_T) \quad (4.3.6)$$

でそれぞれ求めることができる。 p_s, p_T は上下端での圧力である。これを楕円型偏微分方程式求積ルーチンで解けば、準地衡流 PV に伴う地衡流と熱力学場を求めることができる。準地衡流系では、ジオポテンシャルと地衡流流線関数が (4.3.2) という簡単な関係で結ばれているので、ジオポテンシャル場が得られれば、地衡流流線関数も容易に求められる。

QGPV による inversion で得られたジオポテンシャル場とオメガ方程式を用いて QG 系における鉛直流を推定することもできる。用いる方程式は Holton (2004) の (6.34) オメガ方程式、あるいは Holton and Hakim (2012) の準地衡流鉛直診断式 (6.42) :

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{ph}^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega &= \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{v}_g \cdot \nabla_{ph} \left(\frac{1}{f_0} \nabla_{ph}^2 \Phi + f \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sigma} \nabla_{ph}^2 \left[\mathbf{v}_g \cdot \nabla_{ph} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] - \frac{\kappa}{\sigma p} \nabla_{ph}^2 Q, \\ \left(\nabla_{zh}^2 + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w &= \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathbf{v}_g \cdot \nabla_{zh} \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla_{zh}^2 p + f \right) \right] \\ &\quad - \frac{g}{\theta_0 N^2} \nabla_h^2 [\mathbf{v}_g \cdot \nabla_{zh} \theta] \end{aligned}$$

である。ここで、 Q は熱力学方程式における非断熱加熱の効果を表す。また、側面境界条件はノイマン型でフラックスゼロの条件、上下端境界条件はディリクレ型で鉛直流ゼロの条件を付加して計算を行う。

4.3.2 エルテルの PV とその inversion

Davis and Emanuel (1991) による inversion

準地衡流 PV による inversion は力学場、熱力学場の再現において、地衡流関係と静力学関係を仮定した。これはつまり、準地衡流 PV で再現される力学場はロスビー数が 1 よりはるかに小さい運動のみ再現される。準地衡流系に制限されない運動を議論する場合はエルテルの PV が用いられる。それは θ 座標系において、

$$q \equiv -g(f + \zeta_\theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \quad (4.3.7)$$

で定義される。ここで、 ζ_θ は θ 面上で定義される鉛直渦度である。まずこれを先と同様の鉛直 p 座標系に直す。水平空間勾配を計算する際の鉛直座標の変換は Holton (2004) の (1.27) から

$$\nabla_p = \nabla_\theta + (\nabla_p \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

なので、

$$\begin{aligned}
 \zeta_\theta &= \mathbf{k} \cdot \nabla_\theta \times \mathbf{v} \\
 &= \mathbf{k} \cdot \left[\left\{ \nabla_p - (\nabla_p \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \times \mathbf{v} \right] \\
 &= \mathbf{k} \cdot \nabla_p \times \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p \theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \\
 &= \zeta_p - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p \theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \\
 &= \zeta_p - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p \theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

として θ 座標系での空間勾配を p 座標系での空間勾配に変換する。これを (4.3.7) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 q &= -g \left[f + \zeta_p - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p \theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \\
 &= -g \left[(f + \zeta_p) \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p \theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \right]
 \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

となる。これを平面について、緯度経度、鉛直座標を p から規格化圧力 π に置き換えると、

$$q = -g \left(\kappa \frac{\pi}{p} \right) \left[(f + \zeta_\pi) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right) - \left\{ \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \frac{\partial v}{\partial \pi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial u}{\partial \pi} \right\} \right] \tag{4.3.9}$$

となる。ここで、規格化圧力 π は

$$\pi \equiv \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa, \quad \kappa \equiv \frac{R_d}{C_p},$$

で定義され、

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial \pi}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \pi} = \kappa \frac{\pi}{p} \frac{\partial}{\partial \pi}$$

を用いた。次に、速度ベクトルは地衡流ではなく、非発散流であると仮定すると、先と同様に流線関数 Ψ が以下のように定義される^{*5}：

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{k} \times \nabla \Psi, \quad \zeta_\pi \equiv \nabla_h^2 \Psi.$$

このとき、速度ベクトルは非発散であるが、地衡流ではないので、ジオポテンシャルと流線関数の間には (4.3.2) のような簡単な関係は成り立たない。この式を (4.3.9) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 q &= -g \left(\kappa \frac{\pi}{p} \right) \left[\left\{ f + \nabla_h^2 \Psi \right\} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \lambda} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \phi} \right\} \right].
 \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

^{*5}この定義の時点で曲率の効果を無視していることに注意する。つまり、鉛直渦度を計算する際、速度ベクトルの回転をとった結果と流線関数のラプラシアンを計算した結果は一致しない。それは曲率を含めているかどうか依存する。ゆえに、ここではあえて圧力座標系における鉛直渦度を流線関数のラプラシアンで定義した。以降、鉛直渦度は流線関数のラプラシアンで表現される。

さらに、静力学関係：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{R_d T}{p} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \pi} = -C_p \theta$$

を (4.3.10) に代入すると、

$$\begin{aligned} q &= -g \left(\kappa \frac{\pi}{p} \right) \left[\{f + \nabla_h^2 \Psi\} \left(-\frac{1}{C_p} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \pi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C_p} \left\{ \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \lambda} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \phi} \right\} \right], \\ \Rightarrow \frac{C_p p q}{g \kappa \pi} &= \{f + \nabla_h^2 \Psi\} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \pi^2} \right) \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \lambda} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \phi} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

が得られる。これがエルテル PV の p 座標系での表式となる。一方、準地衡流 PV のように、ジオポテンシャル Φ と流線関数 Ψ を結びつけるバランス関係は、最初に定義した流線関数が速度に関して非発散を要求しているという事実から、バランス風方程式を採用する^{*6}。バランス風方程式は小倉 (1966; 気象研究ノート) などで議論されており、発散方程式のスケールリングから導出できる。 p 座標系における水平方向の運動方程式：

$$\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{v}_h + \omega \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p} + \mathbf{k} \times f \mathbf{v}_h + \nabla_h \Phi = \mathbf{0}$$

の両辺について $\nabla_h \cdot$ を作用させると、

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{v}_h) + \nabla_h \cdot \left(\omega \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p} \right) + (\nabla_h f) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h) + f \zeta_p + \nabla_h^2 \Phi = 0$$

となる。ここで、 $D \equiv \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h$ である。また、水平ベクトルを添字 h で表している。今、水平速度ベクトルは非発散流 \mathbf{v}_r と非回転流 \mathbf{v}_d の線形結合で表現されたとすると、

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_d$$

と表現できる。鉛直流速は水平発散流によって生成されるので、 $\omega = \omega_d$ と表現される。水平発散流に由来する効果のみを消去すると^{*7}、

$$\nabla_h \cdot (\mathbf{v}_r \cdot \nabla_h \mathbf{v}_r) + (\nabla_h f) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_r) + f \zeta_p + \nabla_h^2 \Phi = 0$$

となる。水平流速は回転成分のみ残っているので、先と同様に連続の式を満たす流線関数を定義でき、発散方程式は

$$\nabla_h \cdot \{(\mathbf{k} \times \nabla_h \Psi) \cdot \nabla_h (\mathbf{k} \times \nabla_h \Psi)\} + (\nabla_h f) \cdot (-\nabla_h \Psi) + f \nabla_h^2 \Psi + \nabla_h^2 \Phi = 0 \quad (4.3.12)$$

^{*6}ここで用いるバランス関係は研究者の目的によって様々である。Schubert et al. (2002) では、傾度風バランス方程式をバランス関係として採用している。

^{*7}ここでは天下りのように消去したが、詳細なスケール解析は小倉 (1966) を参照。

となる^{*8}。これが、バランス風方程式である。これを緯度経度座標系で表すと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ -2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + 3 \tan \phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \tan \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{\cos^2 \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right)^2 + \cos 2\phi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right)^2 + \sin 2\phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \\ & \left. - \frac{2}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \cos^2 \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right\} - \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} - f \nabla_h^2 \Psi + \nabla_h^2 \Phi = 0 \quad (4.3.13) \end{aligned}$$

となる。ここで、経度、緯度、高度方向の単位ベクトルを \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} としたとき、

$$\mathbf{k} \times \nabla_h \Psi = \frac{\mathbf{j}}{a \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \frac{\mathbf{i}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}$$

^{*8}鉛直渦度 ζ_p は明らかに $\nabla_h^2 \Psi$ である。

なので、

$$\begin{aligned}
& \nabla_h \cdot \{(\mathbf{k} \times \nabla_h \Psi) \cdot \nabla_h(\mathbf{k} \times \nabla_h \Psi)\} \\
&= \nabla_h \cdot \left\{ \left(\frac{\mathbf{j}}{a \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \frac{\mathbf{i}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \cdot \nabla_h \left(\frac{\mathbf{j}}{a \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \frac{\mathbf{i}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right\} \\
&= \nabla_h \cdot \left\{ \frac{1}{a^3 \cos \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\mathbf{j}}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \mathbf{i} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right\} \\
&= \nabla_h \cdot \left[\frac{1}{a^3 \cos \phi} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\cos \phi} \left(\mathbf{j} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \phi} - \mathbf{k} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right) - \mathbf{i} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \left(-\mathbf{i} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{j}}{\cos \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} - (\mathbf{j} \sin \phi - \mathbf{k} \cos \phi) \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} - \mathbf{i} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} \right] \\
&= \nabla_h \cdot \left[\frac{1}{a^3 \cos \phi} \left\{ \mathbf{i} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right. \right. \\
&\quad + \mathbf{j} \left(\frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \phi} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} + \sin \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{k} \left(-\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \cos \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \\
&= \frac{1}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right. \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sin \phi}{\cos \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \phi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} + \sin \phi \cos \phi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right)^2 \right) \\
&\quad \left. + \frac{2}{a} \left(-\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \cos \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \phi^2 \partial \lambda} + \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda^2} \right. \\
&\quad + \frac{1}{\cos^2 \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \phi} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} + \cos 2\phi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right)^2 \\
&\quad + 2 \tan \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \lambda \partial \phi^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \lambda^2 \partial \phi} + \sin 2\phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \\
&\quad \left. - \frac{2}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \cos^2 \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ -2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + 3 \tan \phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \tan \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right)^2 \right. \\
&\quad + \frac{1}{\cos^2 \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right)^2 + \cos 2\phi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right)^2 + \sin 2\phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \\
&\quad \left. - \frac{2}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \cos^2 \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right\}
\end{aligned}$$

であることを用いた。(4.3.13) 式において、鉛直方向の曲率項は他に比べて非常に小さいので、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ -2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + 3 \tan \phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \tan \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\cos^2 \phi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right)^2 + \cos 2\phi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right)^2 + \sin 2\phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right\} \\ & \quad - \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} - f \nabla_h^2 \Psi + \nabla_h^2 \Phi = 0 \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

と近似できる。さらに、水平方向の曲率に由来する項も無視すると^{*9}、

$$\frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right)^2 \right\} + \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + f \nabla_h^2 \Psi = \nabla_h^2 \Phi \quad (4.3.15)$$

この (4.3.15) 式と (4.3.11) 式を連立させて解くことで Φ , Ψ の解が得られる。ここでは Davis and Emanuel (2001) に従い、これらの各変数について以下のように無次元化を行う：

$$\Phi^* = \frac{\Phi}{SH^2}, \quad \Psi^* = \frac{2\Omega}{SH^2} \Psi, \quad q^* = \frac{C_p p}{2\Omega S g \kappa \pi} q, \quad L^2 = \frac{SH^2}{4\Omega^2}. \quad (4.3.16)$$

このとき、 $S = -C_p \partial \theta / \partial \pi$ は特徴的な安定度であるが、本プログラムではデータの上下端での水平平均した温位差を定数として与える。つまり、 $S = C_p (\bar{\theta}_T - \bar{\theta}_B)$ である。また、 H はエクスター関数で見積もられる、計算領域の特徴的な鉛直長さスケールであり、ここでは $H = 1$ と定義する。なお、アスタリスクのついている変数が無次元変数である。さらに空間微分演算子についても、水平スケールを $L^2 = SH^2/F^2$ で定義することで、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^*}, \frac{\partial}{\partial \phi^*} \right), \\ & \nabla_h^{2*} = L^2 \cos^2 \phi \nabla_h^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^{*2}} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^{*2}} - \sin \phi \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi^*} \right) \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

という無次元の水平空間微分演算子を定義する。これを用いて (4.3.11), (4.3.15) をそれぞれ無次元化すると、

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \phi}{H^2} q^* = & \left\{ \sin \phi \cos^2 \phi + \nabla_h^{2*} \Psi^* \right\} \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \pi^2} \right) \\ & - \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \pi \partial \lambda^*} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \pi \partial \phi^*} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

$$2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \lambda^{*2}} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^{*2}} - \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right)^2 \right\} + \frac{2L \cos^3 \phi}{a} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \phi^*} + \sin \phi \nabla_h^{2*} \Psi^* = \nabla_h^{2*} \Phi^* \quad (4.3.19)$$

が得られる。さらに、

$$(4.3.19) + (4.3.18), \quad (4.3.19) - (4.3.18)$$

^{*9}これがどの程度正当であるかは別に議論しなければならない。原論文である Davis and Emanuel (2001; MWR) でも詳細は議論されていない。

を計算すると、それぞれ

$$\begin{aligned} & \left\{ \sin \phi + \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \pi^2} \right) \right\} \nabla_h^{2*} \Psi^* \\ &= \frac{\cos^2 \phi}{H^2} q^* - \sin \phi \cos^2 \phi \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \pi^2} \right) \\ & \quad - \frac{2L \cos^3 \phi}{a} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \phi^*} + \nabla_h^{2*} \Phi^* \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

$$\begin{aligned} & - 2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^{2*}} - \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right)^2 \right\} \\ & + \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \pi \partial \lambda^*} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \pi \partial \phi^*} \right\}, \\ & \nabla_h^{2*} \Phi^* + \{ \sin \phi \cos^2 \phi + \nabla_h^{2*} \Psi^* \} \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \pi^2} \right) \\ &= \frac{\cos^2 \phi}{H^2} q^* + \frac{2L \cos^3 \phi}{a} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \phi^*} + \sin \phi \nabla_h^{2*} \Psi^* \\ & \quad + \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \pi \partial \lambda^*} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \pi \partial \phi^*} \right\} \\ & \quad + 2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^{2*}} - \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

となり、これらを用いて反復法により数値解を求める。具体的な反復計算の順序を陽に示すため、反復 n 回目の値を各変数の右上に示すと、上の 2 つの式はそれぞれ

$$\begin{aligned} & \left\{ \sin \phi + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{*(n)}}{\partial \pi^2} \right) \right\} \nabla_h^{2*} \Psi^{*(n+1)} \\ &= \frac{\cos^2 \phi}{H^2} q^* - \sin \phi \cos^2 \phi \left(\frac{\partial^2 \Phi^{*(n)}}{\partial \pi^2} \right) \\ & \quad - \frac{2L \cos^3 \phi}{a} \frac{\partial \Psi^{*(n)}}{\partial \phi^*} + \nabla_h^{2*} \Phi^{*(n)} \\ & \quad - 2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^{*(n)}}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi^{*(n)}}{\partial \phi^{2*}} - \left(\frac{\partial^2 \Psi^{*(n)}}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right)^2 \right\} \\ & \quad + \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^{*(n)}}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^{*(n)}}{\partial \pi \partial \lambda^*} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2 \Phi^{*(n)}}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^{*(n)}}{\partial \pi \partial \phi^*} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_h^{2*} \Phi^{*(n+1)} + \left\{ \sin \phi \cos^2 \phi + \nabla_h^{2*} \Psi^{*(n+1)} \right\} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{*(n+1)}}{\partial \pi^2} \right) \\
&= \frac{\cos^2 \phi}{H^2} q^* + \frac{2L \cos^3 \phi}{a} \frac{\partial \Psi^{*(n+1)}}{\partial \phi^*} + \sin \phi \nabla_h^{2*} \Psi^{*(n+1)} \\
&+ \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^{*(n)}}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^{*(n+1)}}{\partial \pi \partial \lambda^*} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2 \Phi^{*(n)}}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^{*(n+1)}}{\partial \pi \partial \phi^*} \right\} \\
&+ 2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^{*(n+1)}}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi^{*(n+1)}}{\partial \phi^{2*}} - \left(\frac{\partial^2 \Psi^{*(n+1)}}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

となる^{*10}。これらの式が EPV による inversion 計算に必要な方程式である。この 2 つの式を与えられた EPV である q を元に反復法によって求積すればよい。ただし、これらの方程式は非線形偏微分方程式であるため、発散しないように SOR などを用いて徐々に求積を行う必要がある^{*11}。

このとき、側面の境界条件は側面でのジオポテンシャル値が得られているとして、

$$\Phi = \Phi(\lambda, \phi), \quad \lambda = \lambda_W, \lambda_E, \quad \phi = \phi_S, \phi_N.$$

ここで、 $\lambda_W, \lambda_E, \phi_S, \phi_N$ はそれぞれ西端、東端の経度と南端、北端の緯度を表す。流線関数については、側面において非発散流 \mathbf{v}_r が得られているとして、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \times (\nabla_h \Psi) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_r, \quad \lambda = \lambda_W, \lambda_E, \quad \phi = \phi_S, \phi_N$$

という関係が成り立つ。ここで、 \mathbf{n} は側面境界に直交する、右手系座標で反時計回りに境界を進むとき、常に右を向いている単位ベクトルであり、 λ, ϕ の関数である^{*12}。上式左辺は右手座標で反時計回りに境界を進む向きを $\mathbf{s} \equiv \mathbf{k} \times \mathbf{n}$ で定義すると、

$$(-(\nabla_h \Psi) \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{n}) - \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_r, \quad \lambda = \lambda_W, \lambda_E, \quad \phi = \phi_S, \phi_N$$

となる。しかし、実際の解析において、側面境界で非発散流のみが得られていることはない。そこで、側面境界で得られる一般的な水平速度から流線関数の境界条件を設定することを考える。一般的な水平速度成分 \mathbf{v}_h は発散成分 \mathbf{v}_d と非発散成分が線形結合されているので、上式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d, \quad \lambda = \lambda_W, \lambda_E, \quad \phi = \phi_S, \phi_N$$

と表記することができる。このとき、 \mathbf{v}_d は境界の各点で定義される量であるが、ここでは以下のように各高度における側面境界上を通過する発散流成分の平均値 $\overline{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d}$ として定義される

$$\overline{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d} \equiv \oint_{C(\pi)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d dl \bigg/ \oint_{C(\pi)} dl$$

^{*10} この反復計算の順序は何に基づいているのか不明。原論文でも示されていない。

^{*11} 吉野他 (2006) では、最初に線形化方程式である QGPV 系で流線関数を計算しておき、その分布を初期値として EPV 系で反復計算すればよいと述べている。

^{*12} 関数といっても各側面で向きを変えるだけである。

で近似的に表現する：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \approx -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h + \oint_{C(\pi)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h dl \Big/ \oint_{C(\pi)} dl, \quad \lambda = \lambda_W, \lambda_E, \quad \phi = \phi_S, \phi_N.$$

ここで、 $C(\pi)$ は高度 π における側面境界であり、境界上を通過する非発散流成分は周積分がゼロなので、

$$\oint_{C(\pi)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d dl = \oint_{C(\pi)} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_d + \mathbf{v}_r) dl = \oint_{C(\pi)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h dl$$

という事実を用いている。これにより、側面境界上の水平速度のみで流線関数の境界条件を設定することができる。ただし、この方法では各高度の境界上の任意点で流線関数の値を陽に指定しなければならない。そこで、本プログラムでは南西端境界において、同一高度の隣接した内部領域での流線関数の値と同じ値に設定することで対処する。なお、この積分部分を球面上の扇形領域 ($\lambda_E \leq \lambda \leq \lambda_W$, $\phi_S \leq \phi \leq \phi_N$) で具体的に計算すると、地球半径を a として

$$\begin{aligned} \oint_{C(\pi)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dl &= \int_{\lambda_E}^{\lambda_W} \{-v(\lambda, \phi_S, \pi) a \cos \phi_S\} d\lambda + \int_{\phi_S}^{\phi_N} u(\lambda_W, \phi, \pi) a d\phi \\ &\quad + \int_{\lambda_W}^{\lambda_E} v(\lambda, \phi_N, \pi) a \cos \phi_N d\lambda + \int_{\phi_N}^{\phi_S} \{-u(\lambda_E, \phi, \pi) a\} d\phi \\ &= -a \int_{\lambda_E}^{\lambda_W} [v(\lambda, \phi_S, \pi) \cos \phi_S + v(\lambda, \phi_N, \pi) \cos \phi_N] d\lambda \\ &\quad + a \int_{\phi_S}^{\phi_N} [u(\lambda_W, \phi, \pi) + u(\lambda_E, \phi, \pi)] d\phi, \\ \oint_{C(\pi)} dl &= a \cos \phi_S (\lambda_W - \lambda_E) + a (\phi_N - \phi_S) + a \cos \phi_N (\lambda_W - \lambda_E) + a (\phi_N - \phi_S) \\ &= a (\cos \phi_S + \cos \phi_N) (\lambda_W - \lambda_E) + 2a (\phi_N - \phi_S) \end{aligned}$$

最後に上下の境界条件は上下端での温度が得られているとして、静力学関係から

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \pi} = f_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \pi} = -C_p \theta, \quad (\pi = \pi_s, \pi = \pi_T)$$

でそれぞれ求めることができる。 π_s , π_T は上下端での圧力である。

Davis and Emanuel (1991) ではこの手法を用いて、与えられた EPV 場から力学場と熱力学場を逆変換することが可能であることを示している。しかし、この手法では非線形バランス方程式を解く際、反復法で推定解を収束させる必要がある。しかし、一般的に非線形楕円型偏微分方程式の反復解法は唯一解が存在するとは限らないことが知られている。加えて、この手法では楕円型方程式を求積するため、方程式が楕円型にならないような条件では適用することができない。(4.3.23) 式の鉛直微分演算子にかかっている係数は流線関数の解が得られたときには、EPV の値に対応する絶対渦度の値に等しくなるはずである。つまり、与えられる EPV の場がゼロや負の値をとるとき、流線関数の収束解から得られる絶対渦度もゼロや負値をとることになる。これは、もとの楕円型方程式が特異振動

となったり、楕円型とならなくなる問題を引き起こす。Davis and Emanuel (1991) では、この問題を回避するため、与える EPV の場がゼロ以下になる場合は 10^{-2} PVU の定数値を与えて、強制的に楕円型に修正する手法を採用している。しかし、これでは高気圧回転場が卓越する領域^{*13}に適用することができない。また、Decker (201; MWR) では、この手法が EPV 場のデータの空間解像度が細かい場合、山岳領域で収束解が得られない問題を指摘している。これは、急峻な山岳領域における力学場、熱力学場の空間方向の急変が非線形バランス方程式における流線関数の非線形項で増幅することに起因している^{*14}。Decker は WRF モデルの結果を用いて、Davis and Emanuel (1991) とは異なった手法を用いることで、高解像度データを用いた山岳域でも適用可能な EPV inversion の手法を開発した。

Decker (2010) による EPV inversion

先述のとおり、Davis and Emanuel (1991) の手法では、高解像度 (水平 10 km 程度) データを用いて、メソスケールの対流などを EPV から逆変換することは不可能である。Decker (2010) は Arbogast and Joly (1999;QJRM) の variational inversion という手法を用いて、高解像度データによる山岳域での EPV inversion の手法を開発した。EPV の variational inversion とは、データ同化でも用いられる評価関数を最小化する技術を用いて、与えられる EPV 場と推定される力学、熱力学場から計算される EPV 場の差が最小となる力学、熱力学場を推定する手法である。ここでは評価関数の最小化問題を数値的に解くため、準ニュートン法を用いる。また、準ニュートン法で必要となるハッセ行列は BFGS 法による漸化式を採用する。なお、評価関数の 1 次勾配を計算するのには、データ同化の分野でも用いられるアジョイント法における接線形演算子とアジョイント演算子を用いて評価する。

評価関数を J 、任意の状態変数を \mathbf{x} としたとき、Decker (2010) での評価関数は

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \tilde{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}, \tilde{P}\mathbf{x} - \mathbf{P} \rangle + \frac{1}{2} \epsilon \langle \tilde{B}\mathbf{x}, \tilde{B}\mathbf{x} \rangle. \quad (4.3.24)$$

で定義される。 \tilde{P} , \tilde{B} の詳細は以下で述べるが、状態変数 \mathbf{x} を用いて計算される非線形演算子であり、前者は EPV を、後者はバランス風からのずれ (非バランス成分) を返す。また、 \mathbf{P} は与えられる EPV 場である。なお、ボールド体の変数は 3 次元空間の各格子点座標で定義される、列ベクトルである。ブラケットはベクトルのノルムを表す。任意のベクトルを \mathbf{A} とおくと、そのノルムは

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

^{*13}例えば、台風の上層アウトフロー領域など。

^{*14}Decker (2010) では Davis and Emanuel (1991) が水平解像度 100 km 程度以上のデータによる inversion を想定しており、メソスケールの対流などを EPV から逆変換することは不可能であると述べている。実際、著者は MSM (水平解像度 10 km 程度) のデータを元に、Davis and Emanuel (1991) の手法で逆変換を試みたが、Decker の指摘どおり、孤立した山岳領域で非線形項による強制的効果が非常に大きくなり、安定した流線関数の収束解を得ることができなかった。

で定義される。添字 T は行列の転置を表す。このとき、評価関数 J が最小となるのは、

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

となるような状態変数 \mathbf{x}_c のときである。この \mathbf{x}_c が EPV 場を逆変換して得られた力学、熱力学場であることができる。上式右辺は具体的には

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = P^T (\tilde{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}) + \epsilon B^T \tilde{B}\mathbf{x}. \quad (4.3.25)$$

ここで、 P^T , B^T はそれぞれ \tilde{P} , \tilde{B} の接線形演算子のアジョイントである。ここまでは形式的な評価関数を用いた最小値問題を解くための概略を示した。実際に J の最小値を求めるには、準ニュートン法などの最適化問題の数値解法を用いる^{*15}。アジョイント法ではこれらの非線形演算子に対して、接線形演算子 P , B とアジョイント演算子 P^T , B^T が必要となる。これらの演算子は通常、行列の形で表現され、アジョイント演算子は接線形演算子の転置に等しい。しかし、実際の数値計算ではこの接線形演算子の転置をとるのは複雑となるので、ソースコードの各処理「分」単位を変更することでアジョイント演算子を施したものと同一挙動を示すようなソースコードを作成する。ここでは、このソースコードをアジョイントコードと呼ぶ。本プログラムでは BFGS 法による評価関数の最小化問題を数値的に解くので、評価関数の勾配、つまりアジョイント演算が必ず必要になる。よって、以下ではアジョイントコードの作成と、BFGS 法の計算プロセスをそれぞれ別立てで説明する。

最後に (4.3.24) 式における評価関数の意味を述べておく。評価関数の右辺第 1 項は (4.3.11) 式について、

$$R_1 \equiv \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) \left[\{f + \nabla_h^2 \Psi\} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \pi^2} \right) - \left\{ \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \lambda} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \phi} \right\} \right] - q, \quad (4.3.26)$$

という EPV の場 q^* とジオポテンシャル、流線関数から計算される EPV の場の残差で定義される量の絶対値を表している。つまり、 R_1 が小さくなればなるほど、ジオポテンシャルと流線関数の場は、与えられる EPV の場をよく再現していることになる。同様に、評価関数 J の定義式右辺第 2 項は (4.3.15) 式について、

$$R_2 \equiv \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right)^2 \right\} + \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + f \nabla_h^2 \Psi - \nabla_h^2 \Phi \quad (4.3.27)$$

という非線形バランス風方程式の非バランス成分 R_2 で定義される量の絶対値を表している。つまり、 R_2 が小さくなればなるほど、ジオポテンシャルと流線関数の間でバランス風近似がよい精度で成り立っていることを表している。この R_1 , R_2 で構成される評価関数が最小値を与える状態というのは、与えられる EPV の場に対応するバランスした力学、熱力学場を再現した状態であることができる。

^{*15}このような最適化問題の数値解法は多くの書籍が出ている。簡単な理解のみでよいなら、杉山 (<http://www.gfd-dennou.org/arch/oboro/doc/optimize/pub/main.pdf>) があげられる。

接線形演算子とアジョイント演算子の導出アジョイント法を用いて評価関数の勾配を計算するには、評価関数における状態変数に対するオリジナルの非線形演算子に対応した、接線形演算子とそのアジョイント演算子が必要となる。ここでは、これらの演算子を導出する。まず、接線形演算子 P , B はオリジナルの非線形演算子

$$\mathbf{y} = \tilde{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = \tilde{B}\mathbf{x}$$

という処理に対して、基本場の周りで $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ という摂動展開を行って線形化した

$$\delta\mathbf{y} = P\delta\mathbf{x}, \quad \delta\mathbf{z} = B\delta\mathbf{x}$$

という処理を行う線形演算子 P , B のことである。これらを行列で表した際、アジョイント演算子はこの接線形演算子の転置に等しい。つまり、アジョイント演算子 P^T , B^T は

$$\mathbf{q} = P^T\mathbf{p}, \quad \mathbf{r} = B^T\delta\mathbf{s}$$

として表記することができる。本プログラムで用いるアジョイント演算子の詳細は以下で示す。

今、ソースコード内での接線形演算子の振る舞いを考える。接線形演算子 H は実際には入力変数 $\delta\mathbf{x}$ を用いて、 n 個の処理を順に行うことで出力変数 $\delta\mathbf{y}$ を返す。つまり、

$$\delta\mathbf{y} = H\delta\mathbf{x} = (H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1) \delta\mathbf{x}$$

を $n = 1$ から順に行うということに等しい。これに対し、アジョイント演算は以下のように表記できる：

$$\mathbf{q} = H^T\mathbf{p} = (H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1)^T \mathbf{p} = H_1^T H_2^T \cdots H_{n-1}^T H_n^T \mathbf{p}.$$

今、

$$\mathbf{p} = \tilde{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}, \quad H = P, \quad \text{or,}$$

$$\mathbf{p} = \tilde{B}\mathbf{x}, \quad H = B$$

と置けば、入力変数 \mathbf{p} に対して、アジョイント演算の結果出力される変数は \mathbf{q} となる。これは以下の事実を示す。

実際のプログラムでは、まず接線形演算するルーチンを作成し、その処理順を入れ替えたルーチンを作成する。この入れ替えたルーチンがアジョイント演算処理を行うルーチンとなる。

以下では、簡単な例を元に実際のソースコードにおける接線形演算からアジョイント演算を行うルーチンの構築方法を示す。また、その後、本プログラムで実際に使用する接線形ルーチンとアジョイントルーチンを示す。

とあるルーチンの中の do ループで以下のような変数による接線形演算が行われているとする：

$$1. u = Ax + By + Cz, \quad 2. v = Du + Ex.$$

A, B, C, D, E は基本場変数を含んだ係数、 x, y, z, u, v はプログラム内で更新を繰り返す変数である。また、重要な事項は接線形コードにおける do ループ内での計算順序は 1 から 2 の順番である。上の演算を行列で表現すると、

$$1. \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & E \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}$$

となる。この各行列部分が接線形演算子 H の 1 演算 H_k を構成している。このアジョイント演算は上式の転置をとって、

$$1. \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & D & 0 \\ 0 & E & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となるから、do ループ内での実際の順番は

1. $u = u + Dv$
2. $x = x + Ev$
3. $x = x + Au$
4. $y = y + Bu$
5. $z = z + Cu$

となり、これが実際のアジョイントコードである。ここで注意すべきことは、do ループ内における演算順序が接線形演算と逆になっていることに注意する。

これを元に、実際の EPV 逆変換で用いる接線形コードとアジョイントコードを示す。

まず、接線形コード^{*16} は出力変数を r_1, r_2 として、

$$\begin{aligned}
r_1 = & A_1 \frac{\Psi_{i+1} + \Psi_{i-1} - 2\Psi_i}{\Delta\lambda^2} \\
& + A_2 \frac{\Psi_{j+1} + \Psi_{j-1} - 2\Psi_j}{\Delta\phi^2} \\
& - A_3 \frac{\Psi_{j+1} - \Psi_{j-1}}{2\Delta\phi} \\
& - B \frac{\Psi_{i+1,k+1} - \Psi_{i-1,k+1} - \Psi_{i+1,k-1} + \Psi_{i-1,k-1}}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \\
& - C \frac{\Psi_{j+1,k+1} - \Psi_{j-1,k+1} - \Psi_{j+1,k-1} + \Psi_{j-1,k-1}}{4\Delta\phi\Delta\pi} \\
& + D \frac{\Phi_{k+1} + \Phi_{k-1} - 2\Phi_k}{\Delta\pi^2} \\
& - E \frac{\Phi_{i+1,k+1} - \Phi_{i-1,k+1} - \Phi_{i+1,k-1} + \Phi_{i-1,k-1}}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \\
& - F \frac{\Phi_{j+1,k+1} - \Phi_{j-1,k+1} - \Phi_{j+1,k-1} + \Phi_{j-1,k-1}}{4\Delta\phi\Delta\pi},
\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

^{*16}露木他 (気象研究ノート) では、接線形コードを作成する際は、微分方程式を線形化したものを離散化するのではなく、ソースコードから差分方程式を線形化しなければならないとしている。つまり、任意の 2 変数 f, g についての演算

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

を接線形コードにする際、微分方程式の段階での線形化した ($f \rightarrow f_0 + \delta f, g \rightarrow g_0 + \delta g$) 式

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta g)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (\delta f)}{\partial x^2}$$

を差分化するのではなく、オリジナルの差分化した (ここでは 2 次の中心差分) 式

$$\frac{(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i)(g_{j+1} + g_{j-1} - 2g_j)}{\Delta x^2 \Delta y^2}$$

を $f \rightarrow f_0 + \delta f, g \rightarrow g_0 + \delta g$ として線形化したものが接線形コードについて最適であると述べている。ただし、本プログラムでは演算を行う際、微分の差分公式が統一されており、非線形項が微分の積のみで構成されているので、上の議論はどちらで接線形方程式を構築しても、その結果は等しくなる。

$$\begin{aligned}
r_2 = & G \frac{\Psi_{i+1} + \Psi_{i-1} - 2\Psi_i}{\Delta\lambda^2} \\
& + H \frac{\Psi_{j+1} + \Psi_{j-1} - 2\Psi_j}{\Delta\phi^2} \\
& - K \frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} + \Psi_{i-1,j-1}}{4\Delta\lambda\Delta\phi} \\
& + M \frac{\Psi_{j+1} - \Psi_{j-1}}{2\Delta\phi} \\
& + N \frac{\Psi_{i+1} + \Psi_{i-1} - 2\Psi_i}{\Delta\lambda^2} \\
& + O \frac{\Psi_{j+1} + \Psi_{j-1} - 2\Psi_j}{\Delta\phi^2} \\
& - Q \frac{\Psi_{j+1} - \Psi_{j-1}}{2\Delta\phi} \\
& - R \frac{\Phi_{i+1} + \Phi_{i-1} - 2\Phi_i}{\Delta\lambda^2} \\
& - S \frac{\Phi_{j+1} + \Phi_{j-1} - 2\Phi_j}{\Delta\phi^2} \\
& + T \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}}{2\Delta\phi},
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

ここで、各係数は

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \pi^2}, \quad A_2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \pi^2}, \quad A_3 = \frac{\sin \phi}{a^2 \cos \phi} \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \pi^2}, \\
B &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \lambda \partial \pi}, \quad C = \frac{1}{a^2} \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \phi \partial \pi}, \quad D = \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) (f + \nabla_h^2 \Psi_0), \\
E &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \lambda \partial \pi}, \quad F = \frac{1}{a^2} \left(\frac{g\kappa\pi}{C_{pp}} \right) \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \phi \partial \pi}, \\
G &= \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \phi^2}, \quad H = \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \lambda^2}, \quad K = \frac{4}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \lambda \partial \phi}, \\
M &= \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2}, \quad N = \frac{f}{a^2 \cos^2 \phi}, \quad O = \frac{f}{a^2}, \quad Q = \frac{f \sin \phi}{a^2 \cos \phi}, \\
R &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi}, \quad S = \frac{1}{a^2}, \quad T = \frac{\sin \phi}{a^2 \cos \phi}
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

である。(4.3.31), (4.3.32) 式を各変数についてまとめると、

$$\begin{aligned}
r_1 = & \left(-\frac{2A_1}{\Delta\lambda^2} - \frac{2A_2}{\Delta\phi^2} \right) \Psi_{i,j,k} \\
& + \frac{A_1}{\Delta\lambda^2} \Psi_{i+1,j,k} + \frac{A_1}{\Delta\lambda^2} \Psi_{i-1,j,k} + \left(\frac{A_2}{\Delta\phi^2} - \frac{A_3}{2\Delta\phi} \right) \Psi_{i,j+1,k} + \left(\frac{A_2}{\Delta\phi^2} + \frac{A_3}{2\Delta\phi} \right) \Psi_{i,j-1,k} \\
& - \frac{B}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \Psi_{i+1,j,k+1} + \frac{B}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \Psi_{i-1,j,k+1} + \frac{B}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \Psi_{i+1,j,k-1} - \frac{B}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \Psi_{i-1,j,k-1} \\
& - \frac{C}{4\Delta\phi\Delta\pi} \Psi_{i,j+1,k+1} + \frac{C}{4\Delta\phi\Delta\pi} \Psi_{i,j-1,k+1} + \frac{C}{4\Delta\phi\Delta\pi} \Psi_{i,j+1,k-1} - \frac{C}{4\Delta\phi\Delta\pi} \Psi_{i,j-1,k-1} \\
& + \left(-2\frac{D}{\Delta\pi^2} \right) \Phi_{i,j,k} + \frac{D}{\Delta\pi^2} \Phi_{i,j,k+1} + \frac{D}{\Delta\pi^2} \Phi_{i,j,k-1} \\
& - \frac{E}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \Phi_{i+1,j,k+1} + \frac{E}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \Phi_{i-1,j,k+1} + \frac{E}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \Phi_{i+1,j,k-1} - \frac{E}{4\Delta\lambda\Delta\pi} \Phi_{i-1,j,k-1} \\
& - \frac{F}{4\Delta\phi\Delta\pi} \Phi_{i,j+1,k+1} + \frac{F}{4\Delta\phi\Delta\pi} \Phi_{i,j-1,k+1} + \frac{F}{4\Delta\phi\Delta\pi} \Phi_{i,j+1,k-1} - \frac{F}{4\Delta\phi\Delta\pi} \Phi_{i,j-1,k-1},
\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

$$\begin{aligned}
r_2 = & \left(-\frac{2G}{\Delta\lambda^2} - \frac{2H}{\Delta\phi^2} - \frac{2N}{\Delta\lambda^2} - \frac{2O}{\Delta\phi^2} \right) \Psi_{i,j,k} \\
& + \left(\frac{G}{\Delta\lambda^2} + \frac{N}{\Delta\lambda^2} \right) \Psi_{i+1,j,k} + \left(\frac{G}{\Delta\lambda^2} + \frac{N}{\Delta\lambda^2} \right) \Psi_{i-1,j,k} \\
& + \left(\frac{H}{\Delta\phi^2} + \frac{M}{2\Delta\phi} + \frac{O}{\Delta\phi^2} - \frac{Q}{2\Delta\phi} \right) \Psi_{i,j+1,k} + \left(\frac{H}{\Delta\phi^2} - \frac{M}{2\Delta\phi} + \frac{O}{\Delta\phi^2} + \frac{Q}{2\Delta\phi} \right) \Psi_{i,j-1,k} \\
& - \frac{K}{4\Delta\lambda\Delta\phi} \Psi_{i+1,j+1,k} + \frac{K}{4\Delta\lambda\Delta\phi} \Psi_{i-1,j+1,k} + \frac{K}{4\Delta\lambda\Delta\phi} \Psi_{i+1,j-1,k} - \frac{K}{4\Delta\lambda\Delta\phi} \Psi_{i-1,j-1,k} \\
& + \left(\frac{2R}{\Delta\lambda^2} + \frac{2S}{\Delta\phi^2} \right) \Phi_{i,j,k} \\
& - \frac{R}{\Delta\lambda^2} \Phi_{i+1,j,k} - \frac{R}{\Delta\lambda^2} \Phi_{i-1,j,k} + \left(-\frac{S}{\Delta\phi^2} + \frac{T}{2\Delta\phi} \right) \Phi_{i,j+1,k} - \left(\frac{S}{\Delta\phi^2} + \frac{T}{2\Delta\phi} \right) \Phi_{i,j-1,k},
\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

となる．よって、先に示した例題に従ってアジョイントコードを記載すると、 r_1 については

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,j,k} &= \Psi_{i,j,k} + \left(-\frac{2A_1}{\Delta\lambda^2} - \frac{2A_2}{\Delta\phi^2} \right) r_1, \\
\Psi_{i+1,j,k} &= \Psi_{i+1,j,k} + \frac{A_1}{\Delta\lambda^2} r_1, \\
\Psi_{i-1,j,k} &= \Psi_{i-1,j,k} + \frac{A_1}{\Delta\lambda^2} r_1, \\
\Psi_{i,j+1,k} &= \Psi_{i,j+1,k} + \left(\frac{A_2}{\Delta\phi^2} - \frac{A_3}{2\Delta\phi} \right) r_1, \\
\Psi_{i,j-1,k} &= \Psi_{i,j-1,k} + \left(\frac{A_2}{\Delta\phi^2} - \frac{A_3}{2\Delta\phi} \right) r_1, \\
\Psi_{i+1,j,k+1} &= \Psi_{i+1,j,k+1} - \frac{B}{4\Delta\lambda\Delta\pi} r_1, \\
\Psi_{i-1,j,k+1} &= \Psi_{i-1,j,k+1} + \frac{B}{4\Delta\lambda\Delta\pi} r_1, \\
\Psi_{i+1,j,k-1} &= \Psi_{i+1,j,k-1} + \frac{B}{4\Delta\lambda\Delta\pi} r_1, \\
\Psi_{i-1,j,k-1} &= \Psi_{i-1,j,k-1} - \frac{B}{4\Delta\lambda\Delta\pi} r_1, \\
\Psi_{i,j+1,k+1} &= \Psi_{i,j+1,k+1} - \frac{C}{4\Delta\phi\Delta\pi} r_1, \\
\Psi_{i,j-1,k+1} &= \Psi_{i,j-1,k+1} + \frac{C}{4\Delta\phi\Delta\pi} r_1, \\
\Psi_{i,j+1,k-1} &= \Psi_{i,j+1,k-1} + \frac{C}{4\Delta\phi\Delta\pi} r_1, \\
\Psi_{i,j-1,k-1} &= \Psi_{i,j-1,k-1} - \frac{C}{4\Delta\phi\Delta\pi} r_1, \\
\Phi_{i,j,k} &= \Phi_{i,j,k} + \left(-2\frac{D}{\Delta\pi^2} \right) r_1, \\
\Phi_{i,j,k+1} &= \Phi_{i,j,k+1} + \frac{D}{\Delta\pi^2} r_1, \\
\Phi_{i,j,k-1} &= \Phi_{i,j,k-1} + \frac{D}{\Delta\pi^2} r_1, \\
\Phi_{i+1,j,k+1} &= \Phi_{i+1,j,k+1} - \frac{E}{4\Delta\lambda\Delta\pi} r_1, \\
\Phi_{i-1,j,k+1} &= \Phi_{i-1,j,k+1} + \frac{E}{4\Delta\lambda\Delta\pi} r_1, \\
\Phi_{i+1,j,k-1} &= \Phi_{i+1,j,k-1} + \frac{E}{4\Delta\lambda\Delta\pi} r_1, \\
\Phi_{i-1,j,k-1} &= \Phi_{i-1,j,k-1} - \frac{E}{4\Delta\lambda\Delta\pi} r_1, \\
\Phi_{i,j+1,k+1} &= \Phi_{i,j+1,k+1} - \frac{F}{4\Delta\phi\Delta\pi} r_1, \\
\Phi_{i,j-1,k+1} &= \Phi_{i,j-1,k+1} + \frac{F}{4\Delta\phi\Delta\pi} r_1, \\
\Phi_{i,j+1,k-1} &= \Phi_{i,j+1,k-1} + \frac{F}{4\Delta\phi\Delta\pi} r_1, \\
\Phi_{i,j-1,k-1} &= \Phi_{i,j-1,k-1} - \frac{F}{4\Delta\phi\Delta\pi} r_1,
\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

r_2 については、

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,j,k} &= \Psi_{i,j,k} + \left(-\frac{2G}{\Delta\lambda^2} - \frac{2H}{\Delta\phi^2} - \frac{2N}{\Delta\lambda^2} - \frac{2O}{\Delta\phi^2} \right) r_2, \\
\Psi_{i+1,j,k} &= \Psi_{i+1,j,k} + \left(\frac{G}{\Delta\lambda^2} + \frac{N}{\Delta\lambda^2} \right) r_2, \\
\Psi_{i-1,j,k} &= \Psi_{i-1,j,k} + \left(\frac{G}{\Delta\lambda^2} + \frac{N}{\Delta\lambda^2} \right) r_2, \\
\Psi_{i,j+1,k} &= \Psi_{i,j+1,k} + \left(\frac{H}{\Delta\phi^2} + \frac{M}{2\Delta\phi} + \frac{O}{\Delta\phi^2} - \frac{Q}{2\Delta\phi} \right) r_2, \\
\Psi_{i,j-1,k} &= \Psi_{i,j-1,k} + \left(\frac{H}{\Delta\phi^2} + \frac{M}{2\Delta\phi} + \frac{O}{\Delta\phi^2} - \frac{Q}{2\Delta\phi} \right) r_2, \\
\Psi_{i+1,j+1,k} &= \Psi_{i+1,j+1,k} - \frac{K}{4\Delta\lambda\Delta\phi} r_2, \\
\Psi_{i-1,j+1,k} &= \Psi_{i-1,j+1,k} + \frac{K}{4\Delta\lambda\Delta\phi} r_2, \\
\Psi_{i+1,j-1,k} &= \Psi_{i+1,j-1,k} + \frac{K}{4\Delta\lambda\Delta\phi} r_2, \\
\Psi_{i-1,j-1,k} &= \Psi_{i-1,j-1,k} - \frac{K}{4\Delta\lambda\Delta\phi} r_2, \\
\Phi_{i,j,k} &= \Phi_{i,j,k} + \left(\frac{2R}{\Delta\lambda^2} + \frac{2S}{\Delta\phi^2} \right) r_2, \\
\Phi_{i+1,j,k} &= \Phi_{i+1,j,k} - \frac{R}{\Delta\lambda^2} r_2, \\
\Phi_{i-1,j,k} &= \Phi_{i-1,j,k} - \frac{R}{\Delta\lambda^2} r_2, \\
\Phi_{i,j+1,k} &= \Phi_{i,j+1,k} + \left(-\frac{S}{\Delta\phi^2} + \frac{T}{2\Delta\phi} \right) r_2, \\
\Phi_{i,j-1,k} &= \Phi_{i,j-1,k} - \left(\frac{S}{\Delta\phi^2} + \frac{T}{2\Delta\phi} \right) r_2,
\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

が本プログラムにおけるアジョイントコードとなる。ただし、実際のコードではこれを i, j, k についてループするが、そのループ順番は接線形コードと完全に逆になる。また、アジョイントコードにおける各入力変数はこのルーチンの do ループ内で随時再利用されるため、OpenMP を用いた並列化はこのループでは行うことができない。なお、 r_1, r_2 は別のアジョイント演算となるので、これらの計算順序自体は反転しないことに注意する。つまり、 r_1, r_2 のどちらのアジョイントにおいても Ψ, Φ が使われているが、これらはそれぞれ独立なルーチンで行われるので、 r_1, r_2 の間でこれらの変数は影響を及ぼし合うことはない。

準ニュートン法を用いた評価関数の最適化問題ここでは、準ニュートン法のうち、BFGS 法を採用する。さらに大規模データを扱うことを想定して、メモリを節約した L-BFGS 法で評価関数の最小値を計算する。反復計算の $k+1$ 回目における状態変数は

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \tag{4.3.35}$$

で求められる。ここで、 α_k は反復ステップ幅であり、直接探索によって以下の条件を満たす α_k を求める：

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) - J(\mathbf{x}_k) &\leq \sigma_1 \alpha_k (\partial J(\mathbf{x}_k) / \partial \mathbf{x})^T \mathbf{d}_k, \\ (\partial J(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) / \partial \mathbf{x})^T \mathbf{d}_k &\leq \sigma_2 (\partial J(\mathbf{x}_k) / \partial \mathbf{x})^T \mathbf{d}_k. \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

直接探索は $0 \leq \alpha_k \leq 1$ の間で二分法を用いて、最初に上の条件を満たす α_k を採用する。なお、 $\sigma_1 = 10^{-4}$, $\sigma_2 = 0.9$ という値を採用する。また、 \mathbf{d}_k は評価関数を最小に導く探索ベクトルであり、

$$\mathbf{d}_k = -H_k^{-1} \left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right|_k \quad (4.3.37)$$

で定義される。 H はヘッセ行列である。ニュートン法では、ヘッセ行列を直接計算によって求めてさらにその逆行列も求めなければならないが、BFGS 系ではヘッセ行列を直接計算ではなく、近似することで k 回目の反復におけるヘッセ行列についての漸化式を作成する。この漸化式を解くことで、ヘッセ行列の逆行列を状態変数 \mathbf{x} から直接計算することができる。BFGS 法におけるヘッセ行列の漸化式は

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k \Delta \mathbf{x}_k (\Delta \mathbf{x}_k)^T H_k}{(\Delta \mathbf{x}_k)^T H_k (\Delta \mathbf{x}_k)} + \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T}{(\Delta \mathbf{x}_k)^T \mathbf{y}_k}, \quad \Delta \mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{y}_k \equiv \left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right|_{k+1} - \left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right|_k \quad (4.3.38)$$

で計算できる。実際のアルゴリズムではこの行列を計算するのではなく、この逆行列 H^{-1} を以下のように計算する：

$$H_{k+1}^{-1} = \left(I - \frac{(\Delta \mathbf{x}_k) \mathbf{y}_k^T}{\mathbf{y}_k^T (\Delta \mathbf{x}_k)} \right) H_k^{-1} \left(I - \frac{\mathbf{y}_k (\Delta \mathbf{x}_k)^T}{\mathbf{y}_k^T (\Delta \mathbf{x}_k)} \right) + \frac{(\Delta \mathbf{x}_k) (\Delta \mathbf{x}_k)^T}{\mathbf{y}_k^T (\Delta \mathbf{x}_k)}. \quad (4.3.39)$$

実際の数値計算ではヘッセ行列の逆行列をそのまま計算すると、格子数 n のデータについて $O(n^2)$ のメモリ領域が必要となる。大規模データでの使用を想定しているので、例えば $500 \times 500 \times 20$ のデータを用いる場合、ヘッセ行列の確保に必要な配列数は $n = 5 \times 10^6$ なので、 $n^2 = 2.5 \times 10^{13}$ 以上必要になる。よって、ここではヘッセ行列をメモリに格納する必要のない手法で数値計算を行う。それを実現するには L-BFGS 法を採用する。これを用いると、必要なメモリ領域は反復計算の総数が k 回だったとすると、 $O(kn)$ だけあればよいことになる。実際の BFGS 法での反復計算はオーダーで 10 回程度なので、事実上メモリが節約されている。

L-BFGS 法では、先のヘッセ行列の逆行列は $n \times n$ 次の正方行列の各成分すべてをメモリに格納する必要はなく、以下のように漸化式を展開することで、 $n \times k$ 行列に置き換えて、それをメモリに格納すればよいことがわかる。まず、

$$V_k \equiv I - \rho_k \mathbf{y}_k (\Delta \mathbf{x}_k)^T, \quad \rho_k \equiv \frac{1}{\mathbf{y}_k^T (\Delta \mathbf{x}_k)}$$

とおくと、 $H^{-1} = B$ と置き換えて (4.3.39) は

$$B_{k+1} = V_k^T B_k V_k + \rho_k (\Delta \mathbf{x}_k) (\Delta \mathbf{x}_k)^T.$$

右辺第 1 項を具体的に展開すると、

$$\begin{aligned}
 B_{k+1} = & (V_k^T \cdots V_0^T) B_0 (V_0 \cdots V_k) \\
 & + \rho_0 (V_k^T \cdots V_1^T) (\Delta \mathbf{x}_0) (\Delta \mathbf{x}_0)^T (V_1 \cdots V_k) \\
 & + \rho_1 (V_k^T \cdots V_2^T) (\Delta \mathbf{x}_1) (\Delta \mathbf{x}_1)^T (V_2 \cdots V_k) \\
 & \vdots \\
 & + \rho_{k-1} V_k^T (\Delta \mathbf{x}_{k-1}) (\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T V_k \\
 & + \rho_k (\Delta \mathbf{x}_k) (\Delta \mathbf{x}_k)^T
 \end{aligned}$$

となる。ヘッセ行列の逆行列はもともと探索方向 \mathbf{d}_k を求める際に必要になる行列である。よって、上式の両辺に右から $-\partial J(\mathbf{x}_{k+1})/\partial \mathbf{x}$ をかけると、

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{d}_{k+1}) - B_{k+1} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{k+1} = & - (V_k^T \cdots V_0^T) B_0 (V_0 \cdots V_k) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{k+1} \\
 & - \rho_0 (V_k^T \cdots V_1^T) (\Delta \mathbf{x}_0) (\Delta \mathbf{x}_0)^T (V_1 \cdots V_k) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{k+1} \\
 & - \rho_1 (V_k^T \cdots V_2^T) (\Delta \mathbf{x}_1) (\Delta \mathbf{x}_1)^T (V_2 \cdots V_k) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{k+1} \\
 & \vdots \\
 & - \rho_{k-1} V_k^T (\Delta \mathbf{x}_{k-1}) (\Delta \mathbf{x}_{k-1})^T V_k \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{k+1} \\
 & - \rho_k (\Delta \mathbf{x}_k) (\Delta \mathbf{x}_k)^T \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{k+1}
 \end{aligned} \tag{4.3.40}$$

このとき、 ρ_k, V_k は $\Delta \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ という n 次元ベクトルのみからなるので、これらのベクトルの値のみ記録しておけば、 n 次正方行列 V_k は表現することができる。また、 B_0 は初期のヘッセ行列の逆行列なので、単位行列を設定すればこの行列もメモリに格納する必要はない。元々、求めたい量が \mathbf{d}_k であるなら、上式を用いることで B_{k+1} をメモリに格納する必要はなく、反復回数 k 回目までの n 次元ベクトル $\Delta \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ を記録させておけばよい。つまり、メモリ領域はこの場合 $O(kn)$ となる。実際の数値計算の際は、 B, V に相当する行列はメモリに置かず、 $\Delta \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ から反復の度に計算しなおすことを行う。上式をさらに展開するために、 $0 \leq l \leq k$ となる任意の V_l の積を具体的に計算する。便宜的に

$$a_l = \begin{cases} \rho_l (\Delta \mathbf{x}_l)^T (V_{l+1} \cdots V_k) \mathbf{g}_{k+1}, & (0 \leq l \leq k-1) \\ \rho_l (\Delta \mathbf{x}_l)^T \mathbf{g}_{k+1}, & (l = k) \end{cases}, \quad \mathbf{g}_{k+1} \equiv \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{k+1}$$

という表記を導入し、加えて

$$\mathbf{q} = B_0 (V_0 \cdots V_k) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{k+1}$$

を用いると、(4.3.40) 式は

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{k+1} = & - (V_k^T \cdots V_0^T) \mathbf{q} - a_0 (V_k^T \cdots V_1^T) (\Delta \mathbf{x}_0) \\ & - a_1 (V_k^T \cdots V_2^T) (\Delta \mathbf{x}_1) \\ & \vdots \\ & - a_{k-1} V_k^T (\Delta \mathbf{x}_{k-1}) \\ & - a_k (\Delta \mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

となる。実際のプログラムでは、上式の線形和と各項における行列積は同時に計算される。つまり、 a_i を配列に保存しておくと、 a_0 から $B_0(V_0 \cdots V_k) \mathbf{g}_{k+1}$ は求めることができる。さらに、 $(V_k^T \cdots V_0^T) B_0(V_0 \cdots V_k) \mathbf{g}_{k+1}$ を計算する際に、 V_i^T の積を計算すると同時にその他の a_i の項についても足し合わせる。それは上式を強引に以下のように表現したものである。

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{k+1} = & - [V_k^T [V_{k-1}^T [\cdots \{V_1^T (V_0^T \mathbf{q} + a_0(\Delta \mathbf{x}_0)) + a_1(\Delta \mathbf{x}_1)\} \cdots] + a_{k-1}(\Delta \mathbf{x}_{k-1})] + a_k(\Delta \mathbf{x}_k)] \\ \text{また、} V_l^T \mathbf{a} = & (I - \rho_l(\Delta \mathbf{x}_l) \mathbf{y}_l^T) \mathbf{a} = \mathbf{a} - c_l(\Delta \mathbf{x}_l), \quad c_l \equiv \rho_l \mathbf{y}_l^T \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \text{任意の列ベクトル.} \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

これをプログラム上において逐次計算で求めると以下ようになる。

$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{n})$, $\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\mathbf{n}, k)$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(\mathbf{n}, k)$, $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}(\mathbf{n})$, $a_k, \rho_k = \mathbf{a}(\mathbf{k})$, $\mathbf{r}(\mathbf{k})$, $B_0 = B_0(\mathbf{n})$ を対角行列とすると、2 つの 1 次元配列の内積を計算する関数として `dot(val1, val2)` を定義すれば、

```
q(1:n)=g(1:n)

do i = k, 0, -1
  a(i) = r(i) * dot( x(:,i), q(:) )
  q(1:n) = q(1:n) - a(i) * y(1:n)
end do

q(1:n) = B0(1:n) * q(1:n)

do i = 0, k
  b(i) = r(i) * dot( y(:,i), q(:) )
  q(1:n) = q(1:n) + (a(i) - b(i)) * x(1:n)
end do

d(1:n) = -q(1:n)
```

よって、ソースコードにおいては do ループで列ベクトルの内積のみを計算していけば、

この過程は処理できることになる。L-BFGS 法全体について具体的な計算手順にすると、以下のとおりである。

— L-BFGS 法の計算手順 —

1. 状態変数の第一推定値 (QGPV inversion など推定) \mathbf{x}_0 を設定する。
2. このときの評価関数 $J(\mathbf{x}_0)$ とその勾配 $\partial J(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}|_0$ をそれぞれ (4.3.24), (4.3.25) から計算する。このとき、勾配についてはアジョイント演算 (4.3.33), (4.3.34) を用いる。
3. ヘッセ行列の逆行列を単位行列 $H_0^{-1} = B_0 = I$ として設定する。
4. (4.3.37) 式を用いて、 \mathbf{d}_0 を計算する。実際には、L-BFGS 法を用いるので (4.3.40) を元にヘッセ行列を用いることなく直接計算する。
5. \mathbf{x}_0 , \mathbf{d}_0 を用いて、直接探索により (4.3.36) を満たす α_0 を求める。
6. (4.3.35) 式から \mathbf{x}_1 を計算する。
7. 2 に戻って、 $k = 1$ から同じ操作を繰り返す。

4.3.3 エルテルの PV 方程式の線形化と Piecewise PV inversion

(4.3.22), (4.3.23) 式は数値的な近似解を得ることはできるが、非線形方程式であるため、任意の線型結合として流線関数の場を表現することができない。そこで、Davis and Emanuel (2006) と同様の手法で方程式の線形化を行う。まず、 $q(t)$ という時間のみの関数が $A(t)$, $B(t)$ という任意の物理量で

$$q(t) = A(t)B(t)$$

という形で記述されると考える。この系は非線形である。このとき、各物理量が時間平均量とその偏差の線型結合で表現できると仮定する：

$$\begin{aligned} q(t) &= \bar{q} + q'(t) = \bar{q} + \sum_{n=1}^N q_n(t), \\ A(t) &= \bar{A} + A'(t) = \bar{A} + \sum_{n=1}^N A_n(t), \\ B(t) &= \bar{B} + B'(t) = \bar{B} + \sum_{n=1}^N B_n(t). \end{aligned}$$

ここで、平均量を上線、偏差をプライムで表した。また、 n は偏差量を任意の線型結合としたときの各偏差成分である。このとき、非線形システム q は

$$q(t) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B' + A'\bar{B} + A'B'$$

となり、特に偏差量 q' は

$$q'(t) = \bar{A}B'(t) + A'(t)\bar{B} + A'(t)B'(t)$$

となる。偏差量を各偏差の総和で表現すると、

$$q'(t) = \sum_{n=1}^N q_n = \bar{A} \sum_{n=1}^N B_n + \bar{B} \sum_{n=1}^N A_n + \sum_{n=1}^N A_n \sum_{m=1}^N B_m.$$

ここで各 q_n を A_n , B_n を用いて表現することを考える。しかし、このシステムは非線形であるため、 q_n を A_n , B_n で表すときに任意性が生じる。Davis and Emanuel (2001) では A_n , B_n の対称性を保持する (?) ように q_n を表現するように考えた。つまり、

$$q_n = \bar{A}B_n + \bar{B}A_n + \left[\sum_{m=1}^N A_m \right] B_n = AB_n + \bar{B}A_n$$

と

$$q_n = \bar{A}B_n + \bar{B}A_n + A_n \left[\sum_{m=1}^N B_m \right] = \bar{A}B_n + BA_n$$

という 2 種類の選択を足した

$$2q_n = AB_n + \bar{B}A_n + \bar{A}B_n + BA_n = (2\bar{A} + A')B_n + (2\bar{B} + B')A_n$$

から得られる：

$$q_n = \left(\bar{A} + \frac{A'}{2} \right) B_n + \left(\bar{B} + \frac{B'}{2} \right) A_n.$$

この表式は q_n にとって線型な表現となっている。なぜなら、上式の q_n を線型結合すると、

$$\sum_{n=1}^N q_n = \left(\bar{A} + \frac{A'}{2} \right) \sum_{n=1}^N B_n + \left(\bar{B} + \frac{B'}{2} \right) \sum_{n=1}^N A_n = \left(\bar{A} + \frac{A'}{2} \right) B' + \left(\bar{B} + \frac{B'}{2} \right) A' = \bar{A}B' + A'\bar{B} + A'B'$$

となるからである。これと同様の方法で (4.3.11), (4.3.15) 式の q , Ψ , Φ という 3 つの変数について線形化を行うと、

$$(4.3.11) : \frac{C_{pp}}{g\kappa\pi}(\bar{q} + q') = \left\{ f + \nabla_h^2 (\bar{\Psi} + \Psi') \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \right) (\bar{\Phi} + \Phi') \\ - \left\{ \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 (\bar{\Phi} + \Phi')}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 (\bar{\Psi} + \Psi')}{\partial \pi \partial \lambda} \right. \\ \left. + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (\bar{\Phi} + \Phi')}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 (\bar{\Psi} + \Psi')}{\partial \pi \partial \phi} \right\}$$

$$(4.3.15) : \nabla_h^2 (\bar{\Phi} + \Phi') = \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2 (\bar{\Psi} + \Psi')}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 (\bar{\Psi} + \Psi')}{\partial \phi^2} - \left(\frac{\partial^2 (\bar{\Psi} + \Psi')}{\partial \phi \partial \lambda} \right)^2 \right\} \\ + \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial (\bar{\Psi} + \Psi')}{\partial \phi} + f \nabla_h^2 (\bar{\Psi} + \Psi')$$

から、各 n 成分は

$$(4.3.11) : \frac{C_{pp}}{g\kappa\pi} q_n = \left\{ f + \nabla_h^2 \left(\bar{\Psi} + \frac{1}{2} \Psi' \right) \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \right) \Phi_n + \left\{ \nabla_h^2 \Psi_n \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \right) \left(\bar{\Phi} + \frac{1}{2} \Phi' \right) \\ - \left\{ \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2}{\partial \pi \partial \lambda} \left(\bar{\Psi} + \frac{1}{2} \Psi' \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2}{\partial \pi \partial \phi} \left(\bar{\Psi} + \frac{1}{2} \Psi' \right) \right\} \\ - \left[\frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \pi} \left(\bar{\Phi} + \frac{1}{2} \Phi' \right) \right\} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \pi \partial \lambda} \right. \\ \left. + \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \pi} \left(\bar{\Phi} + \frac{1}{2} \Phi' \right) \right\} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \pi \partial \phi} \right]$$

$$(4.3.15) : \nabla_h^2 \Phi_n = \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(\bar{\Psi} + \frac{1}{2} \Psi' \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \lambda} \left(\bar{\Psi} + \frac{1}{2} \Psi' \right) \right) \right\} \\ + \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \phi} + f \nabla_h^2 \Psi_n \\ + \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(\bar{\Psi} + \frac{1}{2} \Psi' \right) \right\} \left(\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \phi^2} \right)$$

となる。 $A_* \equiv \bar{A} + A'/2$ を定義して表記を簡略化すると、

$$\begin{aligned}
 (4.3.11) : \quad \frac{C_{pp}}{g\kappa\pi} q_n &= \{f + \nabla_h^2 \Psi_*\} \left(\frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \right) \Phi_n + \{\nabla_h^2 \Psi_n\} \left(\frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \right) \Phi_* \\
 &\quad - \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_*}{\partial \pi \partial \lambda} + \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \pi \partial \lambda} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_*}{\partial \pi \partial \phi} + \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \pi \partial \phi} \right\} \\
 (4.3.15) : \quad \nabla_h^2 \Phi_n &= \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_*}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_*}{\partial \phi \partial \lambda} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_*}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \phi^2} \right\} \\
 &\quad + \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \phi} + f \nabla_h^2 \Psi_n
 \end{aligned}$$

となる。ここでアスタリスクのついている物理量は既知の量であることに注意する。例えば、先の EPV 方程式などで得られている物理量に相当する。すると、上の 2 つの式はこちらで任意に分離された PV の偏差 q_n に対して駆動される力学、熱力学場 Φ_n, Ψ_n を求積するための線形楕円型方程式となる。よって、反復法などを用いて数値的に求積することが可能となる。さらに、上式を (4.3.16), (4.3.17) 式で無次元化すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos^2 \phi}{H^2} q_n^* &= \{\sin \phi \cos^2 \phi + \nabla_h^{2*} \Psi_*\} \left(\frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \right) \Phi_n^* + \{\nabla_h^{2*} \Psi_n^*\} \left(\frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \right) \Phi_*^* \\
 &\quad - \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_n^*}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_*^*}{\partial \pi \partial \lambda^*} + \frac{\partial^2 \Phi_*^*}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_n^*}{\partial \pi \partial \lambda^*} \right\} \\
 &\quad - \cos^2 \phi \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_n^*}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_*^*}{\partial \pi \partial \phi^*} + \frac{\partial^2 \Phi_*^*}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_n^*}{\partial \pi \partial \phi^*} \right\},
 \end{aligned} \tag{4.3.42}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_h^{2*} \Phi_n^* &= 2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_n^*}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi_*^*}{\partial \phi^{2*}} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi_n^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_*^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_*^*}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi_n^*}{\partial \phi^{2*}} \right\} \\
 &\quad + \frac{L \cos^3 \phi}{a} \frac{\partial \Psi_n^*}{\partial \phi^*} + \sin \phi \nabla_h^{2*} \Psi_n^*.
 \end{aligned} \tag{4.3.43}$$

この方程式を解く際に注意すべきことは、境界条件の扱いである。QGPV 系や EPV 系では鉛直方向については静力学方程式から、側面境界については速度場の条件を用いて設定されていた。PPV の境界条件は、鉛直方向については、同じ静力学方程式から

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \pi} = f_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \pi} = -\theta_n$$

を設定することができる。なぜなら、静力学方程式が線型方程式だからである^{*17}。しかし、側面境界においては先と同様の速度を各成分に分離して表現することができないので、ここではノイマン型で各変数の法線方向の勾配がゼロ：

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_h \Phi = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla_h \Psi = 0$$

となるように設定する。ここで、 \mathbf{n} は側面について法線方向の単位ベクトルである。

^{*17}しかし、実際にこちらで任意に分類した q_n に対応する θ_n が明確に規程できることはまれであるので、鉛直方向についても側面と同じ方法で境界条件を設定することになる。

4.3.4 EPV inversion によるバランス鉛直風 inversion

EPV による逆変換は先の節で示した。これにより、EPV に基づいて力学場については 2 次元水平非発散流、熱力学場については温度が再現される。しかし、これでは力学場について水平方向の回転流しか再現できない。台風や低気圧周辺では発散流も回転流より小さいかもしれないが無視できない大きさで存在していることが想像される。また、鉛直流はこの無視された発散流によって引き起こされている。ここでは、2 次元発散流と鉛直流を EPV inversion によって求められた各物理場から推定する方法を構築する。

先に述べたとおり、任意の流速ベクトル \mathbf{v} は発散流 \mathbf{v}_d と回転流 \mathbf{v}_r の線形結合：

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_d$$

で表される。ところで、流速ベクトルは電磁気分野におけるベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの類推から、以下のように任意の 2 種類のポテンシャル量で表現することができる：

$$\mathbf{v}_h = \nabla \chi + \nabla \times \mathbf{A}.$$

χ はスカラーポテンシャル、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルである。これらは各ポテンシャルの定義から、

$$\nabla \times \nabla \chi = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

をそれぞれ満たす。これは先の発散流と回転流とに対応させると、

$$\mathbf{v}_r = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{v}_d = \nabla \chi$$

に対応している。先で用いた回転流における流線関数は

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{k} \times \nabla \Psi = \nabla \times (-\Psi \mathbf{k})$$

とすれば、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} と

$$\mathbf{A} = -\Psi \mathbf{k}$$

という対応関係をもつことがわかる。一方、スカラーポテンシャル χ は速度ポテンシャルに対応する。以下では、発散流成分をこの速度ポテンシャル χ を用いて表現することにする。

Davis and Emanuel (1991) より、EPV 方程式 (4.3.11) とバランス流方程式 (4.3.15) をそれぞれ時間微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{C_p p}{g \kappa \pi} q_t = & \left\{ f + \nabla_h^2 \Psi \right\} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \pi^2} \right) + \nabla_h^2 \Psi_t \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \pi^2} \right) \\ & - \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \lambda} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \pi \partial \lambda} \right) \\ & - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \phi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \pi \partial \phi} \right), \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 \Phi_t = & \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} \\ & + \frac{2 \Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial \Psi_t}{\partial \phi} + f \nabla_h^2 \Psi_t \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

となる。ここで、添字 t は時間微分を表し、以降時間微分に関してはこの表記で統一する。

一方、規格化圧力座標において、運動方程式と連続の式、熱エネルギー方程式から EPV の収支式を導出する。それぞれの方程式はテンソル表記において

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -V_j \partial_j v_i - \partial_{hi} \Phi - \varepsilon_{ijk} f k_j v_k + F_i, \quad (4.3.46)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -V_j \partial_j \theta + Q, \quad (4.3.47)$$

$$\partial_j V_j = 0 \quad (4.3.48)$$

である。ここで、 ∂_i , V_i は右手系座標での 3 次元ベクトルであることに注意する。したがって、テンソル表記された各方程式において、鉛直座標は左手系である圧力座標ではなく、一般右手系を採用する。以下では表記の点から鉛直座標については x_3 、鉛直速度成分については V_3 と表記しているが、これらは鉛直下向きを正にとった圧力座標ではなく、鉛直上向きを正にとった一般鉛直座標であることに注意する^{*18}。 F_i , Q はそれぞれ運動方程式における外力と熱エネルギー方程式における非断熱加熱である。また、テンソルインデックスが付記されている変数は以下以外すべて、3 次元変数であることに注意する：

$$\partial_{hi} = \partial_i - \delta_{i3} \partial_3, \quad v_i = V_i - \delta_{i3} V_3.$$

このとき、 δ_{ij} , ε_{ijk} はそれぞれクロネッカーデルタとレヴィ・チヴィタテンソルである。(4.3.46) の 3 次元回転をとると、

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} = -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_l v_k) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_{hk} \Phi) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} f k_l v_m) + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k. \quad (4.3.49)$$

ここで、 $\zeta_i \equiv \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$ を定義した。上式右辺第 1 項は

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} V_j \partial_l v_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) V_j \partial_l v_m = V_j \partial_i v_j - V_j \partial_j v_i$$

$$\Rightarrow V_j \partial_j v_i = V_j \partial_i v_j - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} V_j \partial_l v_m = V_j \partial_i v_j - \varepsilon_{ijk} V_j \zeta_k$$

という変形を用いると、(4.3.49) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l - \varepsilon_{klm} V_l \zeta_m) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_{hk} \Phi) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} f k_l v_m) + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} V_l \zeta_m) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_{hk} \Phi) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} f k_l v_m) + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} V_l \zeta_m) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_{hk} \Phi) + \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} v_l f k_m) + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j (V_l \zeta_m + v_l f k_m) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_{hk} \Phi) + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_{hk} \Phi) + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \\ &\quad + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (V_l \zeta_m + v_l f k_m) \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_{hk} \Phi) + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \\ &\quad + \partial_j (V_i \zeta_j + v_i f k_j) - \partial_j (V_j \zeta_i + v_j f k_i) \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l) - \varepsilon_{ijk} \partial_j (\partial_{hk} \Phi) + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \\ &\quad + V_i \partial_j \zeta_j + \zeta_j \partial_j V_i + v_i \partial_j f k_j + f k_j \partial_j v_i - V_j \partial_j \zeta_i - \zeta_i \partial_j V_j - v_j \partial_j f k_i - f k_i \partial_j v_j \end{aligned}$$

^{*18} 圧力座標に変換する際は単純に $\partial_3 = -\frac{\partial}{\partial p}$, $V_3 = -\omega$ とすればよい。

このとき、任意のスカラーを ψ としたときのテンソル解析公式： $\varepsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$, $\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\psi = 0$ を用いると、ジオポテンシャルに由来する項は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta_i}{\partial t} &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) - \varepsilon_{ijk}\partial_j(\partial_k - \delta_{k3}\partial_3)\Phi + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k \\ &\quad + V_i\partial_j\zeta_j + \zeta_j\partial_j V_i + v_i\partial_j f k_j + f k_j\partial_j v_i - V_j\partial_j\zeta_i - \zeta_i\partial_j V_j - v_j\partial_j f k_i - f k_i\partial_j v_j \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad + V_i\partial_j\zeta_j + \zeta_j\partial_j V_i + v_i\partial_j f k_j + f k_j\partial_j v_i - V_j\partial_j\zeta_i - \zeta_i\partial_j V_j - v_j\partial_j f k_i - f k_i\partial_j v_j.\end{aligned}$$

さらに、任意のベクトルを A_i としたとき、テンソル解析公式： $\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0$ を用いると、上式右辺第 4 項は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta_i}{\partial t} &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi + V_i\partial_j(\varepsilon_{jkl}\partial_k v_l) \\ &\quad + \zeta_j\partial_j V_i + v_i\partial_j f k_j + f k_j\partial_j v_i - V_j\partial_j\zeta_i - \zeta_i\partial_j V_j - v_j\partial_j f k_i - f k_i\partial_j v_j \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi + V_i\partial_j\varepsilon_{jkl}\partial_k(V_l - \delta_{l3}V_3) \\ &\quad + \zeta_j\partial_j V_i + v_i\partial_j f k_j + f k_j\partial_j v_i - V_j\partial_j\zeta_i - \zeta_i\partial_j V_j - v_j\partial_j f k_i - f k_i\partial_j v_j \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad + \zeta_j\partial_j V_i + v_i\partial_j f k_j + f k_j\partial_j v_i - V_j\partial_j\zeta_i - \zeta_i\partial_j V_j - v_j\partial_j f k_i - f k_i\partial_j v_j.\end{aligned}$$

また、 $k_i = \delta_{i3}$, $\partial_i f = \delta_{i2}\partial f$ を用いると、上式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta_i}{\partial t} &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad + \zeta_j\partial_j V_i + v_i\delta_{j3}\delta_{j2}\partial f + f\delta_{j3}\partial_j v_i - V_j\partial_j\zeta_i - \zeta_i\partial_j V_j - v_j\delta_{i3}\delta_{j2}\partial f - f\delta_{i3}\partial_j v_j \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad + \zeta_j\partial_j V_i + f\delta_{j3}\partial_j v_i - V_j\partial_j\zeta_i - \zeta_i\partial_j V_j - v_j\delta_{i3}\delta_{j2}\partial f - f\delta_{i3}\partial_j v_j.\end{aligned}$$

最終式への変形は第 1 式の右辺第 5 項が $\delta_{j2}\delta_{j3} = 0$ であることを用いた。この関係を逆に利用して、 $v_j\delta_{j2}\partial f = (v_j + \delta_{j3}V_3)\delta_{j2}\partial f = V_j\delta_{j2}\partial f$ なので、上式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta_i}{\partial t} &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad + \zeta_j\partial_j V_i + f\delta_{j3}\partial_j v_i - V_j\partial_j\zeta_i - \zeta_i\partial_j V_j - V_j\delta_{i3}\delta_{j2}\partial f - f\delta_{i3}\partial_j v_j \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad - V_j\partial_j(\zeta_i + \delta_{i3}f) - \zeta_i\partial_j V_j - f\delta_{i3}\partial_j v_j + \zeta_j\partial_j V_i + f\delta_{j3}\partial_j v_i.\end{aligned}$$

右辺第 6 項と最終項の水平速度成分を 3 次元に直すと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta_i}{\partial t} &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad - V_j\partial_j(\zeta_i + \delta_{i3}f) - \zeta_i\partial_j V_j - f\delta_{i3}\partial_j(V_j - \delta_{j3}V_3) + \zeta_j\partial_j V_i + f\delta_{j3}\partial_j(V_i - \delta_{i3}V_3) \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad - V_j\partial_j(\zeta_i + \delta_{i3}f) - \zeta_i\partial_j V_j - f\delta_{i3}\partial_j V_j + f\delta_{i3}\delta_{j3}\partial_j V_3 + \zeta_j\partial_j V_i + f\delta_{j3}\partial_j V_i - f\delta_{j3}\delta_{i3}\partial_j V_3 \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(V_l\partial_k v_l) + \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j\delta_{k3}\partial_3\Phi \\ &\quad - V_j\partial_j(\zeta_i + \delta_{i3}f) - (\zeta_i + f\delta_{i3})\partial_j V_j + \zeta_j\partial_j V_i + f\delta_{j3}\partial_j V_i.\end{aligned}$$

$\zeta_{ai} \equiv \zeta_i + \delta_{i3}f$ を定義すると、 f は時間変化しないので上式は

$$\frac{\partial \zeta_{ai}}{\partial t} = -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l) - V_j \partial_j \zeta_{ai} - \zeta_{ai} \partial_j V_j + \zeta_j \partial_j V_i + f \delta_{j3} \partial_j V_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi.$$

上式右辺第 3 項は連続の式 (4.3.48) からゼロになり、

$$\frac{\partial \zeta_{ai}}{\partial t} = -\varepsilon_{ijk} \partial_j (V_l \partial_k v_l) - V_j \partial_j \zeta_{ai} + \zeta_j \partial_j V_i + f \delta_{j3} \partial_j V_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi.$$

上式右辺第 1 項の水平速度テンソルを 3 次元テンソルに直すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_{ai}}{\partial t} &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j \{V_l \partial_k (V_l - \delta_{l3} V_3)\} \\ &\quad - V_j \partial_j \zeta_{ai} + \zeta_j \partial_j V_i + f \delta_{j3} \partial_j V_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j \left(\partial_k \frac{V_l V_l}{2} - \partial_k \frac{V_3^2}{2} \right) \\ &\quad - V_j \partial_j \zeta_{ai} + \zeta_j \partial_j V_i + f \delta_{j3} \partial_j V_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi \\ &= -V_j \partial_j \zeta_{ai} + \zeta_{aj} \partial_j V_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi. \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

次に、(4.3.47) 式の両辺について 3 次元空間勾配をとると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \partial_i \theta}{\partial t} &= -\partial_i (V_j \partial_j \theta) + \partial_i Q \\ &= -V_j \partial_j (\partial_i \theta) - (\partial_i V_j) (\partial_j \theta) + \partial_i Q. \end{aligned} \quad (4.3.51)$$

さらに、

$$(\partial_i \theta) \times (4.3.50) + \zeta_{ai} \times (4.3.51)$$

を計算すると、

$$\begin{aligned} (\partial_i \theta) \frac{\partial \zeta_{ai}}{\partial t} + \zeta_{ai} \frac{\partial \partial_i \theta}{\partial t} &= -(\partial_i \theta) [V_j \partial_j \zeta_{ai} - \zeta_{aj} \partial_j V_i] + (\partial_i \theta) \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi \\ &\quad - \zeta_{ai} [V_j \partial_j (\partial_i \theta) + (\partial_i V_j) (\partial_j \theta)] + \zeta_{ai} \partial_i Q, \end{aligned}$$

さらに両辺に g をかけると、

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} &= -V_j \partial_j q + g (\partial_i \theta) \zeta_{aj} \partial_j V_i + g (\partial_i \theta) \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k + g \varepsilon_{ijk} (\partial_i \theta) \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi \\ &\quad - g \zeta_{ai} (\partial_i V_j) (\partial_j \theta) + g \zeta_{ai} \partial_i Q \\ &= -V_j \partial_j q + g (\partial_i \theta) \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k + g \zeta_{ai} \partial_i Q \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

が得られる. ここで、最終式への変形はジオポテンシャルの項について、

$$\varepsilon_{ijk} (\partial_i \theta) \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \varepsilon_{ijk} (\partial_i \theta) (\partial_j \theta) \delta_{k3} = 0$$

であるという事実を用いた^{*19}。このとき、(4.3.52) の q は

$$\begin{aligned}
 q &= g\zeta_{ai}(\partial_i\theta) \\
 &= g(\zeta_i + \delta_{i3}f)(\partial_i\theta) \\
 &= g\{\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k + \delta_{i3}f\}(\partial_i\theta) \\
 &= g\{\varepsilon_{ijk}(\partial_{hj} + \delta_{j3}\partial_3)v_k + \delta_{i3}f\}(\partial_i\theta) \\
 &= g\{\zeta_p\delta_{i3} + \varepsilon_{ijk}\delta_{j3}\partial_3 v_k + \delta_{i3}f\}(\partial_i\theta)
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\zeta_p\delta_{i3} = \varepsilon_{ijk}\partial_{hj}v_k$ とした。これは ∂_{hj} , v_k ともに水平成分しかもたないことに由来する。さらに、上式をベクトル表記に戻すと、 $\delta_{i3} = k_i$ であることに注意して、

$$\begin{aligned}
 q &= g\{(\zeta_p + f)k_i + \varepsilon_{ijk}k_j\partial_3 v_k\}(\partial_i\theta) \\
 &= g\left[(\zeta_p + f)\frac{\partial\theta}{\partial x_3} - \left\{\varepsilon_{jik}k_j(\partial_i\theta)\frac{\partial v_k}{\partial x_3}\right\}\right] \\
 &= g\left[(\zeta_p + f)\frac{\partial\theta}{\partial x_3} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p\theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial x_3}\right].
 \end{aligned}$$

さらに、鉛直座標を一般右手系から左手系である圧力座標に直すと、

$$q = -g\left[(\zeta_p + f)\frac{\partial\theta}{\partial p} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p\theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}\right].$$

これはまさに EPV そのものである。(4.3.52) 式をベクトル形式に直すと、

$$\begin{aligned}
 q_t &= -\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h q - V_3 \frac{\partial q}{\partial x_3} \\
 &\quad + g\mathbf{k} \cdot \left[(\nabla_p \times \mathbf{F})\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right) - (\nabla_p\theta) \times \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_3}\right)\right] \\
 &\quad + g\left[(\zeta_h + f)\frac{\partial Q}{\partial x_3} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_h Q) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial x_3}\right].
 \end{aligned} \tag{4.3.53}$$

さらに、この式を圧力座標で表すと、

$$\begin{aligned}
 q_t &= -\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h q - \omega \frac{\partial q}{\partial p} \\
 &\quad - g\mathbf{k} \cdot \left[(\nabla_p \times \mathbf{F})\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}\right) - (\nabla_p\theta) \times \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p}\right)\right] \\
 &\quad - g\left[(\zeta_p + f)\frac{\partial Q}{\partial p} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p Q) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}\right]
 \end{aligned} \tag{4.3.54}$$

^{*19}なぜなら、鉛直座標を x_3 から圧力座標に直すと、静力学平衡関係から

$$\partial_3 \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{RT}{p} = \frac{R\pi}{p}\theta = \Phi(\theta)$$

という形で θ のみの関数となるので、

$$\partial_i(\partial_3 \Phi) = -\partial_i \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\partial_i \Phi(\theta) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\partial_i \theta)$$

となるからである。

という EPV の圧力座標における収支式が得られる。鉛直座標を規格化圧力 π に置き換えると、 q については

$$\begin{aligned} q &= -g \left(\frac{\partial \pi}{\partial p} \right) \left[(\zeta_p + f) \frac{\partial \theta}{\partial \pi} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p \theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \pi} \right] \\ &= -\frac{g\pi\kappa}{p} \left[(\zeta_p + f) \frac{\partial \theta}{\partial \pi} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p \theta) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \pi} \right]. \end{aligned}$$

収支式については

$$\begin{aligned} q_t &= -\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h q - \omega_\pi \frac{\partial q}{\partial \pi} \\ &\quad - \frac{g\pi\kappa}{p} \mathbf{k} \cdot \left[(\nabla_p \times \mathbf{F}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right) - (\nabla_p \theta) \times \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \pi} \right) \right] \\ &\quad - \frac{g\pi\kappa}{p} \left[(\zeta_p + f) \frac{\partial Q}{\partial \pi} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p Q) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \pi} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

が得られる^{*20}。これと (4.3.44) から q_t を消去すると、

$$\begin{aligned} -\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h q - \omega_\pi \frac{\partial q}{\partial \pi} &= \frac{g\pi\kappa}{C_p p} \left[C_p F + \{f + \nabla_h^2 \Psi\} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \pi^2} \right) + \nabla_h^2 \Psi_t \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \pi^2} \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \lambda} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \pi \partial \lambda} \right) \\ &\quad \left. - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \pi \partial \phi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \pi \partial \phi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

ここで、 F は (4.3.55) の外力項：

$$F \equiv \mathbf{k} \cdot \left[(\nabla_p \times \mathbf{F}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right) - (\nabla_p \theta) \times \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \pi} \right) \right] + (\zeta_p + f) \frac{\partial Q}{\partial \pi} - \mathbf{k} \cdot (\nabla_p Q) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \pi}$$

である。さらに、連続の式について \mathbf{v}_h をポテンシャルで表現すると、回転成分 (流線関数) は非発散なので、

$$\nabla^2 \chi + \pi^{1-1/\kappa} \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\pi^{1/\kappa-1} \omega_\pi \right) = 0 \quad (4.3.57)$$

^{*20} なぜなら、規格化圧力座標における鉛直オメガ速度 ω_π を

$$\omega_\pi \equiv \frac{D\pi}{Dt}$$

で定義すると、鉛直移流項における圧力座標と規格化圧力座標での評価式の関係は

$$\omega \frac{\partial}{\partial p} = \frac{Dp}{Dt} \frac{\partial}{\partial p} = \frac{D}{Dt} \left(p_0 \pi^{1/\kappa} \right) \frac{\partial \pi}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{p_0}{\kappa} \pi^{1/\kappa-1} \left(\frac{D\pi}{Dt} \right) \frac{\kappa}{p} \pi \frac{\partial}{\partial \pi} = \omega_\pi \frac{\partial}{\partial \pi}$$

となるからである。

となる^{*21}。最後にバランス風の鉛直渦度方程式 (4.3.50) の $i = 3$ 成分 ($\zeta_{a3} = (\zeta_\pi + f)\delta_{33}$) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_\pi}{\partial t} &= -V_j \partial_j \zeta_\pi + \zeta_\pi \partial_3 V_3 + \varepsilon_{3jk} \partial_j F_k + \varepsilon_{3jk} \partial_j \delta_{k3} \partial_3 \Phi \\ &= -V_j \partial_j \zeta_\pi + \zeta_\pi \partial_3 V_3 + \varepsilon_{3jk} \partial_j F_k \\ &= -\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \zeta_\pi - \omega_\pi \frac{\partial \zeta_\pi}{\partial \pi} + \zeta_\pi \pi^{1-1/\kappa} \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\pi^{1/\kappa-1} \omega_\pi \right) + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F},\end{aligned}\quad (4.3.58)$$

熱力学方程式 (4.3.47) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -V_j \partial_j \theta + Q = -\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \theta - \omega_\pi \frac{\partial \theta}{\partial \pi} + Q, \quad (4.3.59)$$

ジオポテンシャルの傾向方程式 (4.3.45) を用いて、

$$-C_p \nabla_h^2 (4.3.59) - f \frac{\partial}{\partial \pi} (4.3.58) - \frac{\partial}{\partial \pi} (4.3.45)$$

を計算すると、

$$\begin{aligned}& -C_p \nabla_h^2 \theta_t - f \frac{\partial \zeta_{\pi t}}{\partial \pi} - \nabla_h^2 \frac{\partial \Phi_t}{\partial \pi} \\ &= C_p \nabla_h^2 [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \theta] + C_p \nabla_h^2 \left[\omega_\pi \frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right] - C_p \nabla_h^2 Q \\ &+ f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \zeta_\pi] + f \frac{\partial}{\partial \pi} \left[\omega_\pi \frac{\partial \zeta_\pi}{\partial \pi} \right] - f \frac{\partial}{\partial \pi} \left[\zeta_\pi \pi^{1-1/\kappa} \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\pi^{1/\kappa-1} \omega_\pi \right) \right] - f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}] \\ &- \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} \\ &- \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \pi} - f \nabla_h^2 \frac{\partial \Psi_t}{\partial \pi}.\end{aligned}$$

このとき、ジオポテンシャルの鉛直微分は静力学平衡の関係から、 $\frac{\partial \Phi}{\partial \pi} = -C_p \theta$ 、バランス風の鉛直渦度は流線関数を用いて、 $\zeta_\pi = \nabla_h^2 \Psi$ なので、上式左辺第 1,3 項がキャンセル、左辺第 2 項と右辺最終項がキャンセルし、

$$\begin{aligned}0 &= C_p \nabla_h^2 [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \theta] + C_p \nabla_h^2 \left[\omega_\pi \frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right] - C_p \nabla_h^2 Q \\ &+ f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \zeta_\pi] + f \frac{\partial}{\partial \pi} \left[\omega_\pi \frac{\partial \zeta_\pi}{\partial \pi} \right] - f \frac{\partial}{\partial \pi} \left[\zeta_\pi \pi^{1-1/\kappa} \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\pi^{1/\kappa-1} \omega_\pi \right) \right] - f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}] \\ &- \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} - \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \pi},\end{aligned}$$

^{*21}(4.3.57) 式については、圧力座標での連続の式 (4.3.48) の鉛直伸長項を

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial \pi}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \pi} \frac{Dp}{Dt} = \pi^{1-1/\kappa} \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\pi^{1/\kappa-1} \omega_\pi \right), \quad \omega_\pi \equiv \frac{D\pi}{Dt}$$

と変形することで得られる。

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &= C_p \nabla_h^2 [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \theta] + f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \zeta_\pi] + C_p \nabla_h^2 \left[\omega_\pi \frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right] - C_p \nabla_h^2 Q - f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}] \\ &\quad + f \frac{\partial}{\partial \pi} \left[\omega_\pi \frac{\partial \zeta_\pi}{\partial \pi} \right] - f \frac{\partial}{\partial \pi} \left[\zeta_\pi \frac{\partial \omega_\pi}{\partial \pi} + \zeta_\pi \omega_\pi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \pi^{-1} \right] \\ &\quad - \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} - \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &= C_p \nabla_h^2 [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \theta] + f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \zeta_\pi] + C_p \nabla_h^2 \left[\omega_\pi \frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right] - C_p \nabla_h^2 Q - f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}] \\ &\quad + f \omega_\pi \frac{\partial^2 \zeta_\pi}{\partial \pi^2} - f \zeta_\pi \frac{\partial^2 \omega_\pi}{\partial \pi^2} - f \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \pi} \left[\frac{\zeta_\pi \omega_\pi}{\pi} \right] \\ &\quad - \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} - \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \pi}, \end{aligned}$$

ω_π についてまとめると、

$$\begin{aligned} &- C_p \nabla_h^2 \left[\omega_\pi \frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right] - f \omega_\pi \frac{\partial^2 \zeta_\pi}{\partial \pi^2} + f \zeta_\pi \frac{\partial^2 \omega_\pi}{\partial \pi^2} + f \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \pi} \left[\frac{\zeta_\pi \omega_\pi}{\pi} \right] \\ &= C_p \nabla_h^2 [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \theta] + f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \zeta_\pi] - C_p \nabla_h^2 Q - f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}] \\ &\quad - \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} - \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \pi}, \\ \Rightarrow \quad &- C_p \omega_\pi \nabla_h^2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right] - C_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right) \nabla_h^2 \omega_\pi - 2 C_p \left[\nabla_h \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right) \right] \cdot (\nabla_h \omega_\pi) \\ &- f \omega_\pi \frac{\partial^2 \zeta_\pi}{\partial \pi^2} + f \zeta_\pi \frac{\partial^2 \omega_\pi}{\partial \pi^2} + f \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \left[\frac{\zeta_\pi}{\pi} \frac{\partial \omega_\pi}{\partial \pi} + \omega_\pi \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\frac{\zeta_\pi}{\pi} \right) \right] \\ &= C_p \nabla_h^2 [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \theta] + f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \zeta_\pi] - C_p \nabla_h^2 Q - f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}] \\ &\quad - \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} - \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \pi}. \end{aligned}$$

最後に θ , ζ_π などをジオポテンシャル、流線関数、速度ポテンシャルで表現すると、

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \pi^2} \right) \nabla_h^2 \omega_\pi + f (\nabla_h^2 \Psi) \frac{\partial^2 \omega_\pi}{\partial \pi^2} \right] \\ &+ \left[2 \left\{ \nabla_h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \pi^2} \right) \right\} \cdot (\nabla_h \omega_\pi) + f \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{(\nabla_h^2 \Psi)}{\pi} \frac{\partial \omega_\pi}{\partial \pi} \right] \\ &+ \omega_\pi \left[\nabla_h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \pi^2} \right) - f \frac{\partial^2}{\partial \pi^2} (\nabla_h^2 \Psi) + f \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \pi} (\pi^{-1} \nabla_h^2 \Psi) \right] \\ &= - \nabla_h^2 \left[\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \pi} \right) \right] + f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h (\nabla_h^2 \Psi)] - C_p \nabla_h^2 Q - f \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}] \\ &\quad - \frac{2}{a^4 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \lambda} \right) \right\} - \frac{2\Omega \cos \phi}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial \phi \partial \pi}. \end{aligned} \tag{4.3.60}$$

さらに、(4.3.45), (4.3.56), (4.3.57), (4.3.60) を水平には緯度経度座標、鉛直方向には規格化圧力座標を用いてさらに、(4.3.16), (4.3.17) 式で無次元化すると、

$$\begin{aligned} \nabla_h^{2*} \Phi_t^* = & 2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^{2*}} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \phi^{2*}} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right) \right\} \\ & + \frac{L}{a} \cos^3 \phi \frac{\partial \Psi_t^*}{\partial \phi^*} + \sin \phi \nabla_h^{2*} \Psi_t^*, \end{aligned} \quad (4.3.61)$$

$$\begin{aligned} \nabla_h^{2*} \Psi_t^* = & \left[-\frac{\cos^2 \phi}{H^2} \left\{ \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h q^* + \omega_\pi \frac{\partial q^*}{\partial \pi} + \frac{\omega_\pi q^*}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) \right\} \right. \\ & - \frac{C_p}{L^2 F^3} F' \cos^2 \phi - \left\{ \sin \phi \cos^2 \phi + \nabla_h^{2*} \Psi^* \right\} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t^*}{\partial \pi^2} \right) \\ & + \left(\frac{\partial^2 \Phi_t^*}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \pi \partial \lambda^*} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \lambda^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \pi \partial \lambda^*} \right) \\ & \left. + \cos^2 \phi \left(\frac{\partial^2 \Phi_t^*}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \pi \partial \phi^*} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \phi^* \partial \pi} \frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \pi \partial \phi^*} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \pi^2} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.3.62)$$

$$\nabla_h^{2*} \chi = -L^2 \cos^2 \phi \left\{ \frac{\partial \omega_\pi}{\partial \pi} + \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{\omega_\pi}{\pi} \right\}, \quad (4.3.63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\omega_\pi) = & -\nabla_h^{2*} \left[\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \pi} \right) \right] + L^2 \sin \phi \cos^2 \phi \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h (\nabla_h^{2*} \Psi^*)] \\ & - \frac{C_p}{L^2 F^2} \nabla_h^{2*} Q - \frac{\sin \phi \cos^2 \phi}{F} \frac{\partial}{\partial \pi} [\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}] \\ & - 2 \frac{\partial}{\partial \pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^{2*}} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \lambda^{2*}} \frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \phi^{2*}} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \phi^* \partial \lambda^*} \right) \right\} \\ & - \frac{L}{a} \cos^3 \phi \frac{\partial^2 \Psi_t^*}{\partial \phi^* \partial \pi}. \end{aligned} \quad (4.3.64)$$

ただし、 \mathbf{L} は最高階数が 2 階の線形微分演算子であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \pi^2} \right) \nabla_h^{2*} + \sin \phi (\nabla_h^{2*} \Psi^*) \frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \right] \\ & + \left[2 \left\{ \nabla_h^* \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \pi^2} \right) \right\} \cdot \nabla_h^* + \frac{\sin \phi}{\pi} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (\nabla_h^{2*} \Psi^*) \frac{\partial}{\partial \pi} \right] \\ & + \left[\nabla_h^{2*} \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \pi^2} \right) - \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial \pi^2} (\nabla_h^{2*} \Psi^*) + \sin \phi \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \pi} (\pi^{-1} \nabla_h^{2*} \Psi^*) \right], \end{aligned}$$

で定義される。さらにその他の記号は

$$\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h = \frac{u_\lambda}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{u_\phi}{a} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_r = \nabla_h \chi + \mathbf{k} \times \nabla_h \Psi = \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \cos \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}, \cos \phi \frac{\partial \chi}{\partial \phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right)$$

である。さらに、計算しやすいように

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \pi} = -C_p \theta, \quad \zeta_\pi = \nabla_h^2 \Psi$$

という事実を用いて煩雑な微分表記を減らした。

このとき、 Φ_t , Ψ_t , χ , ω_π という未知変数に対して、(4.3.61), (4.3.62), (4.3.63), (4.3.64) は閉じた方程式系となっている。よって、これらを連立して解くことで鉛直速度 ω_π を求めることができる。各方程式における境界条件は側面については任意の変数 (φ) についてノイマン型でフラックスゼロの条件：

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_h \varphi = 0, \quad (4.3.65)$$

鉛直方向の上下について鉛直速度および速度ポテンシャルについてはディリクレ型：

$$\chi = 0, \quad \omega_\pi = 0, \quad (\pi = \pi_T, \pi_s) \quad (4.3.66)$$

それ以外は熱エネルギー方程式 (4.3.59) と静力学関係式、地衡流近似を合わせた

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{C_p} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \pi} = -\frac{1}{C_p} \frac{\partial \Phi_t}{\partial \pi} \left(\approx -\frac{f}{C_p} \frac{\partial \Psi_t}{\partial \pi} \right) = -\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \theta - \omega_\pi \frac{\partial \theta}{\partial \pi} + Q$$

を用いることで、ノイマン型の境界条件とする。ただし、 χ , ω_π が上下端でゼロなので、上の境界条件は実際には

$$-\frac{1}{C_p} \frac{\partial \Phi_t}{\partial \pi} \left(\approx -\frac{f}{C_p} \frac{\partial \Psi_t}{\partial \pi} \right) = -\mathbf{v}_r \cdot \nabla_h \theta + Q, \quad (\pi = \pi_T, \pi_s) \quad (4.3.67)$$

となる ^{*22}。

^{*22}本節の議論で取り上げた非断熱加熱項 Q は原論文では鉛直速度と実際の水蒸気量、温度から推定されているが、本プログラムでは、非断熱加熱はモデル結果から雲物理過程によって発生した非断熱加熱量を陽に与えることにする。よって、本節の Q はモデルにおける予報変数から求められるが、診断的に扱う。

ここでは、CReSS の基礎方程式系に基づき、EPV の収支式を導出する。CReSS の基礎方程式系で導出に必要な、以下のとおりである：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + (g + B)\mathbf{k} + \mathbf{F}, \quad (4.3.68)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \theta + Q. \quad (4.3.69)$$

(4.3.68), (4.3.69) はそれぞれ 3 次元の運動方程式と熱エネルギー方程式である。 \mathbf{F} , Q はそれぞれ運動方程式における外力と熱エネルギー方程式における非断熱加熱である。なお、ここでは外力として乱流抵抗と地表面摩擦の効果を、非断熱加熱としては雲物理過程における相変化の効果のみを考慮する^{*23}。さらに、 B , f はそれぞれ浮力とコリオリパラメータを表す。コリオリパラメータは子午面方向に変化する。ここで、 ρ_0 は静力学平衡状態：

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\rho_0(z) \quad (4.3.70)$$

における密度であり、 z のみの関数である。また、熱力学変数 p, θ は静力学平衡成分と非静力学成分の線形結合で表現され、任意の熱力学変数を φ とすると、

$$\varphi(x, y, z, t) = \bar{\varphi}(z) + \varphi'(x, y, z, t)$$

と表現される。ここで、上線は静力学成分、プライムは非静力学成分をそれぞれ表す。CReSS では連続の式による密度の時間発展を計算しないので、ここでは連続の式として、非弾性近似：

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (4.3.71)$$

を採用する。

これらの方程式を用いて、EPV の収支式を導出する。まず、(4.3.68) の回転をとって、渦度方程式を導出すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) - \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) + \nabla \times \{ \mathbf{v} \times (2\boldsymbol{\Omega}) \} + \mathbf{k} \times \nabla B + \nabla \times \mathbf{F},$$

ここで、相対渦度として $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ を定義した。さらに、絶対渦度として $\boldsymbol{\omega}_a \equiv \nabla \times \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}$ を定義すると、惑星渦度は今時間変化しないので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_a) - \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) + \mathbf{k} \times \nabla B + \nabla \times \mathbf{F} \\ &= -\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_a (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &\quad - \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) + \mathbf{k} \times \nabla B + \nabla \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

となる^{*24}。両辺を ρ_0 で除すると、 ρ_0 は高度のみの変数であるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho_0} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}_a + \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\omega}_a (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_0} \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{k} \times \nabla B + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (4.3.72)$$

^{*23} これは CReSS において実際に考慮されている効果のみを採用したためである。

^{*24} ここで、 $\mathbf{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a) = 0$ であることに注意。

連続の式から

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{v}}{\rho_0^2} \cdot \nabla \rho_0 = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right)$$

なので、(4.3.72) 式右辺第 3 項をこれで書き換えて、第 1 項と 3 項をまとめると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_a + \frac{1}{\rho_0} \omega_a \cdot \nabla \mathbf{v} - \omega_a \left\{ \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\rho_0} \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{k} \times \nabla B + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \mathbf{F} \\ &= -\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) + \frac{1}{\rho_0} \omega_a \cdot \nabla \mathbf{v} \\ &\quad - \frac{1}{\rho_0} \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{k} \times \nabla B + \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (4.3.73)$$

一方、熱エネルギー方程式 (4.3.69) 式の空間勾配をとると、

$$\frac{\partial(\nabla \theta)}{\partial t} = -\nabla \{ \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \} + \nabla Q \quad (4.3.74)$$

なので、

$$(\nabla \theta) \cdot (4.3.73) + \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot (4.3.75)$$

を求めると、

$$\begin{aligned} (\nabla \theta) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) + \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot \frac{\partial(\nabla \theta)}{\partial t} &= -(\nabla \theta) \cdot \left\{ \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \right\} + \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot (\omega_a \cdot \nabla \mathbf{v}) \\ &\quad - \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) \right\} \\ &\quad + \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla B + \nabla \times \mathbf{F}) + \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot \nabla Q \\ &\quad - \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot [\nabla \{ \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \}] \\ &= -(\nabla \theta) \cdot \left\{ \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \right\} + \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot (\omega_a \cdot \nabla \mathbf{v}) \\ &\quad - \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) \right\} \\ &\quad + \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla B + \nabla \times \mathbf{F}) + \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot \nabla Q \\ &\quad - \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot \{ \mathbf{v} \cdot \nabla (\nabla \theta) \} - (\nabla \theta) \cdot \left\{ \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot \nabla \mathbf{v} \right\} \end{aligned}$$

となる。さらに、左辺 2 つの項はまとめられ、同様に右辺第 1, 6 項がまとめられ、2, 7

項が相殺されるので整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\nabla \theta) \cdot \frac{\omega_a}{\rho_0} \right\} = & -\mathbf{v} \cdot \nabla \left\{ (\nabla \theta) \cdot \frac{\omega_a}{\rho_0} \right\} \\ & - \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) \right\} \\ & + \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla B + \nabla \times \mathbf{F}) + \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot \nabla Q. \end{aligned} \quad (4.3.75)$$

右辺第 2 項は傾圧ベクトル、第 3 項丸括弧内 1 項目は浮力由来の効果を表すが、これらは以下の理由から近似的にゼロとなる。まず、 θ , ρ , p の熱力学変数間の関係は

$$\theta = \theta(\rho, p)$$

であるので、傾圧ベクトル項は

$$(\nabla \theta) \cdot \{(\nabla \rho) \times (\nabla p)\} = 0$$

が恒等的に成り立つ。しかし、今 ρ は静力学平衡場 ρ_0 で表されるため、(4.3.75) の傾圧ベクトルは

$$\begin{aligned} -\frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) \right\} &= \frac{(\nabla \theta)}{\rho_0^2} \cdot \{(\nabla \rho_0) \times (\nabla p)\} \\ &= \frac{\nabla(\bar{\theta} + \theta')}{\rho_0^2} \cdot \{(\nabla \rho_0) \times (\nabla(\bar{p} + p'))\} \\ &= \frac{(\nabla \bar{\theta})}{\rho_0^2} \cdot \{(\nabla \rho_0) \times (\nabla \bar{p})\} + \frac{(\nabla \bar{\theta})}{\rho_0^2} \cdot \{(\nabla \rho_0) \times (\nabla p')\} \\ &\quad + \frac{(\nabla \theta')}{\rho_0^2} \cdot \{(\nabla \rho_0) \times (\nabla \bar{p})\} + \frac{(\nabla \theta')}{\rho_0^2} \cdot \{(\nabla \rho_0) \times (\nabla p')\} \end{aligned}$$

となる。ベクトル三重積の等価公式：

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

と静力学平衡変数の空間勾配ベクトル同士のベクトル積はゼロである^{*25}ということを用いると、傾圧ベクトルは

$$-\frac{(\nabla \theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \times (\nabla p) \right\} = \frac{(\nabla \theta')}{\rho_0^2} \cdot \{(\nabla \rho_0) \times (\nabla p')\}$$

に帰着される。静力学場の項の大きさを $O(1)$ 、非静力学場の項の大きさを $O(\varepsilon)$ としたとき、この傾圧ベクトルの残差による効果は $O(\varepsilon^2)$ の大きさとなるので、支配項よりはるかに小さいとして無視できる。

浮力の効果については、

$$B \approx g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}} = g \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1 \right)$$

^{*25}なぜなら、これらの空間勾配ベクトルは鉛直成分しか持たないからである。

なので^{*26}、EPV 収支式における浮力の効果は厳密に

$$\begin{aligned}
 \frac{(\nabla\theta)}{\rho_0} \cdot (\mathbf{k} \times \nabla B) &\approx g \frac{(\nabla\theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \mathbf{k} \times \nabla \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right\} \\
 &= g \frac{(\nabla\theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \mathbf{k} \times \left(\frac{1}{\bar{\theta}} \nabla\theta - \frac{\theta}{\bar{\theta}^2} \nabla\bar{\theta} \right) \right\} \\
 &= g \frac{(\nabla\theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \mathbf{k} \times \left(\frac{1}{\bar{\theta}} \nabla\theta - \frac{\theta}{\bar{\theta}^2} \nabla\bar{\theta} \right) \right\} \\
 &= g \frac{(\nabla\theta)}{\rho_0} \cdot \left\{ \frac{1}{\bar{\theta}} \mathbf{k} \times (\nabla\theta) - \frac{\theta}{\bar{\theta}^2} \mathbf{k} \times (\nabla\bar{\theta}) \right\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。中括弧内第 1 項はベクトル三重積の等価性を、第 2 項は静力学場の空間勾配が鉛直成分のみ持つことを用いた。

これらを用いると、(4.3.75) 式は

$$\frac{\partial PV}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla PV + \frac{(\nabla\theta)}{\rho_0} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) + \left(\frac{\omega_a}{\rho_0} \right) \cdot \nabla Q. \quad (4.3.76)$$

ここで、EPV として

$$PV \equiv \left\{ (\nabla\theta) \cdot \frac{\omega_a}{\rho_0} \right\}$$

を定義した。これが CReSS における EPV の収支式となる。

^{*26}実際のモデル方程式は密度を用いて浮力が定義されている。そのため、ここでは B に近似記号を付してある。

第5章 付録

Ver.1.0.0.0 で完成予定. 現在必要不可欠なもののみ掲載.

5.1 ellip_slv の付録

5.1.1 境界条件の設定

各楕円型方程式の求積ルーチンには, 境界条件設定引数 `bound` があるが, この引数は文字型であり, 各文字に数字を代入することで計算領域境界の境界条件を指定することができる.

2 次元ルーチンの場合

引数 `bound` は 4 文字であり, 各文字は図 5.1 の左のような順番で設定される.

3 次元ルーチンの場合

引数 `bound` は 6 文字であり, 各文字は図 5.1 の右のような順番で設定される.

5.1.2 2 次元楕円型方程式の求解法

ここでは, 2 次元デカルト座標系における楕円型方程式の離散化を定式化する. 基礎となる方程式は以下である.

$$a(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y) \psi = \rho(x, y). \quad (5.1.1)$$

ここで, x, y は座標変数, $\psi = \psi(x, y)$ は求める解, $\rho(x, y)$ はポアソン方程式の強制, a, b, c, d, e, f は各係数である. ルーチンでは, これらの係数を引数として与えることで, 計算したい方程式系を陽に指定することができるようにしてある. 以下の離散化において,

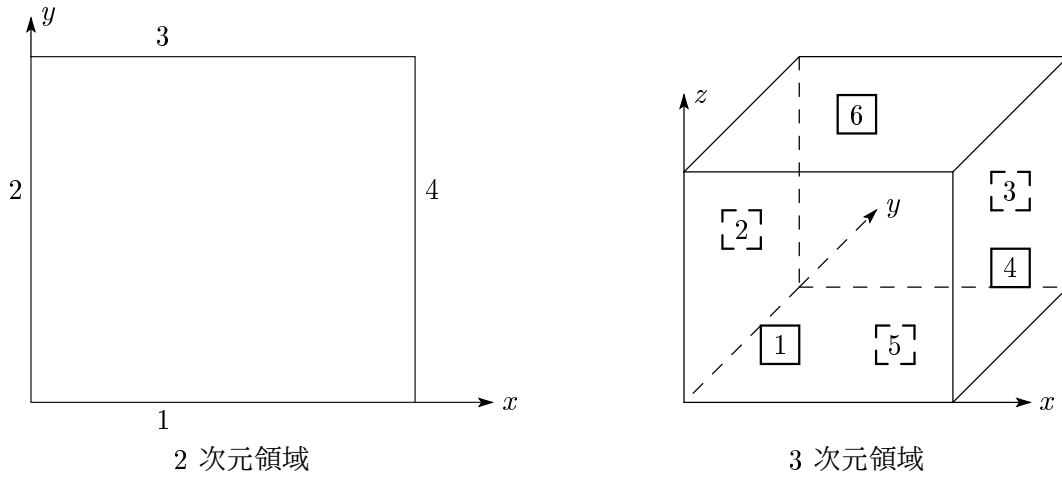


図 5.1: Ellip.Slv の各ルーチンにおける境界条件の順番. 左が 2 次元版, 右が 3 次元版を表し, 数値が引数 **bound** の何文字目に相当するかを表している.

x, y 方向の離散要素をそれぞれ i, j とする. また, 各微分は 2 次精度の中心差分スキームを用いて評価することにする. このとき, 各項を離散化すると,

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= h_{i,j} \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j}}{\Delta x^2}, \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - (\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1}) \} \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j}}{\Delta y^2}, \\
 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y}
 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

となる. ここで, h は任意のスカラー変数であり, 微分に係る係数, 強制項はすべてこれで評価した. また, 微分のクロスタームについては,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right)
 \end{aligned}$$

という過程を経て計算したものである。なお、本ルーチンは不等間隔座標にも対応しており、実際の計算では

$$\Delta x = \Delta x_i = 0.5 \times (x_{i+1} - x_{i-1}), \quad \Delta y = \Delta y_j = 0.5 \times (y_{j+1} - y_{j-1})$$

という計算を行っている。(5.1.2) 式を用いると、(5.1.1) 式は

$$\begin{aligned} & a_{i,j} \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j}}{\Delta x^2} \\ & + b_{i,j} \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - (\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1})\} \\ & + c_{i,j} \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j}}{\Delta y^2} \\ & + d_{i,j} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ & + e_{i,j} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ & + f_{i,j} \psi_{i,j} \\ & = \rho_{i,j}. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

となる。これを、反復法が使える形に直すと、

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} = & \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \times \\ & \left[\psi_{i+1,j} \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j}}{2\Delta x} \right) + \psi_{i,j+1} \left(\frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} + \frac{e_{i,j}}{2\Delta y} \right) \right. \\ & + \psi_{i-1,j} \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{d_{i,j}}{2\Delta x} \right) + \psi_{i,j-1} \left(\frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{e_{i,j}}{2\Delta y} \right) \\ & + \frac{b_{i,j}}{4\Delta x \Delta y} \{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - (\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1})\} \\ & \left. - \rho_{i,j} \right] \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

となる。実際の計算では、領域内部については、

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} = & ADP_{i,j} \psi_{i+1,j} + CEP_{i,j} \psi_{i,j+1} + ADM_{i,j} \psi_{i-1,j} + CEM_{i,j} \psi_{i,j-1} \\ & + BT_{i,j} \{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - (\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1})\} \\ & - AC_{i,j} \rho_{i,j} \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

という式を用いて計算を行っている。ここで、

$$\begin{aligned} ADP_{i,j} & \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j}}{2\Delta x} \right), \\ ADM_{i,j} & \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{d_{i,j}}{2\Delta x} \right), \\ CEP_{i,j} & \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \left(\frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} + \frac{e_{i,j}}{2\Delta y} \right), \end{aligned}$$

$$CEM_{i,j} \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \left(\frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{e_{i,j}}{2\Delta y} \right),$$

$$BT_{i,j} \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1} \frac{b_{i,j}}{4\Delta x \Delta y},$$

$$AC_{i,j} \equiv \left\{ 2 \left(\frac{a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j}}{\Delta y^2} \right) - f_{i,j} \right\}^{-1}$$

である^{*1}。

次に、境界条件について述べる。本ルーチンでは境界条件は以下の 3 種類をサポートしている。

- ディレクレ条件（固定端条件）
- ノイマン条件（自由端条件）
- 周期境界条件

このうち、周期境界条件は計算領域の外側でしか設定できない。他 2 つの境界条件については、内部境界条件において設定することができる。ポアソン方程式計算用ルーチンのオプション引数 `inner_bound` は内部に境界が存在する場合、その境界点を数値によって設定するための引数である。図??には、内部領域が存在するときに `inner_bound` を設定すべき格子点の例が示されている。図のうち、黒点が各格子点である。このとき、網掛けのような形の内部境界が存在するとき、細い丸で囲まれた格子点が `inner_bound` に境界条件を設定しなければならない点である^{*2}。また、太い丸で囲まれた格子点は反復計算を行わないことを示す値 (10) が代入されなければならない。この引数に設定可能な境界条件とそれに対応する値は以下に限られる。

^{*1}この形にしておけば係数部分は反復法の外側ループで計算することができる。

^{*2}ただし、計算領域の外縁境界は別の引数 `bound` で設定されている値を自動的に代入処理するので、ユーザが陽に指定する必要はない。

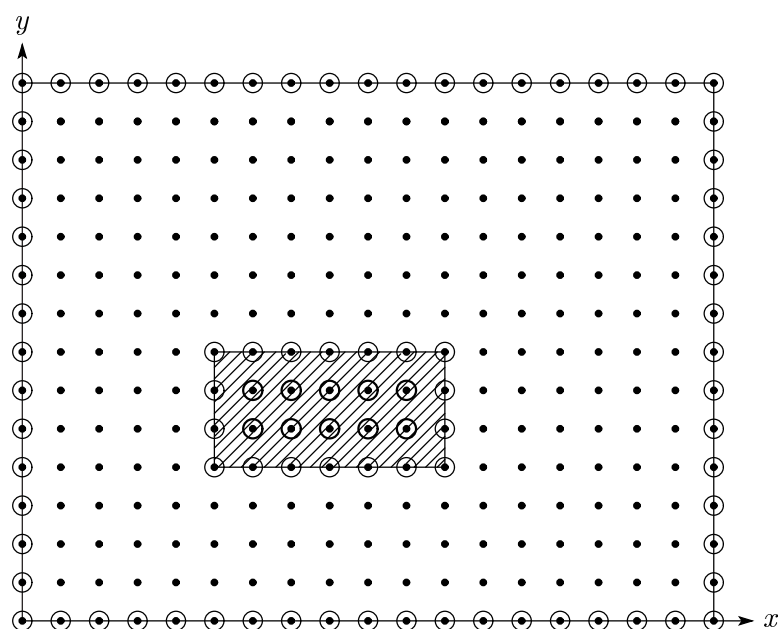


図 5.2: `inner_bound` で設定される格子点。

内部境界として設定できる値

設定値 0 計算領域。

設定値 1 固定端条件。

設定値 3 周期境界条件

設定値 10 内部境界領域内。この格子点では反復計算を行わない。

以下は自由境界条件である。

| 設定値 | 境界 (i, j) に対する参照格子点 | 対応する図 |
|-----|------------------------|------------|
| 2 | (i + 1, j) | 図 5.3 の 1 |
| -2 | (i - 1, j) | 図 5.3 の 2 |
| 4 | (i, j + 1) | 図 5.3 の 3 |
| -4 | (i, j - 1) | 図 5.3 の 4 |
| 8 | (i + 1, j + 1) | 図 5.3 の 5 |
| 8 | (i - 1, j - 1) | 図 5.3 の 8 |
| -8 | (i + 1, j - 1) | 図 5.3 の 6 |
| -8 | (i - 1, j + 1) | 図 5.3 の 7 |
| 7 | (i - 1, j), (i, j - 1) | 図 5.3 の 9 |
| 7 | (i + 1, j), (i, j + 1) | 図 5.3 の 12 |
| -7 | (i + 1, j), (i, j - 1) | 図 5.3 の 10 |
| -7 | (i - 1, j), (i, j + 1) | 図 5.3 の 11 |

このとき、ある境界点 (i, j) の応答の値 $\psi_{i,j}$ を求める式はそれぞれ、以下のようになる：

設定値 1

$$\psi_{i,j} = f_{i,j}$$

設定値 3

$$\psi_{i,j} = \begin{cases} \psi_{nx-1,j}, & (i = 1) \\ \psi_{2,j}, & (i = nx) \\ \psi_{i,ny-1}, & (j = 1) \\ \psi_{i,2}, & (j = ny) \end{cases}$$

ここでは、線上境界における式を表記しているが、点上境界 (隅の点) においても適切な境界値が設定される。そのような他の面の境界と接する点では、先に示した境界条件の優先順位に従って境界値が決定される。例えば、隣接 2 面が固定境界と周期境界で設定されている場合、固定境界として値が設定される。

設定値 2(図 5.3 の 1)

$$\psi_{i,j} = \psi_{i+1,j} - f_{i,j} \times \Delta x$$

設定値 -2(図 5.3 の 2)

$$\psi_{i,j} = \psi_{i-1,j} + f_{i,j} \times \Delta x$$

設定値 4(図 5.3 の 3)

$$\psi_{i,j} = \psi_{i,j+1} - f_{i,j} \times \Delta y$$

設定値 -4(図 5.3 の 4)

$$\psi_{i,j} = \psi_{i,j-1} + f_{i,j} \times \Delta y$$

設定値 8(図 5.3 の 5, 8)

- 5 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} \times \Delta y\} + \{\psi_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i+1,j+1} - \frac{1}{2} [f_{i+1,j} \times \Delta y + f_{i,j+1} \times \Delta x]\end{aligned}$$

- 8 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j-1} + f_{i-1,j} \times \Delta y\} + \{\psi_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i-1,j-1} + \frac{1}{2} [f_{i-1,j} \times \Delta y + f_{i,j-1} \times \Delta x]\end{aligned}$$

設定値 -8(図 5.3 の 6, 7)

- 6 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j+1} - f_{i-1,j} \times \Delta y\} + \{\psi_{i-1,j+1} + f_{i,j+1} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i-1,j+1} + \frac{1}{2} [-f_{i-1,j} \times \Delta y + f_{i,j+1} \times \Delta x]\end{aligned}$$

- 7 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j-1} + f_{i+1,j} \times \Delta y\} + \{\psi_{i+1,j-1} - f_{i,j-1} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i+1,j-1} + \frac{1}{2} [f_{i+1,j} \times \Delta y - f_{i,j-1} \times \Delta x]\end{aligned}$$

設定値 7(図 5.3 の 9, 12)

- 9 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j+1} + f_{i,j+1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i+1,j-1} + f_{i+1,j} \times \Delta y\}] \\ &= \frac{1}{2} [\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1}] + \frac{1}{2} [f_{i,j+1} \times \Delta x + f_{i+1,j} \times \Delta y]\end{aligned}$$

- 12 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j-1} - f_{i,j-1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i-1,j+1} - f_{i-1,j} \times \Delta y\}] \\ &= \frac{1}{2} [\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j+1}] - \frac{1}{2} [f_{i,j-1} \times \Delta x + f_{i-1,j} \times \Delta y]\end{aligned}$$

設定値 -7(図 5.3 の 10, 11)

- 10 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i-1,j-1} + f_{i-1,j} \times \Delta y\}] \\ &= \frac{1}{2} [\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}] + \frac{1}{2} [-f_{i,j+1} \times \Delta x + f_{i-1,j} \times \Delta y]\end{aligned}$$

- 11 の場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i+1,j+1} - f_{i+1,j} \times \Delta y\}] \\ &= \frac{1}{2} [\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j+1}] + \frac{1}{2} [f_{i,j-1} \times \Delta x - f_{i+1,j} \times \Delta y]\end{aligned}$$

ここで、 $f_{i,j}$ は `bound_opt` で指定される値である。この境界値は設定される境界条件によって果たす役割が異なる。固定端境界のときはそのまま境界値を表し、自由端境界のときは、境界での勾配値を表す。このとき、勾配は必ず正の方向に計算されることに注意。特に自由端境界は複雑であるので、図 5.3 に概念図を示す。

なお、計算領域の隅および、内部領域の隅は上もしくは下、および左もしくは右で 2 通りの境界条件が設定されている。その場合、適用される境界条件の優先度は

$$1 > 3 > \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

である。つまり、固定端境界がもっとも優先度が高い^{*3}。

5.1.3 3 次元楕円型方程式の求解法

ここでは、3 次元デカルト座標系における楕円型方程式の離散化を定式化する。基礎となる方程式は以下である。

$$\begin{aligned}& X(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Y(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + Z(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ & + a(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + b(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + c(x, y, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \\ & + d(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + e(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial y} + f(x, y, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + g(x, y, z) \psi(x, y, z) \\ & = \rho(x, y, z).\end{aligned}\tag{5.1.6}$$

^{*3}例えば、領域の左端点は右隣の点と上隣の点の境界条件によって変化する。もし右隣が固定端で上隣が自由端であるなら、左下点は固定端条件として計算される。

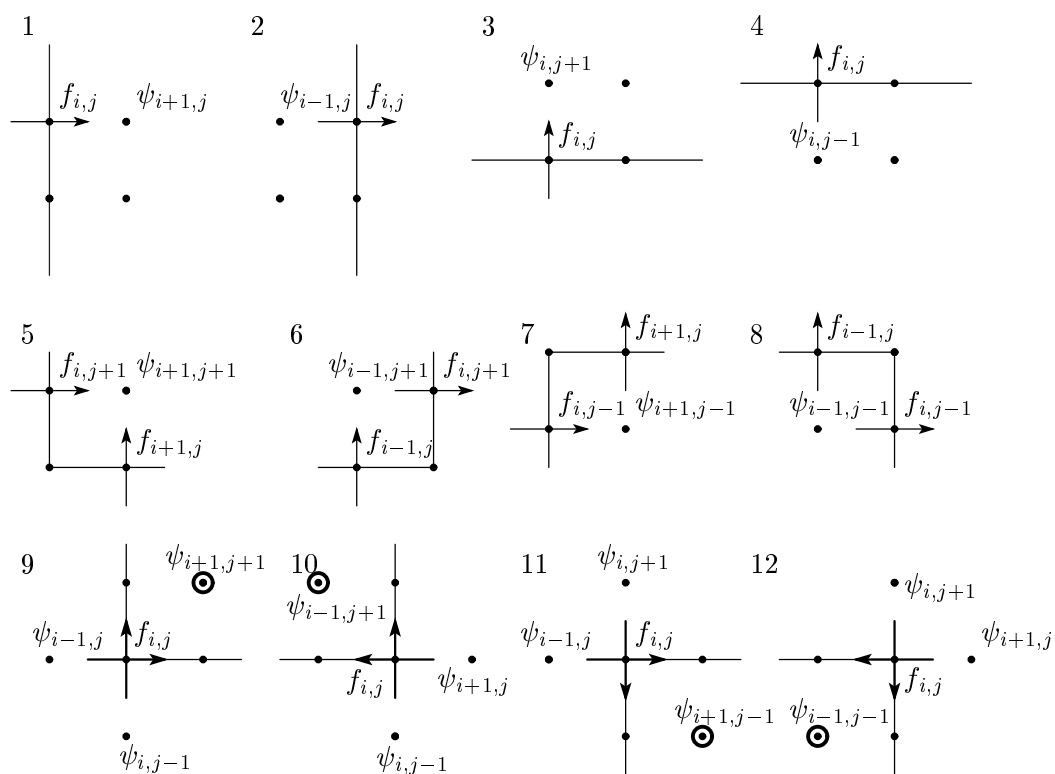


図 5.3: 本ルーチンでサポートされている自由端境界条件。1-8 は格子点 (i, j) における値をその点で設定された境界値 `bound_opt` と隣接点 ψ から求める種類。矢印は定義される勾配の向き。9-12 は内部未定義領域がある場合の境界計算。黒線で縁取られた点は未定義領域。

ここで、 x, y, z は座標変数、 $\psi = \psi(x, y, z)$ は求める解、 $\rho(x, y, z)$ はポアソン方程式の強制、 $X, Y, Z, a, b, c, d, e, f, g$ は各係数である。ルーチンでは、これらの係数を引数として与えることで、計算したい方程式系を陽に指定することができるようにしてある。以下の離散化において、 x, y, z 方向の離散要素をそれぞれ i, j, k とする。また、各微分は 2 次精度の中心差分スキームを用いて評価することにする。このとき、各項を離散化すると、

$$\begin{aligned}
 h(x, y, z) &= h_{i,j,k} \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\psi_{i+1,j,k} + \psi_{i-1,j,k} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta x^2}, \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\psi_{i,j+1,k} + \psi_{i,j-1,k} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta y^2}, \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{\psi_{i,j,k+1} + \psi_{i,j,k-1} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta z^2}, \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ \psi_{i+1,j+1,k} + \psi_{i-1,j-1,k} - (\psi_{i-1,j+1,k} + \psi_{i+1,j-1,k}) \} \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{4\Delta y \Delta z} \{ \psi_{i,j+1,k+1} + \psi_{i,j-1,k-1} - (\psi_{i,j+1,k-1} + \psi_{i,j-1,k+1}) \} \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} &= \frac{1}{4\Delta z \Delta x} \{ \psi_{i+1,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k-1} - (\psi_{i-1,j,k+1} + \psi_{i+1,j,k-1}) \} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\psi_{i,j+1,k} - \psi_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\psi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k-1}}{2\Delta z}
 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

となる。ここで、 h は任意のスカラー変数であり、微分に係る係数、強制項はすべてこれで評価した。また、微分のクロスタームについては以下、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right)
 \end{aligned}$$

という過程を経て計算したものである^{*4}。なお、本ルーチンは不等間隔座標にも対応しており、実際の計算では

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= \Delta x_i = 0.5 \times (x_{i+1} - x_{i-1}), \\
 \Delta y &= \Delta y_j = 0.5 \times (y_{j+1} - y_{j-1}), \\
 \Delta z &= \Delta z_k = 0.5 \times (z_{k+1} - z_{k-1})
 \end{aligned}$$

^{*4}他のクロスタームについても同様の計算を行う。

という計算を行っている。(5.1.7) 式を用いると、(5.1.6) 式は

$$\begin{aligned}
& X_{i,j,k} \frac{\psi_{i+1,j,k} + \psi_{i-1,j,k} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta x^2} \\
& + Y_{i,j,k} \frac{\psi_{i,j+1,k} + \psi_{i,j-1,k} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta y^2} \\
& + Z_{i,j,k} \frac{\psi_{i,j,k+1} + \psi_{i,j,k-1} - 2\psi_{i,j,k}}{\Delta z^2} \\
& + a_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ \psi_{i+1,j+1,k} + \psi_{i-1,j-1,k} - (\psi_{i-1,j+1,k} + \psi_{i+1,j-1,k}) \} \\
& + b_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta y \Delta z} \{ \psi_{i,j+1,k+1} + \psi_{i,j-1,k-1} - (\psi_{i,j+1,k-1} + \psi_{i,j-1,k+1}) \} \\
& + c_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta z \Delta x} \{ \psi_{i+1,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k-1} - (\psi_{i-1,j,k+1} + \psi_{i+1,j,k-1}) \} \\
& + d_{i,j,k} \frac{\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \\
& + e_{i,j,k} \frac{\psi_{i,j+1,k} - \psi_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \\
& + f_{i,j,k} \frac{\psi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \\
& + g_{i,j,k} \psi_{i,j,k} \\
& = \rho_{i,j,k}.
\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

となる。これを、反復法が使える形に直すと、

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} = & \left\{ 2 \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) - g_{i,j,k} \right\}^{-1} \times \\
& \left[\psi_{i+1,j,k} \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j,k}}{2\Delta x} \right) + \psi_{i-1,j,k} \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{d_{i,j,k}}{2\Delta x} \right) \right. \\
& + \psi_{i,j+1,k} \left(\frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{e_{i,j,k}}{2\Delta y} \right) + \psi_{i,j-1,k} \left(\frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{e_{i,j,k}}{2\Delta y} \right) \\
& + \psi_{i,j,k+1} \left(\frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} + \frac{f_{i,j,k}}{2\Delta z} \right) + \psi_{i,j,k-1} \left(\frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{f_{i,j,k}}{2\Delta z} \right) \\
& + a_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ \psi_{i+1,j+1,k} + \psi_{i-1,j-1,k} - (\psi_{i-1,j+1,k} + \psi_{i+1,j-1,k}) \} \\
& + b_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta y \Delta z} \{ \psi_{i,j+1,k+1} + \psi_{i,j-1,k-1} - (\psi_{i,j+1,k-1} + \psi_{i,j-1,k+1}) \} \\
& + c_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta z \Delta x} \{ \psi_{i+1,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k-1} - (\psi_{i-1,j,k+1} + \psi_{i+1,j,k-1}) \} \\
& \left. - \rho_{i,j,k} \right]
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

となる。実際の計算では、領域内部については、

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} = & XDP_{i,j,k}\psi_{i+1,j,k} + YEP_{i,j,k}\psi_{i,j+1,k} + ZFP_{i,j,k}\psi_{i,j,k+1} \\
& + XDM_{i,j,k}\psi_{i-1,j,k} + YEM_{i,j,k}\psi_{i,j-1,k} + ZFM_{i,j,k}\psi_{i,j,k-1} \\
& + AT_{i,j,k}\{\psi_{i+1,j+1,k} + \psi_{i-1,j-1,k} - (\psi_{i-1,j+1,k} + \psi_{i+1,j-1,k})\} \\
& + BT_{i,j,k}\{\psi_{i,j+1,k+1} + \psi_{i,j-1,k-1} - (\psi_{i,j+1,k-1} + \psi_{i,j-1,k+1})\} \\
& + CT_{i,j,k}\{\psi_{i+1,j,k+1} + \psi_{i-1,j,k-1} - (\psi_{i-1,j,k+1} + \psi_{i+1,j,k-1})\} \\
& - XYZ_{i,j,k}\rho_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

という式を用いて計算を行っている。ここで、

$$\begin{aligned}
XYZ_{i,j,k} & \equiv \left\{ 2 \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) - g_{i,j,k} \right\}^{-1} \\
XDP_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{d_{i,j,k}}{2\Delta x} \right), \\
XDM_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{X_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{d_{i,j,k}}{2\Delta x} \right), \\
YEP_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{e_{i,j,k}}{2\Delta y} \right), \\
YEM_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{Y_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{e_{i,j,k}}{2\Delta y} \right), \\
ZFP_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} + \frac{f_{i,j,k}}{2\Delta z} \right), \\
ZFM_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \left(\frac{Z_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{f_{i,j,k}}{2\Delta z} \right), \\
AT_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta x \Delta y}, \\
BT_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta y \Delta z}, \\
CT_{i,j,k} & \equiv XYZ_{i,j,k} \frac{1}{4\Delta z \Delta x},
\end{aligned}$$

である。

次に、境界条件について述べる。本ルーチンでは境界条件は以下の 3 種類をサポートしている。

- ディレクレ条件（固定端条件）
- ノイマン条件（自由端条件）
- 周期境界条件

このうち、周期境界条件は計算領域の外側でしか設定できない。他 2 つの境界条件については、内部境界条件において設定することができる。ポアソン方程式計算用ルーチンのオプション引数 `inner_bound` は内部に境界が存在する場合、その境界点を数値によって設定するための引数である。この引数に設定可能な境界条件とそれに対応する値は以下に限られる。

—— 内部境界として設定できる値 (その 1) ——

以下には、境界条件として設定できる値のうち、自由境界条件以外を示す。

設定値 0 計算領域。

設定値 1 固定端条件。

設定値 3 周期境界条件

設定値 10 内部境界領域内。この格子点では反復計算を行わない。

— 内部境界として設定できる値 (その 2) —

以下には, 境界条件として設定できる値のうち, 境界格子が面上 (隣接 8 点が全て同一面内に存在) と边上 (隣接 2 点が全て同一線内に存在) で設定可能な自由境界条件の詳細を示す.

面上設定値

| 設定値 | 境界 (i, j, k) に対する参照格子点 (i, j, k) | 対応する図 |
|-----|--------------------------------------|-----------|
| 2 | $(i + 1, j, k)$ | 図 5.3 の 1 |
| -2 | $(i - 1, j, k)$ | 図 5.3 の 2 |
| 4 | $(i, j + 1, k)$ | 図 5.3 の 3 |
| -4 | $(i, j - 1, k)$ | 図 5.3 の 4 |
| 6 | $(i, j, k + 1)$ | 参照図なし |
| -6 | $(i, j, k - 1)$ | 参照図なし |

边上設定値

| 設定値 | 境界 (i, j, k) に対する参照格子点 (i, j, k) | 対応する図 |
|-----|--------------------------------------|-----------|
| 8 | $(i + 1, j + 1, k)$ | 図 5.3 の 5 |
| 8 | $(i - 1, j - 1, k)$ | 図 5.3 の 8 |
| -8 | $(i + 1, j - 1, k)$ | 図 5.3 の 6 |
| -8 | $(i - 1, j + 1, k)$ | 図 5.3 の 7 |
| 12 | $(i + 1, j, k + 1)$ | 参照図なし |
| 12 | $(i - 1, j, k - 1)$ | 参照図なし |
| -12 | $(i + 1, j, k - 1)$ | 参照図なし |
| -12 | $(i - 1, j, k + 1)$ | 参照図なし |
| 24 | $(i, j + 1, k + 1)$ | 参照図なし |
| 24 | $(i, j - 1, k - 1)$ | 参照図なし |
| -24 | $(i, j + 1, k - 1)$ | 参照図なし |
| -24 | $(i, j - 1, k + 1)$ | 参照図なし |

— 内部境界として設定できる値 (その 3) —

以下には, 境界条件として設定できる値のうち, 境界格子が点 (計算領域の隅) で設定可能な自由境界条件の詳細を示す.

| 設定値 | 境界 (i, j, k) に対する参照格子点 (i, j, k) | 対応する図 |
|-----|----------------------------------|-----------|
| 11 | (i + 1, j + 1, k + 1) | 図 5.4 の 1 |
| 13 | (i - 1, j + 1, k + 1) | 図 5.4 の 2 |
| 17 | (i + 1, j - 1, k + 1) | 図 5.4 の 3 |
| 19 | (i - 1, j - 1, k + 1) | 図 5.4 の 4 |
| 23 | (i + 1, j + 1, k - 1) | 図 5.4 の 5 |
| 29 | (i - 1, j + 1, k - 1) | 図 5.4 の 6 |
| 31 | (i + 1, j - 1, k - 1) | 図 5.4 の 7 |
| 37 | (i - 1, j - 1, k - 1) | 図 5.4 の 8 |

| 設定値 | 境界 (i, j, k) に対する未定義点 (i, j, k) | 対応する図 |
|-----|---------------------------------|-----------|
| -11 | (i + 1, j + 1, k + 1) | 図 5.5 の 1 |
| -13 | (i - 1, j + 1, k + 1) | 図 5.5 の 2 |
| -17 | (i + 1, j - 1, k + 1) | 図 5.5 の 3 |
| -19 | (i - 1, j - 1, k + 1) | 図 5.5 の 4 |
| -23 | (i + 1, j + 1, k - 1) | 図 5.5 の 5 |
| -29 | (i - 1, j + 1, k - 1) | 図 5.5 の 6 |
| -31 | (i + 1, j - 1, k - 1) | 図 5.5 の 7 |
| -37 | (i - 1, j - 1, k - 1) | 図 5.5 の 8 |

このとき, ある境界点 (i, j) の応答の値 $\psi_{i,j,k}$ を求める式はそれぞれ, 以下のようになる:

設定値 1

$$\psi_{i,j,k} = f_{i,j,k}$$

設定値 3

$$\psi_{i,j,k} = \begin{cases} \psi_{nx-1,j,k}, & (i = 1) \\ \psi_{2,j,k}, & (i = nx) \\ \psi_{i,ny-1,k}, & (j = 1) \\ \psi_{i,2,k}, & (j = ny) \\ \psi_{i,j,nz-1}, & (k = 1) \\ \psi_{i,j,2}, & (k = nz) \end{cases}$$

ここでは, 面上境界における式を表記しているが, 辺上境界, 点上境界 (隅の点) においても適切な境界値が設定される. そのような他の面の境界と接する点では, 先に示した境界条件の優先順位に従って境界値が決定される. 例えば, 隣接 2 面が固定境界と周期境界で設定されている場合, 固定境界として値が設定される.

設定値 2(図 5.3 の 1)

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i+1,j,k} - f_{i,j,k} \times \Delta x$$

設定値 -2(図 5.3 の 2)

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i-1,j,k} + f_{i,j,k} \times \Delta x$$

設定値 4(図 5.3 の 3)

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i,j+1,k} - f_{i,j,k} \times \Delta y$$

設定値 -4(図 5.3 の 4)

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i,j-1,k} + f_{i,j,k} \times \Delta y$$

設定値 6

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i,j,k+1} - f_{i,j,k} \times \Delta z$$

設定値 -6

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i,j,k-1} + f_{i,j,k} \times \Delta z$$

設定値 8(図 5.3 の 5, 8)

- 5 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j+1,k} - f_{i+1,j,k} \times \Delta y\} + \{\psi_{i+1,j+1,k} - f_{i,j+1,k} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i+1,j+1,k} - \frac{1}{2} [f_{i+1,j,k} \times \Delta y + f_{i,j+1,k} \times \Delta x] \end{aligned}$$

- 8 の場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j-1,k} + f_{i-1,j,k} \times \Delta y\} + \{\psi_{i-1,j-1,k} + f_{i,j-1,k} \times \Delta x\}] \\ &= \psi_{i-1,j-1,k} + \frac{1}{2} [f_{i-1,j,k} \times \Delta y + f_{i,j-1,k} \times \Delta x] \end{aligned}$$

設定値 12

- 設定値 8(図 5.3 の 5) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j,k+1} - f_{i,j,k+1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i+1,j,k+1} - f_{i+1,j,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i+1,j,k+1} - \frac{1}{2} [f_{i,j,k+1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k} \times \Delta z] \end{aligned}$$

- 設定値 8(図 5.3 の 8) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j,k-1} + f_{i,j,k-1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i-1,j,k-1} + f_{i-1,j,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i-1,j,k-1} + \frac{1}{2} [f_{i,j,k-1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k} \times \Delta z] \end{aligned}$$

設定値 -12

- 設定値 8(図 5.3 の 6) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i+1,j,k-1} - f_{i,j,k-1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i+1,j,k-1} + f_{i+1,j,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i+1,j,k-1} + \frac{1}{2} [-f_{i,j,k-1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

- 設定値 8(図 5.3 の 7) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i-1,j,k+1} + f_{i,j,k+1} \times \Delta x\} + \{\psi_{i-1,j,k+1} - f_{i-1,j,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i-1,j,k+1} + \frac{1}{2} [f_{i,j,k+1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

設定値 24

- 設定値 8(図 5.3 の 5) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i,j+1,k+1} - f_{i,j,k+1} \times \Delta y\} + \{\psi_{i,j+1,k+1} - f_{i,j+1,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i,j+1,k+1} - \frac{1}{2} [f_{i,j,k+1} \times \Delta y + f_{i,j+1,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

- 設定値 8(図 5.3 の 8) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i,j-1,k-1} + f_{i,j,k-1} \times \Delta y\} + \{\psi_{i,j-1,k-1} + f_{i,j-1,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i,j-1,k-1} + \frac{1}{2} [f_{i,j,k-1} \times \Delta y + f_{i,j-1,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

設定値 -24

- 設定値 8(図 5.3 の 6) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i,j-1,k+1} + f_{i,j,k+1} \times \Delta y\} + \{\psi_{i,j-1,k+1} - f_{i,j-1,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i,j-1,k+1} + \frac{1}{2} [f_{i,j,k+1} \times \Delta y - f_{i,j-1,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

- 設定値 8(図 5.3 の 7) と同じ組み合わせの場合 :

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{2} [\{\psi_{i,j+1,k-1} - f_{i,j,k-1} \times \Delta y\} + \{\psi_{i,j+1,k-1} + f_{i,j+1,k} \times \Delta z\}] \\ &= \psi_{i,j+1,k-1} + \frac{1}{2} [-f_{i,j,k-1} \times \Delta y + f_{i,j+1,k} \times \Delta z]\end{aligned}$$

設定値 11(図 5.4 の 1)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i+1,j+1,k+1} - \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 13(図 5.4 の 2)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j+1,k+1} + f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k+1} - f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k+1} - f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i-1,j+1,k+1} + \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y - f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 17(図 5.4 の 3)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j-1,k+1} - f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k+1} + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k+1} - f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i+1,j-1,k+1} + \frac{1}{3} [-f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y - f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 19(図 5.4 の 4)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j-1,k+1} + f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k+1} + f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k+1} - f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i-1,j+1,k+1} + \frac{1}{3} [f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y - f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 23(図 5.4 の 5)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j+1,k-1} - f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k-1} - f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k-1} + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i+1,j+1,k-1} + \frac{1}{3} [-f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x - f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 29(図 5.4 の 6)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j+1,k-1} + f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k-1} - f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k-1} + f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i-1,j+1,k-1} + \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y + f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 31(図 5.4 の 7)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j-1,k-1} - f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k-1} + f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k-1} + f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i+1,j-1,k-1} + \frac{1}{3} [-f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y + f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 37(図 5.4 の 8)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \psi_{i-1,j+1,k-1} + \frac{1}{3} [f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y + f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 -11(図 5.5 の 1)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j+1,k+1} + f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k+1} + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k-1} + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \frac{1}{3} [\psi_{i-1,j+1,k+1} + \psi_{i+1,j-1,k+1} + \psi_{i+1,j+1,k-1}] \\
 &\quad + \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 -13(図 5.5 の 2)

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x\} \\
&\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k+1} + f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
&\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k-1} + f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
&= \frac{1}{3} [\psi_{i+1,j+1,k+1} + \psi_{i-1,j-1,k+1} + \psi_{i-1,j+1,k-1}] \\
&\quad + \frac{1}{3} [-f_{i,j+1,k+1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z]
\end{aligned}$$

設定値 -17(図 5.5 の 3)

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j-1,k+1} + f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x\} \\
&\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
&\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k-1} + f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
&= \frac{1}{3} [\psi_{i-1,j-1,k+1} + \psi_{i+1,j+1,k+1} + \psi_{i+1,j-1,k-1}] \\
&\quad + \frac{1}{3} [f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x - f_{i+1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z]
\end{aligned}$$

設定値 -19(図 5.5 の 4)

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j-1,k+1} - f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x\} \\
&\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k+1} - f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y\} \\
&\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
&= \frac{1}{3} [\psi_{i+1,j-1,k+1} + \psi_{i-1,j+1,k+1} + \psi_{i-1,j-1,k-1}] \\
&\quad + \frac{1}{3} [-f_{i,j-1,k+1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k+1} \times \Delta y + f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z]
\end{aligned}$$

設定値 -23(図 5.5 の 5)

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j+1,k-1} + f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x\} \\
&\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k-1} + f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
&\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k+1} - f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
&= \frac{1}{3} [\psi_{i-1,j+1,k-1} + \psi_{i+1,j-1,k-1} + \psi_{i+1,j+1,k+1}] \\
&\quad + \frac{1}{3} [f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x + f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y - f_{i+1,j+1,k} \times \Delta z]
\end{aligned}$$

設定値 -29(図 5.5 の 6)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j+1,k-1} - f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k+1} - f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \frac{1}{3} [\psi_{i+1,j+1,k-1} + \psi_{i-1,j-1,k-1} + \psi_{i-1,j+1,k+1}] \\
 &\quad + \frac{1}{3} [-f_{i,j+1,k-1} \times \Delta x + f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y - f_{i-1,j+1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 -31(図 5.5 の 7)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i-1,j-1,k-1} + f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j+1,k-1} - f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i+1,j-1,k+1} - f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \frac{1}{3} [\psi_{i-1,j-1,k-1} + \psi_{i+1,j+1,k-1} + \psi_{i+1,j-1,k+1}] \\
 &\quad + \frac{1}{3} [f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x - f_{i+1,j,k-1} \times \Delta y - f_{i+1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

設定値 -37(図 5.5 の 8)

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,j,k} &= \frac{1}{3} [\{\psi_{i+1,j-1,k-1} - f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j+1,k-1} - f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y\} \\
 &\quad + \{\psi_{i-1,j-1,k+1} - f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z\}] \\
 &= \frac{1}{3} [\psi_{i+1,j-1,k-1} + \psi_{i-1,j+1,k-1} + \psi_{i-1,j-1,k+1}] \\
 &\quad + \frac{1}{3} [-f_{i,j-1,k-1} \times \Delta x - f_{i-1,j,k-1} \times \Delta y - f_{i-1,j-1,k} \times \Delta z]
 \end{aligned}$$

ここで、 $f_{i,j,k}$ は `bound_opt` で指定される値である。この境界値は設定される境界条件によって果たす役割が異なる。固定端境界のときはそのまま境界値を表し、自由端境界のときは、境界での勾配値を表す。このとき、勾配は必ず正の方向に計算されることに注意。

なお、計算領域の隅および、内部領域の隅は上もしくは下、および左もしくは右で 2 通りの境界条件が設定されている。その場合、適用される境界条件の優先度は

$$1 > 3 > \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

である。つまり、固定端境界がもっとも優先度が高い^{*5}。

^{*5}例えば、領域の左端点は右隣の点と上隣の点の境界条件によって変化する。もし右隣が固定端で上隣が自由端であるなら、左下点は固定端条件として計算される。

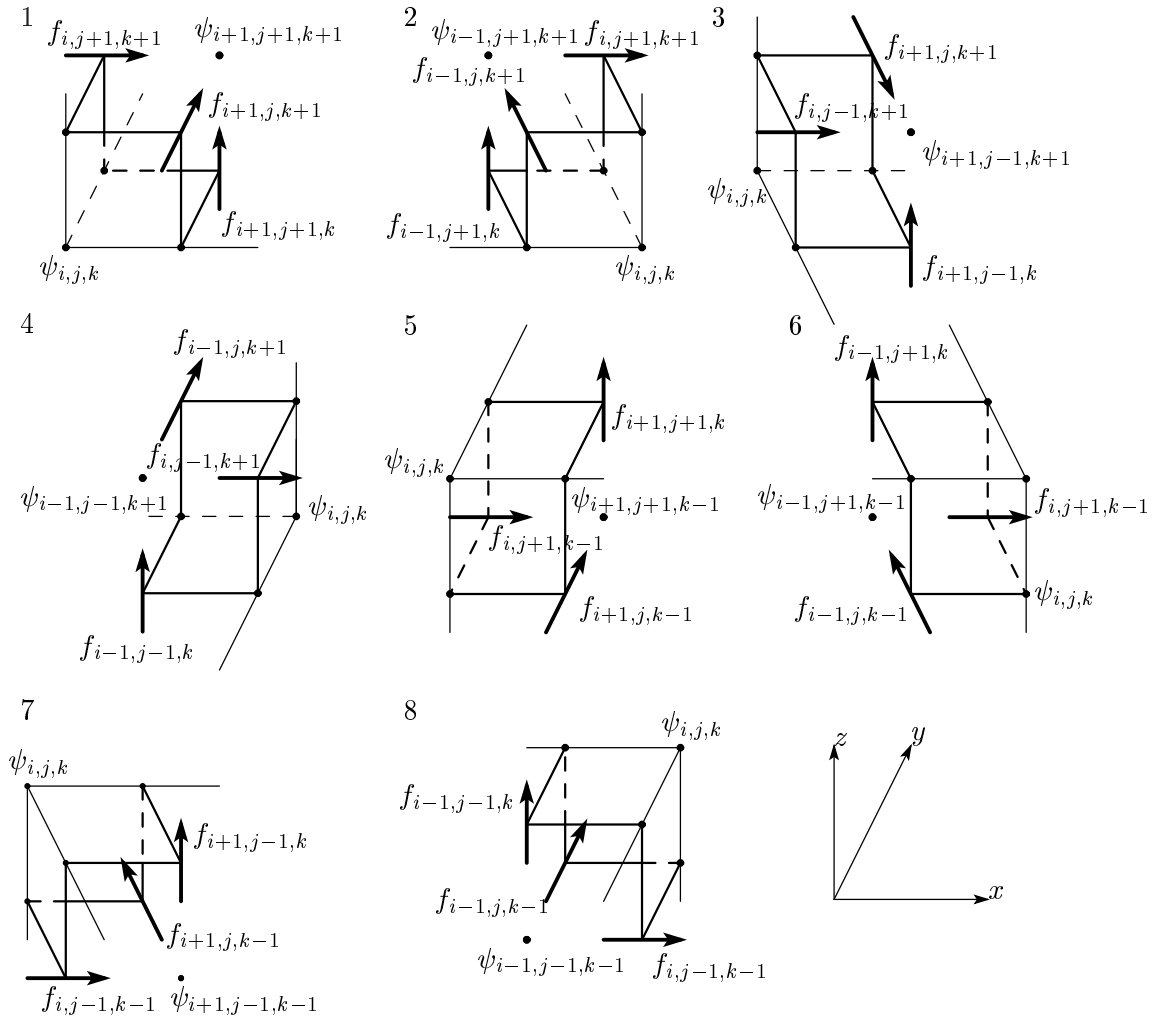


図 5.4: 本ルーチンでサポートされている自由端境界条件。格子点 (i, j, k) における値をその点で設定された境界値 `bound_opt` と隣接点 ψ から求める種類。矢印は定義される勾配の向き。

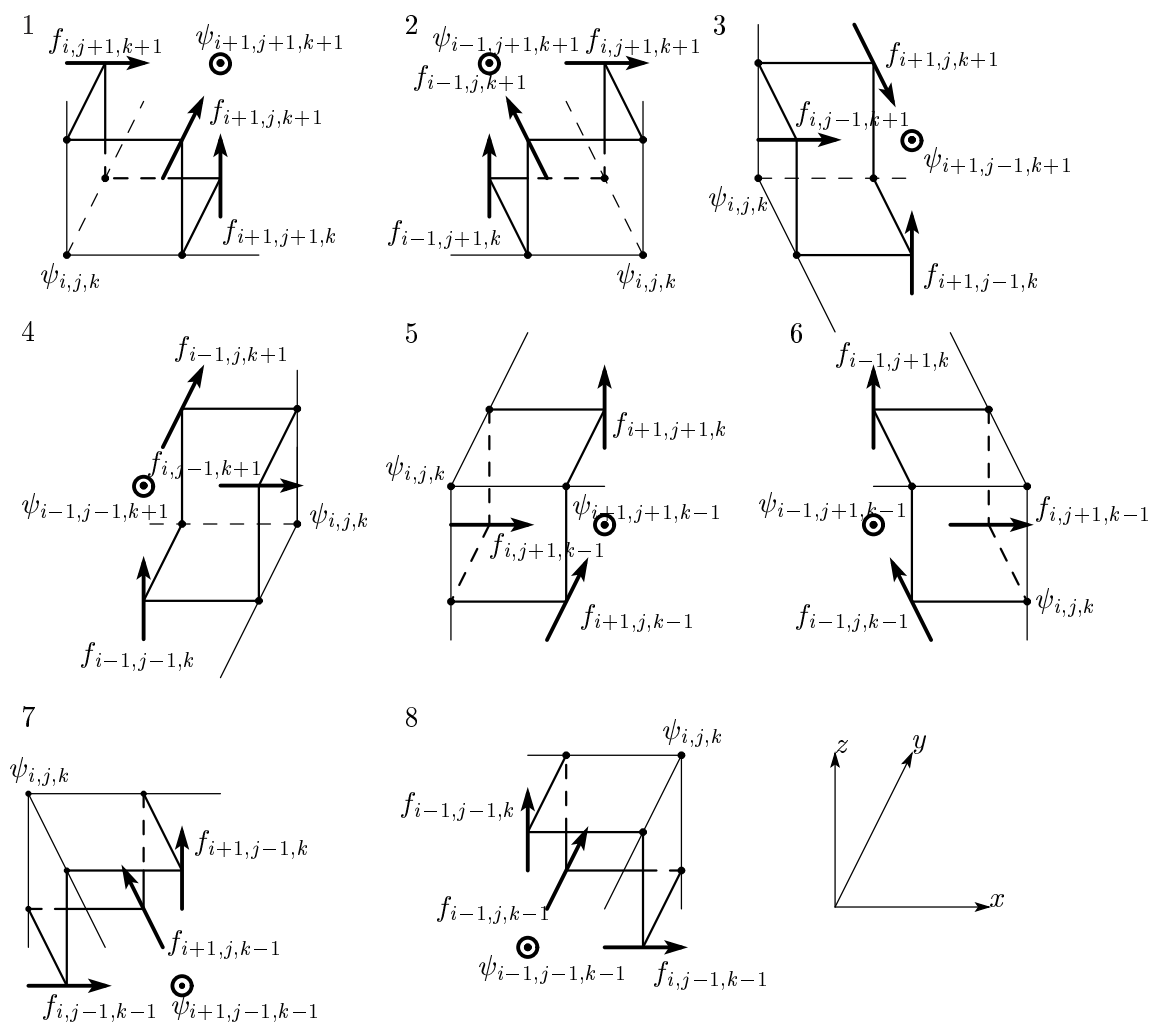


図 5.5: 図 5.4 と同じ。ただし、内部未定義領域がある場合の境界計算。黒線で縁取られた点は未定義領域。

5.1.4 デカルト座標系以外への適用

`ellip_slv` の楕円型方程式求積ルーチンにおける方程式はデカルト座標系を基底座標として採用している。しかし、これらのルーチンで用いる方程式は、一般化された楕円型偏微分方程式である。そのため、各微分係数を適切に設定することでこれらのルーチンは一般直交曲線座標系で定義される任意の線形楕円型方程式に適用可能である。

以下には、これらのルーチンをデカルト座標系以外の楕円型方程式に適用する例である。適用する基礎方程式は物理学でよく用いられるスツルム・リウビル型方程式（自己随伴系方程式）：

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = \rho$$

と仮定する。ここで、 ∇ は 3 次元の勾配演算子ベクトル、 σ, ρ は 3 次元座標を変数にもつ任意の関数、 ϕ は求めたいスカラー物理量である。

デカルト座標系

原点から直交する 3 方向の座標を (x, y, z) としたとき、上記の自己随伴方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \rho \\ \Rightarrow & \sigma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho \end{aligned}$$

と変形できるので、(5.1.6) 式の各係数と対応させると、

$$X = Y = Z = \sigma, \quad a = b = c = 0, \quad d = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad e = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad f = \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

という関係になる。よって、自己随伴系方程式を本ルーチンで求積する際はこのような係数を引数として与えればよい。

円筒座標系

原点から動径方向、同位角方向、鉛直方向座標をそれぞれ (r, θ, z) としたとき、

$$\begin{aligned} & \sigma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\sigma}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho \end{aligned}$$

と変形できるので、(5.1.6) 式の各係数と対応させると、

$$\begin{aligned} X &= Z = \sigma, \quad Y = \frac{\sigma}{r^2}, \quad a = b = c = 0, \\ d &= \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\sigma}{r}, \quad e = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \quad f = \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned}$$

という関係になる。よって、自己随伴系方程式を本ルーチンで求積する際はこのような係数を引数として与えればよい。

球座標系

原点から経度方向、緯度方向、半径方向座標をそれぞれ (λ, θ, r) としたとき、

$$\sigma \left(\frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} - \sigma \tan \theta \right) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{2\sigma}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} = \rho$$

と変形できるので、(5.1.6) 式の各係数と対応させると、

$$X = \frac{\sigma}{r^2 \cos^2 \theta}, \quad Y = \frac{\sigma}{r^2}, \quad Z = \sigma, \quad a = b = c = 0, \\ d = \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}, \quad e = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} - \sigma \tan \theta \right), \quad f = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{2\sigma}{r} \right)$$

という関係になる。よって、自己随伴系方程式を本ルーチンで求積する際はこのような係数を引数として与えればよい。

5.2 Thermo_Advanced_Function の付録

5.2.1 レーダ反射強度の導出

本節では、気象研究ノート 200 号 第 1 章 (石原) および CReSS ユーザーマニュアルを参考に、数値モデルで得られる凝結物混合比および数濃度から擬似的なレーダ反射強度の算出式を導出する。

気象レーダは定性的に以下のような過程を通じて大気中の降水物質を観測している：

1. レーダから決まった電力 (電磁波の強さ; P_t) をもつ電磁波が大気中に向けて射出される。
2. 射出された電磁波は大気中に存在する降水物質に遭遇すると、一部は反射、一部は散乱される (もちろん、大気自体でも一部散乱を受ける)。
3. 反射、散乱された電磁波は電力 P_r となって再びレーダまで戻る。

我々は気象レーダがこの再びレーダまで戻った電磁波の電力 (受信電力) を測定することで大気中に存在する降水粒子の大きさや数を推定できる。

レーダから射出される電磁波を球面波と仮定する。すると、光速 c で伝播する電磁波は射出から時間 t 後には射出源から $r = ct$ という距離だけ離れた球面上に広がる。この球面上での電力密度 S は

$$S = \frac{P_t}{4\pi r^2}.$$

しかし、実際のレーダは指向性アンテナを使用するため球面状での電力の分布に偏りが生じる。図?? は射出される電磁波が無指向性の場合と指向性の場合の電力密度の違いを示した図である。射出源から射出される電磁波の電力が同じ場合、無指向性の場合は上式で、一方指向性の場合は

$$S' = \frac{P_t}{A} \quad (5.2.11)$$

で表される。この A はアンテナの性能 (ビーム幅^{*6} など) 図から $A < 4\pi r^2$ であるため、電力密度で考えると送信電力が同じ場合、指向性の方が電力密度が高いことが明らかである。このとき、指向性の電力密度と無指向性の電力密度の比

$$G \equiv \frac{S'}{S}$$

を「アンテナ利得」と呼ぶ。明らかにビーム幅が狭い (指向性のよい) 方が利得が大きいことがわかる。このパラメータを用いると、指向性射出源から射出される電磁波の電力密度は

$$S' = SG = \frac{P_t G}{4\pi r^2}$$

となる。

次に、レーダから距離 r 離れた場所に有限体積の単一目標が存在する場合を考える。この目標のレーダビームに直交する断面積を A_s とすると、射出された電力 P_t のうち、距離 r で遮られる電力 P_a は射出された電磁波の電力密度から

$$P_a = A_s S' = \frac{P_t G}{4\pi r^2} A_s.$$

もし目標の断面積が指向性のアンテナのビーム幅面積 A に等しい場合は、 $A_s = A$ となり、(5.2.11) から

$$P_a = P_t$$

となる。これは射出した電磁波のすべてが遮られるということを表している。この目標が遮った電力 P_a が吸収されることなくすべて一様方向に放射されると仮定すると、先と同様に今度はこの目標物が無指向性射出源となり、その放射される電磁波の電力密度 S_a は距離 R において

$$S_a = \frac{P_a}{4\pi R^2} = \frac{P_t G}{(4\pi)^2 R^2 r^2} A_s$$

となる。この目標物から射出された電磁波を距離 r にあるもとのアンテナが P_r という電力で受信する。この場合、射出源は目標物、吸収源はアンテナとなるので、このときの受信電力 P_r は目標物が射出した電磁波の電力のうち、アンテナの面積 A_e でどれだけ遮ることができたかで決まる。目標物から射出される電磁波の電力密度は S_a なので、それを面積 A_e のアンテナが遮ることのできる電力 P_r は

$$P_r = S_a A_e = \frac{P_t G}{(4\pi r^2)^2} A_s A_e. \quad (5.2.12)$$

^{*6} 指向性の射出源を用いても、完全に特定方向のみ電磁波を射出することは難しく、ある幅の広がりを持って電磁波を射出することになる。この広がりを持った電磁波の電力のうち、最も電力の高い射出方向をメインローブ、それ以外の電力が相対的に低い射出方向をサイドローブと呼ぶ。最大電力値をとるメインローブから周囲の、ある閾値電力を超える領域の幅をビーム幅と呼び、レーダの観測解像度に影響する。

Peebles (1998) などによると, アンテナが射出する電磁波の波長を λ とすると, アンテナの面積 A_e (アンテナ有効面積) はアンテナ利得と

$$G = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$$

という関係をもつので, (5.2.12) は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} A_s.$$

上の式はレーダが射出した電磁波のうち, 目標物が遮った電力がすべて無指向射出されると仮定している. 実際は目標物も形状によって指向性の射出, および一部吸収をすることが考えられるので, A_s は単純に目標物の断面積ではなく後方散乱断面積 σ で表すのが適当である. この σ は目標物の大きさと受け取った電磁波を射出する能率で決まる. よって上式は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sigma.$$

さらに, 目標物が直径 D の単一な球であったと仮定する. この D が電磁波の波長 λ に比べて十分に小さい場合, レイリー散乱が卓越するので, 後方散乱断面積 σ は理論から

$$\sigma = \frac{\pi^5 |K|^2 D^6}{\lambda^4}, \quad (D/\lambda < 1/16) \quad (5.2.13)$$

で与えられる. ここで K は

$$|K|^2 \equiv \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2$$

で与えられる. ε は複素屈折率であり, 目標物の物性で決まる. 水の場合, 3-10 cm の電磁波で $|K|^2 = 0.930$, 氷の球の場合 $|K|^2 = 0.197$ 程度になる.

実際の気中の降水物質は単一ではなく集団であり, 純粋な球形であることも稀である. 降水粒子が微小気中に集団で存在する場合, レーダに返ってくる受信電力 (P_r) はそれぞれの降水粒子から射出される電力 (p_r) の総和に等しいので,

$$P_r = \sum_i p_r(i) = \sum_i \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \sigma_i = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \sum_i \sigma'_i. \quad (5.2.14)$$

ここで, 最終式への変形は粒子ごとに依存しない (添字 i のつかない) 係数を外に出し, 空気中の単位体積あたりの後方散乱断面積総和

$$\sum_i \sigma'_i \equiv \frac{\sum_i \sigma_i}{V}, \quad V = \text{レーダのサンプリング体積}$$

として新たに定義した. サンプリング体積を用いる理由はレーダで受信する電力が距離 r の面上に存在する粒子からの反射電力ではなく, ある奥行きをもった体積中に存在する粒子の総反射電力として測定されるからである (図??). このあたりは同じく, 気象研究ノート (2001) の第 1, 2 章に掲載されている測定原理を参照のこと. サンプリング体積の奥行きを h とすると, ビーム幅 θ とレーダからの距離 r を用いた円筒形の領域 (図??) に等しく,

$$V = \pi \left(\frac{r\theta}{2} \right)^2 \frac{h}{2}.$$

よって、体積 V はレーダの性能にのみ依存する物理量であることがわかる^{*7}。さらに、(5.2.13) のレイリー散乱を仮定すると、(5.2.14) は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \frac{\pi^5}{\lambda^4} \sum_i |K_j|^2 D_{i,j}^6. \quad (5.2.15)$$

ここで総和演算は単位体積内の総和であることに注意する。また、 $D_{i,j}$ は i 番目の物性 j という粒子の直径を表す。 K_j は物性に依存するので、サンプリング体積内に物性の異なる粒子が入っていることを考慮して総和演算の中にとどめてある。降雨粒子の誘電率を K として相対値で表現すると、上式は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \frac{\pi^5 |K|^2}{\lambda^4} \sum_j m_j^2 D_{i,j}^6, \quad m_j^2 \equiv \frac{|K_j|^2}{|K|^2}. \quad (5.2.16)$$

粒子を物性別でソートし直すと、上式の総和演算は

$$\sum_j m_j^2 \sum_k D_k^6$$

と書き換えられる。よって (5.2.16) は

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \frac{\pi^5 |K|^2}{\lambda^4} \sum_j m_j^2 \sum_k D_k^6, \quad m_j^2 \equiv \frac{|K_j|^2}{|K|^2}. \quad (5.2.17)$$

ここまでで (5.2.17) 式は

$$P_r = C \sum_j m_j^2 \sum_k D_k^6, \quad C \equiv \frac{P_t G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} V \frac{\pi^5 |K|^2}{\lambda^4} \quad (5.2.18)$$

とまとめることができる。これは、レーダが受信する電力が降水粒子の個数・大きさに由来する因子とレーダの性能に由来する因子の積として分けることができるということを意味している^{*8}。つまり、レーダの受信電力は同じ降水粒子が同じ個数・大きさに空気中の単位体積に存在していたとしても、レーダの種類やレーダと降水粒子の距離によって受信電力に差が生じることになる。この差をなくし、異なるレーダで同じ降水粒子の存在を測定する尺度として、レーダ反射因子「radar reflectivity factor」が導入された。これは

$$Z \equiv \sum_i D_i^6$$

として定義されるが、粒子による誘電率の違いを考慮すると、

$$Z \equiv \sum_j m_j^2 \sum_{k_j} D_{k_j}^6, \quad (\text{単位; } [\text{mm}^6 \text{ m}^{-3}]). \quad (5.2.19)$$

^{*7}円筒の高さを h ではなく $h/2$ にする理由は気象研究ノート (2001) の図 1.3 による。

^{*8}厳密には C は対象物までの距離 r に由来する成分も含まれるが、これはレーダからの電波の送信時刻と受信時刻の差から測定できる観測値なので、降水粒子に依らない測定可能な物理量である。

(5.2.18) を用いると,

$$(Z =) \sum_j m_j^2 \sum_{k_j} D_{k_j}^6 = \frac{P_r}{C} \quad (5.2.20)$$

となり, 上の関係から Z がレーダの性能等に依存するパラメータ C に依らず粒子の大きさと個数分布のみを表現できる尺度となっていることが明らかとなる.

(5.2.20) 式から Z は, レーダ観測された受信電力 P_r とレーダの性能パラメータを用いて表現することができるため, 受信電力から直接 Z を計算することが可能である. 一方, (5.2.20) の左辺を直接積分すれば, 大気モデルの情報を用いて Z を求めることが可能である. レーダ観測では具体的な D_i の空間分布がわからないため P_r, C を用いることで Z を計算したが, 大気モデルにおいては

$$\sum_{k_j} D_{k_j}^6 = \int_0^\infty D^6 N_j(D) dD$$

という関係を用いることで $N_j(D)$ の分布が得られていれば直接積分が可能となる. ここで, $N_j(D)$ は単位空間体積内に存在するある種類 j の粒子群の中の微小粒形区間 dD あたりに含まれる粒子の個数を表した物理量であり, 単位は $\text{mm}^{-1} \text{m}^{-3}$ である^{*9}. この関係を用いると, Z は

$$Z = \sum_j m_j^2 \int_0^\infty D^6 N_j(D) dD. \quad (5.2.21)$$

バルク法微物理過程を含む大気モデルでは, 各降水物質の混合比 (質量) と総数濃度 (個数) を用いて, その粒径分布をなんらかの関数形を仮定することで近似する手法が採用される^{*10}. この手法では降水物質の混合比と数濃度という 2 つのパラメータのみで粒径分布が規定される. 例えば, 指数関数分布を仮定すると, 単位体積あたりの単位粒径あたりに含まれる粒子の個数 $N(D)$ は

$$N(D) = N_0 e^{-\lambda D}$$

となる. このとき, N_0 が粒径分布の y 切片数濃度, λ が粒径分布を決める傾きパラメータである. よって, 単位体積に存在する粒子の総数 n は

$$n = \int_0^\infty N(D) dD = \int_0^\infty N_0 e^{-\lambda D} dD = \frac{N_0}{\lambda}, \quad (5.2.22)$$

^{*9} $\sum_{k_j} D_{k_j}^6$ は粒子を D の小さい方から順にソートすることで, D から $D + dD$ という微小直径区間に含まれる粒子の個数分だけその粒子がもつ D^6 を足しあわせていけばよいことになる. よって, 粒子が D から $D + dD$ の区間に存在する単位体積あたりの粒子の個数が $N_j(D)$ 個であった場合,

$$\sum_{k_j=k'+1}^{k'+N} D_{k_j}^6 = D^6 N_j(D) dD$$

となるので, $0 \leq D < \infty$ で積分すれば総和演算に等しくなることが明らかである. 粒子が存在しない粒形区間では $N_j(D) = 0$ となるので積分区間を上記のようにとっても, 総和演算には影響しない.

^{*10}つまり, バルク法は各降水物質の数濃度の粒径分布の時間変化は混合比と総数濃度の時間変化だけで決まり, 具体的な粒径分布は指定された関数系で表現される. 一方, 実際の大气における降水物質の数濃度の粒径分布は各粒径ごとに独立に時間変化することが想像される. 例えば, 重たい粒子ほど早く落下するなど. しかし, それを大気モデルにおいて実現するためには 1 つの降水物質の時間変化を計算するのに微小粒径ごとにビンを分けてそれぞれ時間発展を計算させなければならなくなる (ビン法微物理過程). これは予報変数の莫大な増加を引き起こすため, 計算資源の都合から多くのモデルではまだ行われていない.

単位体積あたりの降水物質の総質量 $\bar{\rho}q$ は

$$\bar{\rho}q = \int_0^\infty v \rho N(D) dD.$$

ここで, $\bar{\rho}$, q , ρ , v はそれぞれ大気の平均密度, 凝結物質の混合比, 凝結物質の密度, 凝結物質の体積である.

$$v = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{D}{2} \right)^3 = \frac{\pi D^3}{6}$$

であることを利用すると,

$$\bar{\rho}q = \int_0^\infty \frac{\pi D^3}{6} \rho N_0 e^{-\lambda D} dD = \frac{\pi}{6} \rho N_0 \Gamma(4) \frac{1}{\lambda^4} = \frac{\pi \rho N_0}{\lambda^4}. \quad (5.2.23)$$

このとき, $\Gamma(4)$ はガンマ関数で $\Gamma(4) = 3!$ を用いた. これらの関係を用いると, (5.2.21) 式は

$$Z = \sum_j m_j^2 \int_0^\infty D^6 N_{j0} e^{-\lambda_j D} dD = \sum_j m_j^2 N_{j0} \Gamma(7) \frac{1}{\lambda_j^7} = 720 \sum_j \frac{m_j^2 N_{j0}}{\lambda_j^7}. \quad (5.2.24)$$

これに (5.2.22), (5.2.23) 式を代入して, 混合比 q と総数濃度 n のみの形に書き換えると,

$$\begin{aligned} Z &= 720 \sum_j m_j^2 n_j \left(\frac{\bar{\rho} q_j}{\pi \rho_j n_j} \right)^2 [\text{mm}^6 \text{m}^{-3}] \\ &= 720 \sum_j m_j^2 n_j \left(\frac{\bar{\rho} q_j}{\pi \rho_j n_j} \right)^2 \times 10^{18} [\text{m}^3] \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

上式が 2 モーメントバルク法 (各降水物質の混合比 q と総数濃度 n の時間発展を予測する微物理過程) におけるレーダ反射因子を計算する表式である.

(5.2.21) 式は他のバルク法にも適用可能である. 例えば, 1 モーメントバルク法 (各降水物質の混合比 q のみの時間発展を予測する微物理過程) でも同様にして Z の計算式が導出できる. 1 モーメントバルク法での数濃度粒径分布は

$$N_j(D) = N_{0j} e^{-\lambda_j D}, \quad N_{0j} = \text{定数}.$$

という形で定義されており, y 切片数濃度が定数のため, (5.2.23) 式と同様に単位体積あたりの降水物質の総質量を求めると,

$$\bar{\rho}q = \frac{\pi \rho N_0}{\lambda^4}. \quad (5.2.26)$$

だけで粒径の傾きが決まってしまう. つまり, 1 モーメントバルク法の場合には Z の評価に単位体積あたりの粒子の総数濃度 n は必要ないことになる. 上式を (5.2.21) 式に代入すれば,

$$Z = \Gamma(7) \sum_j \frac{m_j^2 N_{0j}}{\lambda_j^7} = 720 \sum_j m_j^2 N_{0j} \left(\frac{\bar{\rho} q_j}{\pi \rho_j N_{0j}} \right)^{7/4}. \quad (5.2.27)$$

よって,

$$\begin{aligned}
 Z &= 720 \sum_j m_j^2 N_{0j} \left(\frac{\bar{\rho} q_j}{\pi \rho_j N_{0j}} \right)^{7/4} [\text{mm}^6 \text{m}^{-3}] \\
 &= 720 \sum_j m_j^2 N_{0j} \left(\frac{\bar{\rho} q_j}{\pi \rho_j N_{0j}} \right)^{7/4} \times 10^{18} [\text{m}^3]
 \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

が 1 モーメントバルク法微物理過程における Z の表式となる.

なお, レーダ方程式に関するさらに詳細な導出は Peebles (1998) を参照. ./

5.3 map_function の付録

5.3.1 球面三角法

ここでは, `map_function` モジュールに定義されている球面上での緯度・経度点の算出, 球面円弧の計算等で用いられている各計算式について, 球面三角法による導出を行う.

まず, 球面三角形における各数学定理は以下の通りである.

—— 正弦定理 ——

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \tag{5.3.29}$$

—— 余弦定理 ——

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \tag{5.3.30}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \tag{5.3.31}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{5.3.32}$$

—— 正弦余弦定理 ——

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \tag{5.3.33}$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \tag{5.3.34}$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \tag{5.3.35}$$

このとき, a, b, c, A, B, C は図 5.6 の通りである.

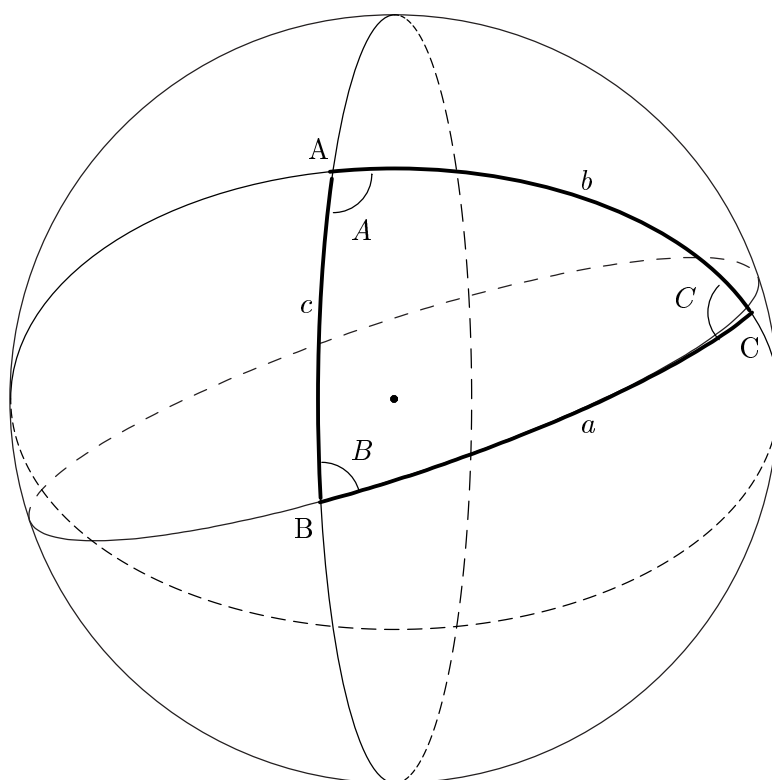


図 5.6: 半径 1 の単位球において定義される球面三角形 ABC. この球面三角形を構成する各円弧は球の中心を通る円の弧である.

これらの定理は図 5.7 のように考えると, そのまま球面座標系の緯度経度に適用することができる.

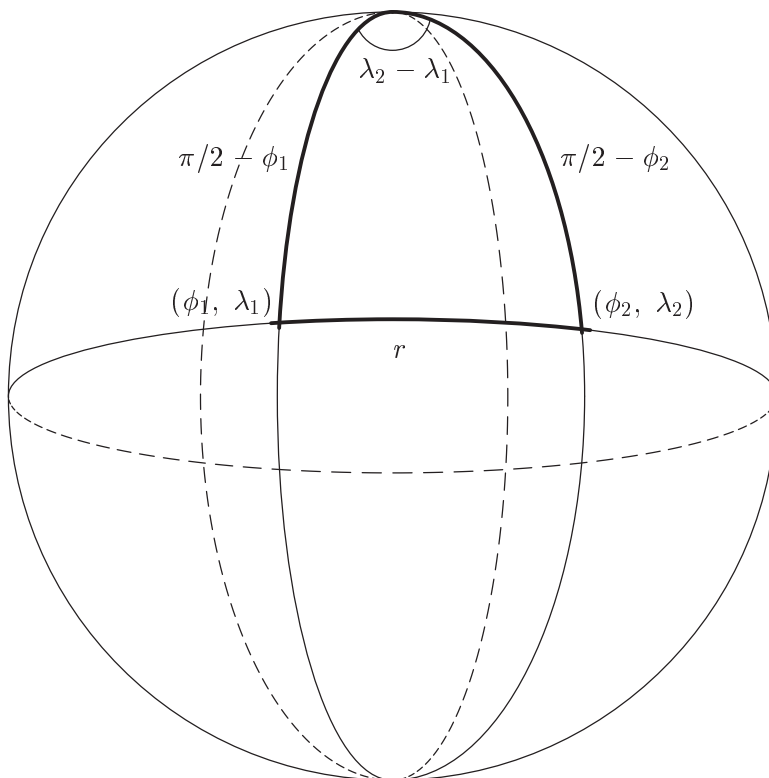


図 5.7: 子午線を 2 辺にもつ球面三角形. これらの辺のもう一方の辺の長さ r を求めるのが関数 `ll2radi` である. 子午線を 2 辺にもつので, それらが成す各は 2 辺の経度差となり, 成す点は極点に一致する.

関数 `ll2radi` は図 5.7 において,

$$\phi_1, \lambda_1, \phi_2, \lambda_2$$

を既知の値とし, これらの 2 点間の円弧距離 r を求める関数である. これを求めるには, (5.3.32) 式において,

$$b = \frac{\pi}{2} - \phi_2, c = \frac{\pi}{2} - \phi_1, A = \lambda_2 - \lambda_1, a = r$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \cos r &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \\ &= \sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

となる. よって, 求める式は

$$r = \arccos[\sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)] \quad (5.3.36)$$

となる．ここで、 r は単位球における角度であるので、半径 R の球においては、 rR とすることで角度 r 分の球面上での円弧の長さを求められるということに注意する^{*11}．なぜなら、球面三角形の各円弧はそれぞれ、球の中心を通る円周の一部だからである^{*12}．さらに、点 (ϕ_1, λ_1) を原点とし、同一点を接点にもつ接平面を考える．この接平面に円弧の距離 r を同じ距離で投影したものが正距図法である．このとき、接平面をデカルト系としたとき、 y 軸を子午線に一致させると、 x 軸は点 (ϕ_1, λ_1) を通り、その子午線に直交する円弧に一致する．この円弧は球の中心を通っている．この手法で球面上の各点を接平面に投影したものを正距方位図法という．112rt は 112radi による距離計算に加えて、角度も計算しており、このルーチンを用いると、接平面上に球面の各点を正確に投影できる．接平面への投影は原点から各球面までの距離と y 軸を子午線に一致させた角度をそれぞれ平面に投影する．この投影はまさに正距方位図法である．上では距離の計算のみ示したので、以下では球面上の 2 点間の角度^{*13} φ を先ほどと同様に球面三角法を用いて導出する．この φ は x 軸から左回りを正にとり、 x 軸上でゼロとなるように取られる．もちろん、 y 軸は x 軸と直交しているので、 y 軸上で $\varphi = \pm\pi/2$ である．既知の量は r の計算と同様の 2 点での緯度経度とこれらの量から導出した 2 点間の距離 r である．ただし、ここでの球面三角法は単位円を仮定して計算するので、距離 r は単位円での円弧の長さ、つまり角度 [rad] に等しいことに注意する．すると、上と同様に A, B, C, a, b, c のそれぞれには

$$a = r, b = \frac{\pi}{2} - \phi_2, c = \frac{\pi}{2} - \phi_1, A = \lambda_2 - \lambda_1, B = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

が対応する．ここで、点 (ϕ_1, λ_1) は接平面の原点であり、接平面の x 軸は原点を通る球面上の子午線に直交している．これは、接平面上に投影される球面上で x 軸に対応する円弧もまた子午線に直交していることを示している．求めたい φ はこの x 軸に対応する円弧からの角度なので、 x 軸上の円弧と子午線が直交していることから、 B は φ の余角になる．すると正弦定理 (5.3.29) から

$$\frac{\sin r}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\sin(\pi/2 - \phi_2)}{\sin(\pi/2 - \varphi)}$$

となるので、

$$\cos \varphi = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin r} \cos \phi_2 \quad (5.3.37)$$

が得られる．このままでも φ を求めることは可能であるが、少し工夫すると、 r を求める必要がなくなる．(5.3.35) 式から

$$\begin{aligned} \sin r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \Rightarrow \sin \varphi &= \frac{1}{\sin r} \sin \phi_2 \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \sin \phi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

^{*11}実際の 112radi は角度 r を求めた後、地球の半径をかけて実際の距離に直している．

^{*12}地球上の緯度で与えられる緯度円とは異なることに注意．緯度円の場合は円の半径は緯度に依存して変化する．

^{*13}この角度は上述のとおり、片方の点を原点とした接平面上にデカルト座標（もしくは平面極座標）で、 y 軸上に球の子午線が投影されるように定義する．つまり、赤道を除いて、 x 軸上が同緯度にならない．

となるので, これと (5.3.37) を合わせると,

$$\tan \varphi = \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \sin \phi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \phi_2} \quad (5.3.38)$$

となる. よって r を陽に必要とせず φ を求めることが可能となる.

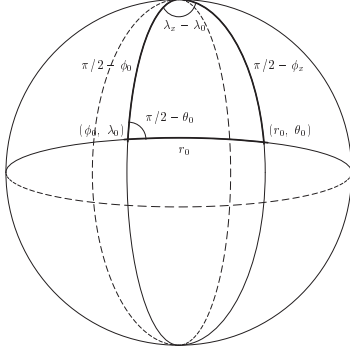


図 5.8: 図 5.7 と同じ三角形. ただし, ここでは (ϕ_x, λ_x) が未知の変数である. 極座標は球面緯度経度上で点 (ϕ_0, λ_0) に原点を持ち, 極座標表記で (r_0, θ_0) となる点の緯度経度 (ϕ_x, λ_x) を計算する. ここで, θ_0 のとりうる値は $-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2, 3\pi/2 < \theta_0 \leq 2\pi$

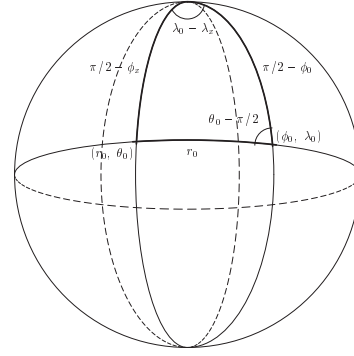


図 5.9: 図 5.8 と同じ三角形. ただし, $\pi/2 < \theta_0 < 3\pi/2, -\pi \leq \theta_0 < -\pi/2$ の間の状態.

次に, サブルーチン `rt211` は緯度 ϕ_0 , 経度 λ_0 において原点をもつ, 極座標 (r_0, θ_0) で示される点での緯度 ϕ_x と経度 λ_x を求めるものである. ここで考えている極座標は図 5.8 のような座標である. この座標の動径方向の距離は直線ではなく, 球面上に沿った円弧の距離で測られる. また, 同位角方向の角度は球面上の点 ϕ_0, λ_0 での接平面を考えたとき^{*14}, 子午面北向きを $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, 子午面南向きを $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ としてとられる. すなわち, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 上の任意の距離 r_0 は経度で見たとき, λ_0 という経度で一定である (子午線上に乗っている) ということに注意する. したがって, $\theta_0 = 0, \pm\pi, 2\pi$ 上の任意の距離 r_0 は緯度円上に完全に一致せず, 少しずれる. このような座標系において, r_0, θ_0 での点を ϕ_x, λ_x で表そうと考えると, まず既知の値は

$$\phi_0, \lambda_0, \theta_0, r_0$$

なので,

$$A = \lambda_x - \lambda_0, B = \frac{\pi}{2} - \theta_0, a = r_0, b = \frac{\pi}{2} - \phi_x, c = \frac{\pi}{2} - \phi_0 \quad (5.3.39)$$

という対応関係をもつ. ここで注意しなければならないのは, 上式は球面三角形の点 B が極座標の原点とした場合の式である. つまり, この式は θ_0 の値が $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ までは

^{*14}すなわち, この平面は球の中心から点 (ϕ_0, λ_0) に伸ばした直線と直交する.

取り得ない。もし、 $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$ の範囲に θ_0 があるときは、点 C を極座標の原点として値を入れ直す必要がある。このときの対応関係は

$$A = \lambda_0 - \lambda_x, \quad C = \theta_0 - \frac{\pi}{2}, \quad a = r_0, \quad b = \frac{\pi}{2} - \phi_0, \quad c = \frac{\pi}{2} - \phi_x \quad (5.3.40)$$

となる。よって、以下では、 $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ までの領域を reg1, $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$ の範囲を reg2, $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ を reg3 としてそれぞれ定式化する。

reg1 対応するのは図 5.8 である。

ここでは、計算に角度 C を用いないので、(5.3.30) に (5.3.39) を用いて、

$$\sin \phi_x = \sin \phi_0 \cos r_0 + \cos \phi_0 \sin r_0 \sin \theta_0, \quad (5.3.41)$$

が得られる。これを ϕ_x について整理すると、

$$\phi_x = \arcsin [\sin \phi_0 \cos r_0 + \cos \phi_0 \sin r_0 \sin \theta_0], \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \quad (5.3.42)$$

となる。 ϕ_x が得られたので、この値を (5.3.39) ととともに (5.3.29) に代入すると、

$$\sin (\lambda_x - \lambda_0) = \frac{\cos \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0$$

となるので、これより λ_x は

$$\lambda_x = \lambda_0 + \arcsin \left[\frac{\cos \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0 \right] \quad (5.3.43)$$

となる。

reg2 対応するのは図 5.9 である。

ここでは、計算に角度 B を用いないので、(5.3.31) に (5.3.40) を用いて、

$$\sin \phi_x = \cos r_0 \sin \phi_0 + \sin r_0 \cos \phi_0 \sin \theta_0, \quad (5.3.44)$$

が得られる。これを ϕ_x について整理すると、

$$\phi_x = \arcsin [\sin \phi_0 \cos r_0 + \cos \phi_0 \sin r_0 \sin \theta_0], \quad \frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}, \quad -\pi \leq \theta_0 < -\frac{\pi}{2} \quad (5.3.45)$$

となる。実はこの式は (5.3.42) と同じなので、 ϕ_x の導出においては、 θ_0 の範囲を気にすることなく同一の式で計算することが可能である。 ϕ_x が得られたので、この値を (5.3.40) ととともに (5.3.29) に代入すると、

$$\sin (\lambda_0 - \lambda_x) = -\frac{\sin \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0$$

となるので、これより λ_x は

$$\lambda_x = \lambda_0 - \arcsin \left[-\frac{\sin \theta_0}{\cos \phi_x} \sin r_0 \right] \quad (5.3.46)$$

となる。

reg3 この領域では, 求める点が極座標原点と同じ経度となる. ゆえに,

$$\lambda_x = \lambda_0. \quad (5.3.47)$$

また, 子午線上であることから, 極座標における距離 r はそのまま極座標原点での緯度値を用いて,

$$\phi_x = \phi_0 \pm r_0. \quad (5.3.48)$$

ここで, $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時は正号, $\theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ の時は負号となる.

以上が球面上における座標の諸変換である. ここで, 上の議論は全て単位球を仮定しているの, 単位球面上の距離は rad 単位の角度と等価となる. よって, 実際の距離を求める際は, 得られる角度に球の半径をかけることで計算できる.

5.3.2 直交座標系における基底ベクトルの変換

2 種類の直交座標系 (x_1, x_2, x_3) , (ξ_1, ξ_2, ξ_3) を考える. 各座標系でのスケール因子は (h_{x1}, h_{x2}, h_{x3}) , $(h_{\xi1}, h_{\xi2}, h_{\xi3})$ とする. このとき, それぞれの座標系に張られる基底ベクトルを

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \quad (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$$

とする. この空間上に任意の微小ベクトル $\delta \mathbf{x}$ を張ったとき, それぞれの座標系において

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 h_{x1} \delta x_1 + \mathbf{x}_2 h_{x2} \delta x_2 + \mathbf{x}_3 h_{x3} \delta x_3 \\ &= \boldsymbol{\xi}_1 h_{\xi1} \delta \xi_1 + \boldsymbol{\xi}_2 h_{\xi2} \delta \xi_2 + \boldsymbol{\xi}_3 h_{\xi3} \delta \xi_3 \end{aligned}$$

と表現できる. 上式の右辺 2 段の式から

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \frac{h_{x2}}{h_{x1}} \frac{\delta x_2}{\delta x_1} + \mathbf{x}_3 \frac{h_{x3}}{h_{x1}} \frac{\delta x_3}{\delta x_1} = \boldsymbol{\xi}_1 \frac{h_{\xi1}}{h_{x1}} \frac{\delta \xi_1}{\delta x_1} + \boldsymbol{\xi}_2 \frac{h_{\xi2}}{h_{x1}} \frac{\delta \xi_2}{\delta x_1} + \boldsymbol{\xi}_3 \frac{h_{\xi3}}{h_{x1}} \frac{\delta \xi_3}{\delta x_1}.$$

この微小ベクトルについて, $\delta x_1 \rightarrow 0$ の極限を考えると,

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \frac{h_{x2}}{h_{x1}} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \mathbf{x}_3 \frac{h_{x3}}{h_{x1}} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \boldsymbol{\xi}_1 \frac{h_{\xi1}}{h_{x1}} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \boldsymbol{\xi}_2 \frac{h_{\xi2}}{h_{x1}} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \boldsymbol{\xi}_3 \frac{h_{\xi3}}{h_{x1}} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}.$$

同じ座標系に張られる互いの基底ベクトルは独立であるため,

$$\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 \frac{h_{\xi1}}{h_{x1}} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \boldsymbol{\xi}_2 \frac{h_{\xi2}}{h_{x1}} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \boldsymbol{\xi}_3 \frac{h_{\xi3}}{h_{x1}} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}. \quad (5.3.49)$$

$\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ のいずれも上記と同様の方法で求めることができる.

これを一般のベクトルに応用すると, ある直交座標系において定義される任意ベクトルの各成分を別の直交座標系における各成分に変換する関係式が得られる. ベクトル \mathbf{v} がデ

カルト座標系 (x, y, z) で表現されているとする. このベクトルを球座標系 (λ, ϕ, z) に変換することを考える. それぞれの座標系の間での関係式は

$$x = r \cos \phi \cos \lambda, \quad y = r \cos \phi \sin \lambda, \quad z = r \sin \phi$$

と表現されたとする. この関係式は原点座標が両者で一致していることを表している. デカルト座標系の基底ベクトルを $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ としたとき, ベクトルは

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

と表される. (v_x, v_y, v_z) はそれぞれの基底ベクトル方向の成分を表す. 上のベクトルは球座標系において

$$\mathbf{v} = v_\lambda \mathbf{e}_\lambda + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_r \mathbf{e}_r.$$

ここで, 球座標系での基底ベクトルを $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_r)$ とし, それぞれの成分を (v_λ, v_ϕ, v_r) とした. 上の 2 式から

$$v_\lambda \mathbf{e}_\lambda + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_r \mathbf{e}_r = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

である. 同じ座標系での基底は互いに独立なので, 例えば上式両辺に \mathbf{e}_λ をかけると,

$$v_\lambda = v_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_\lambda + v_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\lambda + v_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\lambda \quad (5.3.50)$$

となり, デカルト座標系でのベクトル成分から球座標系での成分を求める関係式が得られる. 異なる直交座標系間の基底ベクトルの関係は (5.3.49) から得られる. 具体的には

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\lambda &= \mathbf{i} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \mathbf{k} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{i} \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \mathbf{j} \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \mathbf{k} \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial r} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial r} + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial r} \end{aligned}$$

より, デカルト座標系と球座標系の関係式を用いて上式の空間微分を計算すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\lambda &= -\mathbf{i} \sin \lambda + \mathbf{j} \cos \lambda \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{i} \sin \phi \cos \lambda - \mathbf{j} \sin \phi \sin \lambda + \mathbf{k} \cos \phi \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos \phi \cos \lambda + \mathbf{j} \cos \phi \sin \lambda + \mathbf{k} \sin \phi \end{aligned}$$

が得られる. よって, (5.3.50) 式は

$$v_\lambda = -v_x \sin \lambda + v_y \cos \lambda \quad (5.3.51)$$

と変換される. 同じやり方で v_ϕ, v_r も得られる.

以上の事実は, 異なる直交座標間での関係式が与えられれば, 任意のベクトルについて, これらの座標間での変換関係が求められ, 具体的にベクトルの成分変換が可能であることを示している.

5.3.3 地図投影

ここでは、緯度経度空間で定義される格子点をデカルト座標系と関係づけるいくつかの地図投影と投影のための変換関係を示す。ここで示された変換関係は後節の緯度経度座標から各地図投影されたデカルト座標系へのベクトル成分の変換式導出のために利用される。

そもそも、地図投影は球面上の任意の点を水平面の 1 点に対応させるための変換手法である。球面を平面に変換するため、球面上での性質（長さ、面積など）は球面上でのものと等しくさせることはできない（いずれかの性質において歪が発生する）。地図投影の理解において重要な点は投影先の平面がどのような形であるかということと、光源がどのような種類かを正確に認識することである。以下で示す地図投影ではそれらを明記したのち、変換式を導出する。なお、各投影法の性質や特徴・利点などは本書の範囲を超えるので詳細は省略する。

メルカトル図法

図??で示されるように、投影面が赤道に接する円筒状に配置され、光源が地球の中心にある地図投影を円筒図法と呼ぶ。後で詳細に示すが、メルカトル図法は単なる円筒図法ではなく、等角写像であるため、円筒面に球面を投影したあと、各投影点での方角が元の球面上での方角と正しくなるように距離が修正される。言うまでもなく、赤道での長さが正確に表現される。

地球上の経度、緯度 (λ, ϕ) は図??のようになり、この各点が円筒面上に投影されたとき、 $(\lambda, \phi) = (\lambda_0, 0)$ となる赤道上的点を投影先で定義されるデカルト座標系の原点 $(x, y) = (0, 0)$ に対応させる。以下では、ここで定義されたデカルト座標系が球面上での緯度経度とどのような対応関係をもつかを幾何的に考察する。

まず、 x 方向は図??から、緯度に依存することなく y 軸に平行に経度の等しい線が投影される。したがって、明らかに

$$x = a(\lambda - \lambda_0) \quad (5.3.52)$$

である。ここで、 a は地球半径である^{*15}。次に y 方向は図??から、赤道面から角度 ϕ （緯度）の方向に伸びる線と円筒面が交わる点が緯度 ϕ の球面上の点を投影している。したがって、

$$y = a \tan \phi \quad (5.3.53)$$

となる。(5.3.52)、(5.3.53) が「円筒投影図法」で投影された球面上の点と投影面上での点の関係式となる。

^{*15} 本書の議論では、計算を簡単にするため地球は真球であると仮定する。

ところで、図??で示されるように、球面上でのある微小面積 $A'B'C'D'$ とそれに対応して円筒投影図法で投影された投影面上での微小面積 $ABCD$ では、対角方向への角度（方角）が異なっていることがわかる。これは、単なる円筒投影が等角性を保存しない投影図法だからである。面積 $A'B'C'D'$ において、点 A' から C' への方角を θ' とすると、球面三角法の関係から

$$\frac{\sin \theta'}{\sin B'C'} = \frac{\sin(\angle A'C'B')}{\sin A'B'}$$

となる。面積 $A'B'C'D'$ は各点の角度が全て $\pi/2$ であるため、上式は

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \delta\phi} = \frac{\sin(\pi/2 - \theta')}{\sin(\delta\lambda \cos \phi)}$$

となる。よって、

$$\tan \theta' = \frac{\sin \delta\phi}{\sin(\delta\lambda \cos \phi)} \approx \frac{\delta\phi}{\delta\lambda \cos \phi}. \quad (5.3.54)$$

これが、球面上での方角である。最終式への変形は $\delta\phi$, $\delta\lambda \ll 1$ であることを用いている。もし円筒投影法が等角性を保存するのであれば、投影先の面積 $ABCD$ における点 A から点 C への方角を θ が θ' に一致しなければならない。実際、面積 $ABCD$ において、

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\tan(\phi + \delta\phi) - \tan \phi}{\delta\lambda} = \frac{\delta y}{\delta x} \quad (5.3.55)$$

となり、明らかに $\theta \neq \theta'$ である。このとき、 x 方向を変化させずに、 y を α 倍することで y' となる新しい座標系

$$y' \equiv \alpha y = \alpha a \tan \phi$$

を投影面上に構築する。この α は

$$\tan \theta' = \alpha \tan \theta$$

となるようにとられる。すると、(5.3.55) を用いて

$$\tan \theta' = \alpha \tan \theta = \frac{\alpha \delta y}{\delta x} = \frac{\delta y'}{\delta x}$$

と表現できる。これは、面積 $ABCD$ の領域を図??のように、面積 $ABEF$ に縮めたことに対応する。縮めることで方角を投影前と一致させている。(5.3.54) と上式を用いると、

$$\frac{\delta\phi}{\delta\lambda \cos \phi} = \frac{\delta y'}{\delta x}$$

となる。 $\delta x = a\delta\lambda$ であるため、

$$a \frac{\delta\phi}{\cos \phi} = \delta y'.$$

y' は y の定数倍であるため、上式を y' 方向に積分すれば、 y' の各点における球面上の対応緯度 ϕ が得られる。具体的には上式から

$$a \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos \phi'} = \int_0^{y'} dy''$$

$$\Rightarrow y' = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}$$

となる. これまでの説明から, y' がメルカトル投影 (等角円筒投影) によって投影面に投影された緯度と対応する座標を表す. 以上より, メルカトル投影された球面上での緯度経度 (λ, ϕ) と投影面上でのデカルト座標 (x, y) の関係は

$$\begin{aligned} x &= a(\lambda - \lambda_0), \quad y = a \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}, \\ \lambda &= \frac{x}{a} + \lambda_0, \quad \phi = 2 \arctan \left\{ \left[\exp \left(\frac{y}{a} \right) \right] \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\} - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.3.56)$$

と導かれる. 二段目の式は一段目の式を逆に解いたものである.

さらに, (λ_0, ϕ_0) をデカルト座標の原点 $(x, y) = (0, 0)$ とおいた場合, 原点から任意の緯度経度までの距離 r は

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= a \sqrt{(\lambda - \lambda_0)^2 + \ln \left\{ \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right| \right\}^2} \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

と表現できるため, 緯度経度座標の値が得られている場合, 上式からメルカトル投影した際の原点からの距離を求めることができる.

ランペルト正角円錐図法

図??で示されるように, 球面の両極軸に一致した天頂軸をもつ円錐状の投影面を考える. この円錐投影面は球面上の 2 つの異なる基準緯度 ϕ_1, ϕ_2 で球面と交わっている^{*16}. 同図から明らかなように, 投影された円錐の展開図は角度 β の扇状になる. 球面上の緯度は扇の中心から等しい距離上に投影され, 球面上の経度は扇の中心から放射状に投影される.

このとき, 球面上の任意の点 $(\lambda, \phi) = (\lambda_0, \phi_0)$ に対応する投影面上の点において, 原点 $(x, y) = (0, 0)$ を置き, 図??に示されるように, 経度線を北極に向かう方向を y 軸と一致させるようなデカルト座標を張る. 一方, このデカルト座標とは異なり, 図??に示されるような別のデカルト座標系 (w, v) を張る. このデカルト座標系は投影面上の経度線 $\lambda = \lambda_0$ を北極から赤道に向かう方向に w 軸を設定し, 右手系直交方向に v 軸を設定する. したがって, (x, y) と (w, v) の座標の関係は明らかに

$$x = v, \quad y = w_0 - w, \quad w_0 = w(\phi = \phi_0) \quad (5.3.58)$$

^{*16}ランペルト正角円錐図法はこのように基準緯度を 2 つもち, それぞれの点が球面と交わる投影面を設定する場合と, 基準緯度を 1 つしか持たず, その緯度で投影面が球面と接するような設定を行う場合がある. ここでは, 前者の基準緯度を 2 つ有する場合を考察する.

である.

まず, デカルト座標系 (w, v) と投影面での緯度経度との対応関係を調べる. 先述のとおり, 扇の投影面上で緯度は扇の中心から等距離上に投影され, 経度は中心から放射状に投影されている. したがって,

$$w = r \cos \alpha, \quad v = r \sin \alpha \quad (5.3.59)$$

が成り立つ. ここで, r, α は扇の中心からの距離と $\lambda = \lambda_0$ に対応する w 軸からの角度である. この 2 つのパラメータが投影面上で取りうる範囲は

$$\alpha(\lambda = 0) \leq \alpha \leq \alpha(\lambda = 2\pi), \quad r(\phi = \pi/2) \leq r \leq r(\phi = -\pi/2).$$

ただし,

$$\alpha(\lambda = 2\pi) - \alpha(\lambda = 0) = \beta, \quad r(\phi = \pi/2) = 0$$

であることに注意する. 以降, これらのパラメータが緯度経度とどのような関係にあるかを幾何的に考察する.

扇の角度 α は $\alpha = 0$ から $\alpha = \beta$ までの間で等間隔に経度が投影される. したがって,

$$(\lambda - \lambda_0) = \frac{2\pi}{\beta} \alpha \quad (5.3.60)$$

という関係が得られる. ところで, 円錐天頂の断面角 θ は図??から ΔTLS について

$$\angle TSL = \frac{\pi}{2} - \theta$$

である. また,

$$\angle OSL + \angle TSL = \frac{\pi}{2}$$

かつ, 点 S は 2 つの基準緯度の中間緯度角が投影面と交わる点なので,

$$\angle OSL = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

が成り立つ. したがって, $\angle TSL$ は

$$\angle TSL = \frac{\pi}{2} - \angle OSL = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}.$$

これを用いると, θ は

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \angle TSL = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}. \quad (5.3.61)$$

このとき, 円錐と球面の交点 R で天頂軸に垂直に円錐を切り取ったときの底面の円弧の長さ s は,

$$s = 2\pi RP = 2\pi a \cos \phi_2.$$

この s は円錐を展開したとき, ϕ_2 に対応する円弧の中心からの距離 $r(\phi_2)$ における扇の円弧の長さ $(= r(\phi_2)\beta)$ に等しい. したがって,

$$2\pi a \cos \phi_2 = r(\phi_2)\beta = \frac{RP}{\sin \theta} \beta = \frac{a \cos \phi_2}{\sin \theta} \beta.$$

2 式から 3 式への変形は図??から円錐の断面 $\triangle TPR$ を考えたとき, $RT = r(\phi_2)$ となることから, $r(\phi_2) \sin \theta = RP$ であることを用いた. よって, 上式から β についての関係式

$$\beta = 2\pi \sin \theta = 2\pi \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \quad (5.3.62)$$

が得られる. 円錐の天頂から球の中心までの距離 (円錐の高さ) TO は $\triangle TRO$ を考えると, 平面三角形の正弦定理より

$$\frac{\sin \theta}{a} = \frac{\sin \angle TRO}{TO}.$$

図??から $\angle TRO = \pi/2 - \theta + \phi_2$ なので, 上式は

$$TO = \frac{a}{\sin \theta} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \phi_2 \right) = \frac{a}{\sin \theta} \cos (\theta - \phi_2). \quad (5.3.63)$$

以上から, 線分 TQ 上の任意の点 X ($TX = r(\phi)$) によって作られる $\triangle TXO$ について, 正弦定理から

$$\begin{aligned} \frac{\sin (\pi/2 - \phi)}{r(\phi)} &= \frac{\sin \angle TXO}{TO} = \frac{\sin (\pi/2 - \theta + \phi) \sin \theta}{a \cos (\theta - \phi_2)} = \frac{\cos (\theta - \phi) \sin \theta}{a \cos (\theta - \phi_2)} \\ \Rightarrow r(\phi) &= a \cos \phi \frac{\cos (\theta - \phi_2)}{\cos (\theta - \phi) \sin \theta} \end{aligned} \quad (5.3.64)$$

となる. このとき, $\angle TXO = \pi/2 - \theta + \phi$ と (5.3.63) を用いた.

ところで, 図??で示されるように, 球面上でのある微小面積 $A'B'C'D'$ とそれに対応して円錐投影図法で投影された投影面上での微小面積 $ABCD$ では, 対角方向への角度 (方角) が異なっていることがわかる. これは, 単なる円錐投影が等角性を保存しない投影図法だからである. 面積 $A'B'C'D'$ において, 点 A' から C' への方角を Θ' とすると, 球面三角法の関係から

$$\frac{\sin \Theta'}{\sin B'C'} = \frac{\sin (\angle A'C'B')}{\sin A'B'}$$

となる. 面積 $A'B'C'D'$ は各点の角度が全て $\pi/2$ であるため, 上式は

$$\frac{\sin \Theta'}{\sin \delta \phi} = \frac{\sin (\pi/2 - \Theta')}{\sin (\delta \lambda \cos \phi)}$$

となる. よって,

$$\tan \Theta' = \frac{\sin \delta \phi}{\sin (\delta \lambda \cos \phi)} \approx \frac{\delta \phi}{\delta \lambda \cos \phi}. \quad (5.3.65)$$

これが, 球面上での方角である. 最終式への変形は $\delta \phi, \delta \lambda \ll 1$ であることを用いている. もし円錐投影法が等角性を保存するのであれば, 投影先の面積 $ABCD$ における点 A から点 C への方角を Θ が Θ' に一致しなければならない. 実際, 面積 $ABCD$ において,

$$\tan \Theta = \frac{BC}{AB} = \frac{-\delta r}{r \delta \alpha} = \frac{-\delta r}{r \sin \theta \delta \lambda} \quad (5.3.66)$$

となり, 明らかに $\Theta \neq \Theta'$ である^{*17}. 上式の途中変換には (5.3.60), (5.3.62) を用いた. また, 辺 BC は辺 B'C' と座標軸の向きが逆であるため, 点 B から C への変化がなす角 Θ は, $-\delta r$ と負号がつくことに注意する. このとき, r 方向を変化させずに, α を f 倍することで α' となる新しい座標系

$$\alpha' \equiv f\alpha$$

を投影面上に構築する. これにより, (5.3.58), (5.3.59) で定義される投影面上でのデカルト座標系 (x, y) および (w, v) は等角ではない単なる円錐投影における投影面でのデカルト座標を表している. ここでは新たに等角円錐投影のためのデカルト座標として (x', y') , (w', v') を張り直す. このとき, (5.3.59) から明らかに

$$w' = \frac{r}{f} \cos \alpha', \quad v' = \frac{r}{f} \sin \alpha' \quad (5.3.67)$$

となるように (w', v') は張られる^{*18}. 同様に, (5.3.58) は

$$x' = v', \quad y' = w'_0 - w', \quad w'_0 = w'(\phi = \phi_0) \quad (5.3.68)$$

となる. また (5.3.66) は

$$\frac{1}{f} \tan \Theta = \frac{-\delta r}{fr \sin \theta \delta \lambda} = \frac{-\delta r}{r \sin \theta \delta \lambda'} \quad (5.3.69)$$

となる. この座標変換によって,

$$\tan \Theta' = \frac{1}{f} \tan \Theta$$

が満たされるなら, (5.3.65), (5.3.69) から

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi}{\delta \lambda \cos \phi} &= \frac{-\delta r}{fr \sin \theta \delta \lambda} = \frac{-\delta r}{r \sin \theta \delta \lambda'} \\ \Rightarrow \frac{\delta \phi}{\delta \lambda \cos \phi} &= \frac{-\delta r}{fr \sin \theta \delta \lambda} \end{aligned}$$

^{*17}一見一致しないかどうか判然としないが, 以下のように示すことができる. (5.3.64) から

$$\begin{aligned} \delta r &= a \frac{\cos(\theta - \phi_2)}{\sin \theta} \delta \left[\frac{\cos \phi}{\cos(\theta - \phi)} \right] \\ &= a \frac{\cos(\theta - \phi_2)}{\sin \theta} \left[\frac{-\sin \phi \cos(\theta - \phi) - \cos \phi \sin(\theta - \phi)}{\cos^2(\theta - \phi)} \right] \delta \phi \\ &= -a \frac{\cos \phi \cos(\theta - \phi_2)}{\sin \theta \cos(\theta - \phi)} [\tan \phi + \tan(\theta - \phi)] \delta \phi \\ &= -r [\tan \phi + \tan(\theta - \phi)] \delta \phi \end{aligned}$$

を (5.3.66) に用いて

$$\tan \Theta = \frac{\tan \phi + \tan(\theta - \phi)}{\sin \theta \delta \lambda} \delta \phi$$

となるため, $\tan \Theta' \neq \tan \Theta$ は明らか.

^{*18}このとき, f は定数倍なので, (w', v') 系は (w, v) 系より長さが伸縮していることに注意する. ここで $1/f$ をかけたのは, 最後の式を簡潔にするためであるがこの処理を行っても一般性は失われない.

$$\Rightarrow \frac{\delta\phi}{\cos\phi} = \frac{-\delta r}{f r \sin\theta}$$

が得られる. したがって, 上式を $r(\phi)$ 方向に積分すると

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos\phi'} &= -\frac{1}{f \sin\theta} \int_{r(\phi_1)}^{r(\phi)} \frac{dr'}{r'} \\ \Rightarrow \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] &= -\frac{1}{f \sin\theta} \ln \left[\frac{r(\phi)}{r(\phi_1)} \right] \\ \Rightarrow \frac{r(\phi)}{r(\phi_1)} &= \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right]^{-f \sin\theta} \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

となり, ϕ と $r(\phi)$ の関係が得られる^{*19}. (5.3.64) 式から ϕ と $r(\phi)$ の関係性は既に得られているため, 上式と (5.3.64) から未定係数 f の値を求める. そのためには, ϕ に具体的な値を代入すればよい. 上式について $\phi = \phi_2$ のとき, $f \sin\theta$ は

$$f \sin\theta = -\ln \left[\frac{r(\phi_2)}{r(\phi_1)} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1}$$

^{*19}ここで, ϕ' についての積分は $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ 内における任意の範囲で行われるため, $\sin\phi = t$ という変数変換を用いると ($\cos\phi = t$ とおくと $\sin\phi = \pm\sqrt{1-t^2}$ を表現するときに正負の場合分けが必要になるため最適ではない),

$$\int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos\phi'} = \int_{T_1=t(\phi_1)}^{T(\phi)} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_{T_1=t(\phi_1)}^{T(\phi)} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] dt = \frac{1}{2} [-\ln(1-t) + \ln(1+t)]_{T_1=t(\phi_1)}^{T(\phi)}$$

と求められる. よって,

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\phi'}{\cos\phi'} &= \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+\sin\phi'}{1-\sin\phi'} \right]_{\phi_1}^{\phi} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+2\sin(\phi'/2)\cos(\phi'/2)}{1-2\sin(\phi'/2)\cos(\phi'/2)} \right]_{\phi_1}^{\phi} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\cos^{-2}(\phi'/2) + 2\tan(\phi'/2)}{\cos^{-2}(\phi'/2) - 2\tan(\phi'/2)} \right]_{\phi_1}^{\phi} \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1+\tan(\phi'/2)}{1-\tan(\phi'/2)} \right)^2 \right]_{\phi_1}^{\phi} = \left[\ln \frac{1+\tan(\phi'/2)}{1-\tan(\phi'/2)} \right]_{\phi_1}^{\phi} = \left[\ln \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) \right\} \right]_{\phi_1}^{\phi} \\ &= \ln \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

という積分結果が得られる. 上式一段目では三角関数の倍角公式

$$\sin\phi = 2\sin(\phi/2)\cos(\phi/2),$$

一段目から二段目への変形は三角関数の定義

$$1 + \tan^2(\phi/2) = 1/\cos^2(\phi/2),$$

二段目最終変形は正接の加法定理

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

から, $\alpha = \pi/4$, $\beta = \phi/2$ とすると,

$$\tan(\pi/4 + \phi/2) = \frac{1 + \tan(\phi/2)}{1 - \tan(\phi/2)}$$

となることをそれぞれ用いて変形した.

であると求められる. (5.3.64) を用いて r を置き換えると,

$$\begin{aligned} n \equiv f \sin \theta &= -\ln \left[\frac{\cos \phi_2 \cos (\theta - \phi_1)}{\cos \phi_1 \cos (\theta - \phi_2)} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \\ &= \ln \left[\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (5.3.71)$$

と求められる. ここで, 最終式への変形は $\theta = (\phi_1 + \phi_2)/2$ より

$$\frac{\cos (\theta - \phi_1)}{\cos (\theta - \phi_2)} = \frac{\cos [(\phi_2 - \phi_1)/2]}{\cos [(\phi_1 - \phi_2)/2]} = 1$$

であることを用いた ^{*20}.

以上の操作によって, 投影面上におけるデカルト座標 (w, v) と緯度経度を対応づけるためのパラメータ r, α の具体的な値が求められたことになる. (5.3.67) 式に (5.3.70), (5.3.60) を代入すると,

$$\begin{aligned} w'(\lambda', \phi) &= \frac{r(\phi_1)}{f} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \cos \left(\frac{\beta}{2\pi} (\lambda' - \lambda'_0) \right) \\ v'(\lambda', \phi) &= \frac{r(\phi_1)}{f} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \sin \left(\frac{\beta}{2\pi} (\lambda' - \lambda'_0) \right) \end{aligned}$$

β を (5.3.62) で置き換え, $\alpha' = f\alpha$ を思い出し λ' を λ で置き換えると,

$$\begin{aligned} w'(\lambda', \phi) &= \frac{r(\phi_1)}{f} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v'(\lambda', \phi) &= \frac{r(\phi_1)}{f} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \end{aligned}$$

$r(\phi_1)$ を (5.3.64) で置き換えると,

$$\begin{aligned} w'(\lambda', \phi) &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v'(\lambda', \phi) &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \end{aligned}$$

*20

$\cos(-x) = \cos x$.

よって、最終的に上式を用いると (5.3.68) は

$$\begin{aligned}
 x' &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\
 y' &= w'_0 - a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\
 U(\phi) &\equiv \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\
 n &\equiv \ln \left[\frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} \right] \left\{ \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \\
 w'_0 &\equiv w'(\lambda = \lambda_0, \phi = \phi_0) = a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi_0)} \right]^n
 \end{aligned} \tag{5.3.72}$$

と導かれる。また、この関係を逆に解くと、 λ について

$$\begin{aligned}
 \frac{x'}{y' - w'_0} &= -\tan [n(\lambda - \lambda_0)] \\
 \Rightarrow \lambda &= \lambda_0 + \frac{1}{n} \arctan \left(\frac{-x'}{y' - w'_0} \right)
 \end{aligned} \tag{5.3.73}$$

であることが、さらに ϕ について

$$\begin{aligned}
 x'^2 + (y' - w'_0)^2 &= \left(a \frac{\cos \phi_1}{n} \right)^2 \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^{2n} \\
 \Rightarrow U^{2n}(\phi) &= \frac{\left(a \frac{\cos \phi_1}{n} \right)^2}{x'^2 + (y' - w'_0)^2} U^{2n}(\phi_1) \\
 \Rightarrow U(\phi) &= \frac{\left(a \frac{\cos \phi_1}{n} \right)^{1/n}}{[x'^2 + (y' - w'_0)^2]^{1/2n}} U(\phi_1) \\
 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} &= \arctan \left\{ \frac{\left(a \frac{\cos \phi_1}{n} \right)^{1/n}}{[x'^2 + (y' - w'_0)^2]^{1/2n}} U(\phi_1) \right\} \\
 \Rightarrow \phi &= 2 \arctan \left\{ \left[\frac{a \cos \phi_1}{n \sqrt{x'^2 + (y' - w'_0)^2}} \right]^{1/n} U(\phi_1) \right\} - \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{5.3.74}$$

であることが得られる。

さらに、投影座標 (x', y') における原点 $(x, y) = (0, 0)$ を緯度経度 (λ_0, ϕ_0) に置いた場合、投

影座標の原点から任意の緯度経度 (λ, ϕ) までの距離 r は

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\
 &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sqrt{\sin^2 [n(\lambda - \lambda_0)] + \left\{ \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_0)} \right]^n - \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \right\}^2} \\
 &= a \frac{\cos \phi_1}{n} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sqrt{1 + \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_0)} \right]^{2n} - 2 \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_0)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)]} \quad (5.3.75)
 \end{aligned}$$

で表現される.

5.3.4 地図投影に伴うベクトル成分変換

ここでは, 任意のベクトルについて, 地図投影されたデカルト座標系上で定義されるベクトル成分を緯度経度座標系で定義されるベクトル成分に変換 (およびその逆変換) するための関係式を導出する. 考慮する座標系は前節と同じで, ランベルト正角円錐図法およびメルカトル図法である.

まず, 2 次元ベクトル \mathbf{v} について, デカルト座標系 (x, y) の各基底ベクトル方向の成分を (u, v) と表記する. このときの基底ベクトルは $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ と表記する. ここで定義された座標系は, ある地図投影法によって緯度経度座標 (λ, ϕ) と 1 対 1 で対応しているとする. このとき, 緯度経度座標系において同じベクトルの成分は (u_λ, v_ϕ) , 基底ベクトルは $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\phi)$ と定義する. (5.3.49) から

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_\lambda \frac{h_\lambda}{h_x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \mathbf{e}_\phi \frac{h_\phi}{h_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
 \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_\lambda \frac{h_\lambda}{h_y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \mathbf{e}_\phi \frac{h_\phi}{h_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
 \mathbf{e}_\lambda &= \mathbf{e}_x \frac{h_x}{h_\lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_y \frac{h_y}{h_\lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\
 \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{e}_x \frac{h_x}{h_\phi} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \mathbf{e}_y \frac{h_y}{h_\phi} \frac{\partial y}{\partial \phi}
 \end{aligned} \quad (5.3.76)$$

となる. h_x, h_y は地図投影面上でのデカルト座標におけるスケール因子, h_λ, h_ϕ は緯度経度座標におけるスケール因子を表す. ここで重要な点は地図投影上でのデカルト座標の場合, スケール因子は必ずしも $h_x = h_y = 1$ とならないことに注意する. それは, 球面上の座標を投影する際に長さスケールが保存していない (投影の際に伸び縮みが起こる) からである. よって, 上式から, 任意の地図投影面座標のスケール因子は, その座標における基底ベクトルの長さを 1 にするように定義される. すなわち, 上式 1, 2 段目についてノルムを

求める (両辺 2 乗する) と, $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1$ でなければならないので,

$$1 = \frac{1}{h_x} \sqrt{h_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + h_\phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2}$$

$$1 = \frac{1}{h_y} \sqrt{h_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + h_\phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2}$$

から,

$$h_x = \sqrt{h_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + h_\phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2}$$

$$h_y = \sqrt{h_\lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + h_\phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2}.$$
(5.3.77)

ここで, 緯度経度座標における基底ベクトルもその定義から $\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = 1$ であることを用いた.

次に, ベクトル \mathbf{v} は各座標系において,

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y = u_\lambda\mathbf{e}_\lambda + v_\phi\mathbf{e}_\phi$$

と表される ^{*21}. この関係からそれぞれの座標系におけるベクトル成分間の関係は

$$u = u_\lambda \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_x + v_\phi \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_x$$

$$v = u_\lambda \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_y + v_\phi \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_y$$

$$u_\lambda = u \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\lambda + v \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\lambda$$

$$v_\phi = u \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\phi + v \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\phi$$

となるので, (5.3.76) から

$$u = u_\lambda \frac{h_x}{h_\lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{h_x}{h_\phi} \frac{\partial x}{\partial \phi}$$

$$v = u_\lambda \frac{h_y}{h_\lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{h_y}{h_\phi} \frac{\partial y}{\partial \phi}$$

$$u_\lambda = u \frac{h_x}{h_\lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + v \frac{h_y}{h_\lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$v_\phi = u \frac{h_x}{h_\phi} \frac{\partial x}{\partial \phi} + v \frac{h_y}{h_\phi} \frac{\partial y}{\partial \phi}$$

^{*21}このとき, ベクトル成分 u, v は地図上の座標で測られるベクトルではなく, 球面上での長さを保存して地図投影面上に投影されたベクトルであることを表す. 従って, 球面上での基底ベクトルの和で張られる任意のベクトルは, 投影面上での基底ベクトルの和で長さ, 向きを変えることなく, その座標上に張ることができる. 投影に伴う長さや向きの変化は全て投影座標におけるスケール因子に押し付ける. もし, 投影面上の座標で測られるベクトル成分として記述する場合は, 投影座標におけるスケール因子は全て 1 (単なるデカルト座標) となり, 投影前の球面上でのベクトルと投影面上でのベクトルは長さおよび向きを保存しなくなる. 本節において議論する投影面上でのベクトル成分は, 球面上での長さ向きを保存するベクトル成分である.

となる．球面座標系でのスケール因子は

$$h_\lambda = a \cos \phi, \quad h_\phi = a.$$

よって,

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_\lambda}{a \cos \phi} h_x \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{a} h_x \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ v &= \frac{u_\lambda}{a \cos \phi} h_y \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{a} h_y \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ u_\lambda &= \frac{u}{a \cos \phi} h_x \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{v}{a \cos \phi} h_y \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ v_\phi &= \frac{u}{a} h_x \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{v}{a} h_y \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{aligned} \tag{5.3.78}$$

であることがわかる．この関係式が地図投影されたデカルト座標系と緯度経度座標系でのベクトル成分の変換規則を示している．したがって，地図投影法に依存する $x = x(\lambda, \phi)$, $y = y(\lambda, \phi)$ を具体的に上式の空間勾配部分に当てはめれば，自動的にベクトル成分の座標変換規則が得られることになる．

メルカトル図法

緯度経度座標でのベクトル成分 (u_λ, v_ϕ) をメルカトル投影したときの投影面上でのベクトル成分 (u_M, v_M) の関係を求める．まず，各座標間の微分関係は (5.3.56) に基づくと，

$$\frac{\partial x_M}{\partial \phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x_M} = \frac{\partial y_M}{\partial \lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial y_M} = 0, \quad \frac{\partial x_M}{\partial \lambda} = a, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_M} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial y_M}{\partial \phi} = \frac{a}{\cos \phi},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_M} = 2 \left[\exp \left(\frac{2y_M}{a} \right) \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) + 1 \right]^{-1} \frac{1}{a} \exp \left(\frac{y_M}{a} \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right) = \frac{\cos \phi}{a} = \left(\frac{\partial y_M}{\partial \phi} \right)^{-1}$$

という関係が得られる^{*22}．ここで，メルカトル投影面上でのデカルト座標を (x_M, y_M) とした．地図投影面座標でのスケール因子 h_x, h_y は (5.3.77) に (5.3.56) を代入すると，

$$h_x = \cos \phi, \quad h_y = a \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial y_M} \right)^2} = a \sqrt{\left(\frac{\partial y_M}{\partial \phi} \right)^{-2}}.$$

^{*22}三角関数の微分の関係として以下を用いた．

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d}{dx} [\ln(\tan x)] = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}.$$

また，(5.3.56) 式より

$$\tan \left(\frac{y_M}{a} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) / \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right)$$

を用いた．

緯度経度座標の関係式を (5.3.78) に代入すると, (x, y) が (x_M, y_M) に, u, v が u_M, v_M に置き換えられるので, 上で得た 3 つの式を用いると,

$$\begin{aligned}
 u_M &= \frac{u_\lambda}{a \cos \phi} h_x \frac{\partial x_M}{\partial \lambda} = u_\lambda, \\
 v_M &= \frac{v_\phi}{a} h_y \frac{\partial y_M}{\partial \phi} = v_\phi, \\
 u_\lambda &= \frac{u_M}{a \cos \phi} h_x \frac{\partial x_M}{\partial \lambda} = u_M, \\
 v_\phi &= \frac{v_M}{a} h_y \frac{\partial y_M}{\partial \phi} = v_M
 \end{aligned} \tag{5.3.79}$$

となる. これらの関係式がメルカトル投影されたデカルト座標系と緯度経度座標系との間でのベクトル成分の関係規則である.

ランベルト正角円錐図法

緯度経度座標でのベクトル成分 (u_λ, v_ϕ) をランベルト投影したときの投影面上でのベクトル成分 (u_L, v_L) の関係を求める. まず, 各座標間の微分関係は (5.3.72), (5.3.73), (5.3.74) に基づくと,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_L}{\partial \phi} &= -a \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)], \\
 \frac{\partial y_L}{\partial \lambda} &= a \cos \phi_1 \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)], \\
 \frac{\partial x_L}{\partial \lambda} &= a \cos \phi_1 \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)], \\
 \frac{\partial y_L}{\partial \phi} &= a \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi} \left[\frac{U(\phi_1)}{U(\phi)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)], \\
 \frac{\partial \lambda}{\partial y_L} &= \frac{1}{a \cos \phi_1} \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_1)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)], \\
 \frac{\partial \phi}{\partial y_L} &= \frac{\cos \phi}{a \cos \phi_1} \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_1)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)], \\
 \frac{\partial \lambda}{\partial x_L} &= \frac{1}{a \cos \phi_1} \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_1)} \right]^n \cos [n(\lambda - \lambda_0)], \\
 \frac{\partial \phi}{\partial x_L} &= -\frac{\cos \phi}{a \cos \phi_1} \left[\frac{U(\phi)}{U(\phi_1)} \right]^n \sin [n(\lambda - \lambda_0)].
 \end{aligned} \tag{5.3.80}$$

ここで、ランベルト投影面上でのデカルト座標を (x_L, y_L) とした。また、下 4 つの式は右辺が x_L, y_L で表記されるが、それを (5.3.72) 式を用いて λ, ϕ に置き直してある^{*23}。地図投影面座標でのスケール因子 h_x, h_y は (5.3.77) から与えられる。緯度経度座標の関係式を (5.3.78) に代入すると、 (x, y) が (x_L, y_L) に、 u, v が u_L, v_L に置き換えられるので、地図投影面座標上でのスケール因子が (5.3.77) であることを用いて、上で得たランベルト投影座標と緯度経度座標の微分と (5.3.77) 式を用いて、(5.3.78) は

$$\begin{aligned} u_L &= \frac{u_\lambda}{\cos \phi} \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_L} \right)^2} \frac{\partial x_L}{\partial \lambda} + v_\phi \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_L} \right)^2} \frac{\partial x_L}{\partial \phi} \\ v_L &= \frac{u_\lambda}{\cos \phi} \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_L} \right)^2} \frac{\partial y_L}{\partial \lambda} + v_\phi \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_L} \right)^2} \frac{\partial y_L}{\partial \phi} \\ u_\lambda &= \frac{u_L}{\cos \phi} \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_L} \right)^2} \frac{\partial x_L}{\partial \lambda} + \frac{v_L}{\cos \phi} \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_L} \right)^2} \frac{\partial y_L}{\partial \lambda} \\ v_\phi &= u_L \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_L} \right)^2} \frac{\partial x_L}{\partial \phi} + v_L \sqrt{\cos^2 \phi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_L} \right)^2} \frac{\partial y_L}{\partial \phi} \end{aligned}$$

となる。上記の空間微分に (5.3.80) を代入すると、

$$\begin{aligned} u_L &= u_\lambda \cos [n(\lambda - \lambda_0)] - v_\phi \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v_L &= u_\lambda \sin [n(\lambda - \lambda_0)] + v_\phi \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \\ u_\lambda &= u_L \cos [n(\lambda - \lambda_0)] + v_L \sin [n(\lambda - \lambda_0)] \\ v_\phi &= -u_L \sin [n(\lambda - \lambda_0)] + v_L \cos [n(\lambda - \lambda_0)] \end{aligned} \tag{5.3.81}$$

^{*23} 上 4 つの式に関しては、 $U(\phi)$ の微分が

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{-n}}{\partial \phi} &= -nU^{-n} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \phi} = -nU^{-n} \frac{1}{U} \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^{-2} \\ &= -nU^{-n} \left[2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right]^{-1} = -nU^{-n} [\cos \phi]^{-1} \end{aligned}$$

となることを、さらに下 4 つの式に関しては、 $f(x, y) = -x/(y - w'_0)$ としたとき、

$$\frac{d}{dx} \arctan f = \frac{1}{f^2 + 1} \frac{df}{dx} = \frac{-f/x}{f^2 + 1}, \quad \frac{d}{dy} \arctan f = \frac{1}{f^2 + 1} \frac{df}{dy} = \frac{f^2/x}{f^2 + 1},$$

また $g(x, y) = \alpha [\beta \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-1/2}]^{1/n}$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arctan g &= \frac{1}{g^2 + 1} \frac{dg}{dx} = \frac{1}{g^2 + 1} \frac{\alpha}{n} [\beta \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-1/2}]^{1/n-1} \beta \left(-\frac{1}{2} 2x \right) \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-3/2} \\ &= -\frac{g}{g^2 + 1} \frac{x}{n} [\{x^2 + (y - w'_0)^2\}]^{-1}, \\ \frac{d}{dy} \arctan g &= \frac{1}{g^2 + 1} \frac{dg}{dy} = \frac{1}{g^2 + 1} \frac{\alpha}{n} [\beta \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-1/2}]^{1/n-1} \beta \left(-\frac{1}{2} 2(y - w'_0) \right) \{x^2 + (y - w'_0)^2\}^{-3/2} \\ &= -\frac{g}{g^2 + 1} \frac{y - w'_0}{n} [\{x^2 + (y - w'_0)^2\}]^{-1} \end{aligned}$$

となることを用いた。

これらの関係式がランベルト投影されたデカルト座標系と緯度経度座標系との間でのベクトル成分の関係規則である。

5.4 Statistics の付録

5.4.1 最小自乗法

あるデータの組、 x, y が存在する。このデータの分布を x を変数とすると、

$$y = y(x)$$

という関係をもつ。このようなデータの組を x についての有限の多項式による線型結合で表すことを考える。ただし、その関数は x での y の値とそのときの関数の値の 2 乗差が最小となるように選ばれたいとする。

まず、簡単のために x について 1 次関数で表現することを考える。このときの関数を

$$F(x) = a_0 + a_1 x \quad (5.4.82)$$

とする。ここで、 a_0, a_1 は x, y に依存しない定数である。実際のデータは離散データであるので、 x_i, y_i というデータの組み合わせとなる。すなわち、 i 番目のデータ対は

$$y_i = y(x_i)$$

である。同様に 1 次関数も

$$F(x) = F(x_i)$$

となる。この直線 $F(x_i)$ と y_i の 2 乗差を最小とすることを考える。つまり、これらの残差を R とすると、

$$R = \sum_{i=1}^N \{y(x_i) - F(x_i)\}^2 = \sum_{i=1}^N \{y(x_i) - a_0 - a_1 x_i\}^2 \quad (5.4.83)$$

が最小となるようにとられなければならない。この条件を満たす関数 F を求めるには、 F の形状を決める x, y に独立な 2 定数 a_0, a_1 を (5.4.83) が最小となるようにとればよいということになる。このような問題を最小自乗法問題といい、次のような手順を用いて解かれる。

1. 残差 R を a_0, a_1 について微分する。
2. それらがともにゼロとなるような a_0, a_1 の値が R の極値である。

3. R はその定義から、 a_0, a_1 のパラメータ空間において、正値をとる下に凸な関数であるため、極値が存在すれば、そこが最小値であるということになる。

この手順にしたがい、

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = 0, \quad \text{and}, \quad \frac{\partial R}{\partial a_1} = 0 \quad (5.4.84)$$

を満たす a_0, a_1 を求める。(5.4.83) 式から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^N \{y(x_i) - a_0 - a_1 x_i\} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^N x_i \{y(x_i) - a_0 - a_1 x_i\} = 0 \end{aligned} \quad (5.4.85)$$

である。これを整理すると、

$$\begin{aligned} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i &= \sum_{i=1}^N y(x_i) \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N x_i y(x_i) \end{aligned} \quad (5.4.86)$$

という a_0, a_1 についての 1 次連立方程式が得られるので、これを解けば、 a_0, a_1 が得られ、最小自乗直線が得られる。(5.4.86) 式を解くと、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y(x_i) - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y(x_i)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} \\ a_1 &= \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y(x_i) - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y(x_i)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} \end{aligned} \quad (5.4.87)$$

が得られる。同様の考えを発展させると、任意の有限次数の多項式曲線によるフィッティングが可能であることがわかる。

そこで、ここでは、 $F(x) = \sum_{k=0}^M a_k x^k$ という多項式でフィッティングすることを考える。ここでも最小自乗法で用いた手法が適用できる^{*24}。残差 R は

$$R = \sum_{i=1}^N \{y_i - F(x_i)\}^2 = \sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \sum_{k=0}^M a_k x_i^k \right\}^2 \quad (5.4.88)$$

となり、この値を最小にするには、 $a_k, (k = 0, 1, \dots, M)$ の各係数について、それによる残差の微分がゼロとなればよい。つまり、

$$\frac{\partial R}{\partial a_j} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.89)$$

^{*24}以降では、表記の簡便さから、 $y(x_i) = y_i$ と表記する。

という $M+1$ 個の 1 次連立方程式を立てることができる。未知係数 $M+1$ 個について、独立な $M+1$ 個の連立方程式が立てられるので、完全に閉じた系であることは明らかである。これは非常に一般化されているので、任意の $M+1$ 次多項式で近似しても、同様の計算でフィッティングができることを示唆している。(5.4.89) 式を具体的に計算すると、

$$\sum_{i=1}^N x_i^j \left\{ y_i - \sum_{k=0}^M a_k x_i^k \right\} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M)$$

となり、これを整理すると、

$$\sum_{i=1}^N x_i^j y_i - \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M a_k x_i^{k+j} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.90)$$

となる。左辺第 2 項については、総和演算の順序が可換であるため、

$$\sum_{i=1}^N x_i^j y_i - \sum_{k=0}^M a_k \sum_{i=1}^N x_i^{k+j} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.91)$$

となる。これを具体的に展開すると、以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned} j=0 & : a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i + \dots + a_M \sum_{i=1}^N x_i^M = \sum_{i=1}^N y_i \\ j=1 & : a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + \dots + a_M \sum_{i=1}^N x_i^{M+1} = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ & \vdots \\ j=M & : a_0 \sum_{i=1}^N x_i^M + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{M+1} + \dots + a_M \sum_{i=1}^N x_i^{2M} = \sum_{i=1}^N x_i^M y_i \end{aligned} \quad (5.4.92)$$

これを見ると、 $k = M+1$ 行 $j = M+1$ 列の正方行列と $M+1$ 個の係数 a_j についての列ベクトルの積とすると、正方行列の逆行列を求めることで、完全に a_j が求められることになる。このとき、正方行列は対称行列となっていることに注意。

さらに変数が多変数の場合にも拡張ができる。ここでは、 $F(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^M a_k x_k$ という多変数多項式でフィッティングすることを考える。このとき、 x_k は互いに独立な変数であり、 \mathbf{x} はその集合である。上と同様にこのときの残差 R は

$$R = \sum_{i=1}^N \{y_i - F(\mathbf{x}_i)\}^2 = \sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \sum_{k=0}^M a_k x_{k,i} \right\}^2 \quad (5.4.93)$$

となり、この値を最小にするには、 $a_k, (k = 0, 1, \dots, M)$ の各係数について、それによる残差の微分がゼロとなればよい。つまり、

$$\frac{\partial R}{\partial a_j} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.94)$$

という $M + 1$ 個の 1 次連立方程式を立てることができる。未知係数 $M + 1$ 個について、独立な $M + 1$ 個の連立方程式が立てられるので、完全に閉じた系であることは明らかである。(5.4.94) 式を具体的に計算すると、

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} \left\{ y_i - \sum_{k=0}^M a_k x_{k,i} \right\} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M)$$

となり、これを整理すると、

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} y_i - \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M a_k x_{k,i} x_{j,i} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.95)$$

となる。左辺第 2 項については、総和演算の順序が可換であるため、

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} y_i - \sum_{k=0}^M a_k \sum_{i=1}^N x_{k,i} x_{j,i} = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (5.4.96)$$

となる。これを具体的に展開すると、以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned} j = 0 : & a_0 \sum_{i=1}^N x_{0,i}^2 + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1,i} x_{0,i} + \dots + a_M \sum_{i=1}^N x_{M,i} x_{0,i} = \sum_{i=1}^N x_{0,i} y_i \\ j = 1 : & a_0 \sum_{i=1}^N x_{0,i} x_{1,i} + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1,i}^2 + \dots + a_M \sum_{i=1}^N x_{M,i} x_{1,i} = \sum_{i=1}^N x_{1,i} y_i \\ & \vdots \\ j = M : & a_0 \sum_{i=1}^N x_{0,i} x_{M,i} + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1,i} x_{M,i} + \dots + a_M \sum_{i=1}^N x_{M,i}^2 = \sum_{i=1}^N x_{M,i} y_i \end{aligned} \quad (5.4.97)$$

これを見ると、 $k = M + 1$ 行 $j = M + 1$ 列の正方行列と $M + 1$ 個の係数 a_j についての列ベクトルの積とすると、正方行列の逆行列を求めることで、完全に a_j が求められることになる。このとき、正方行列は対称行列となっていることに注意。

5.4.2 線形内挿

ここでは、本ルーチンで行っている内挿方法について証明し、将来導入予定の内挿方法についても証明を行う。

まず、本ルーチンでは、すべての内挿ルーチンにおいて、線形内挿を行っている。この内挿方法は、参照点 2 点からその間の値を 2 点の直線で結び、その直線上に値が存在すると仮定した内挿法である。1 次元の模式図は図??に示されている。ある値 y_{i+1}, y_i が定義された異なる 2 点 x_{i+1}, x_i をもとに、その間に存在する内挿点 x_p での線形内挿の値 y_p は参照する 2 点から計算された直線の傾きを dx とすると、

$$y_p = y_i + dx * (x_p - x_i)$$

で計算することができる。このとき、 dx は $\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ となる。

この考えを 2 次元空間に拡張したのが、双線形内挿と呼ばれる方法であり、その模式図は図??に示されている。2 次元空間 x_i, y_j で定義された値 z_{ij} の、ある空間点 x_p, y_q での内挿値 z_{pq} は、以下のように計算される。

$$z_{pq} = z_{pj} + \frac{z_{pj+1} - z_{pj}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j)$$

これは、 y_j, y_{j+1} の 2 点について、それぞれ x_p における内挿値 $z_{p,j+1}, z_{p,j}$ を計算し、それらの値から y 方向に線形内挿して、 z_{pq} を求めるという手続きになる。上式を整理すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} z_{pq} &= z_{pj} + \frac{z_{pj+1} - z_{pj}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) \\ &= z_{ij} + \frac{z_{i+1j} - z_{ij}}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) \\ &\quad + \left[z_{ij+1} + \frac{z_{i+1j+1} - z_{ij+1}}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) \right. \\ &\quad \left. - z_{ij} - \frac{z_{i+1j} - z_{ij}}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) \right] \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\ &= z_{ij} + \frac{z_{i+1j} - z_{ij}}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) + \frac{z_{ij+1} - z_{ij}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) \\ &\quad [z_{i+1j+1} - z_{ij+1} - z_{i+1j} + z_{ij}] \frac{(x_p - x_i)(y_q - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)} \end{aligned} \quad (5.4.98)$$

これより、双線形内挿は、 $F(x, y) = a + bx + cy + dxy$ という平面上に内挿値が存在するということを仮定した内挿であるということが示される。

同様の議論で 3 次元の線形内挿を計算すると^{*25}、3 次元空間 x_i, y_j, z_k で定義された値 u_{ijk} の、ある空間点 x_p, y_q, z_r での内挿値 u_{pqr} は、以下のように計算される。

$$u_{pqr} = u_{pqk} + \frac{u_{pqk+1} - u_{pqk}}{z_{k+1} - z_k} (z_r - z_k)$$

^{*25} 模式図は図??に示されている。

この計算手続きは 2 次元の内挿をさらに 3 次元に単純拡張しただけである。よって、上式をさらに整理すると、

$$\begin{aligned}
u_{pqr} &= u_{pqk} + \frac{u_{pqk+1} - u_{pqk}}{z_{k+1} - z_j} (z_r - z_k) \\
&= u_{pj k} + \frac{u_{pj+1 k} - u_{pj k}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) \\
&\quad + \left[u_{pj k+1} + \frac{u_{pj+1 k+1} - u_{pj k+1}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) - u_{pj k} - \frac{u_{pj+1 k} - u_{pj k}}{y_{j+1} - y_j} (y_q - y_j) \right] \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&= u_{pj k} + (u_{pj+1 k} - u_{pj k}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} + (u_{pj k+1} - u_{pj k}) \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + (u_{pj+1 k+1} - u_{pj k+1} - u_{pj+1 k} + u_{pj k}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&= u_{ijk} + (u_{i+1 j k} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\
&\quad + \left[u_{ij+1 k} + (u_{i+1 j+1 k} - u_{ij+1 k}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - u_{ijk} - (u_{i+1 j k} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
&\quad + \left[u_{ijk+1} + (u_{i+1 j k+1} - u_{ik+1}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - u_{ijk} - (u_{i+1 j k} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + \left[u_{ij+1 k+1} + (u_{i+1 j+1 k+1} - u_{ij+1 k+1}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - u_{ijk+1} - (u_{i+1 j k+1} - u_{ijk+1}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right. \\
&\quad \left. - u_{ij+1 k} - (u_{i+1 j+1 k} - u_{ij+1 k}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + u_{ijk} + (u_{i+1 j k} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right] \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&= u_{ijk} + (u_{i+1 j k} - u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + (u_{ij+1 k} - u_{ijk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
&\quad + (u_{ijk+1} - u_{ijk}) \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + (u_{i+1 j+1 k} - u_{ij+1 k} - u_{i+1 j k} + u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \\
&\quad + (u_{i+1 j k+1} - u_{ik+1} - u_{i+1 j k} + u_{ijk}) \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + (u_{ij+1 k+1} - u_{ijk+1} - u_{ij+1 k} + u_{ijk}) \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \\
&\quad + (u_{i+1 j+1 k+1} - u_{ij+1 k+1} - u_{i+1 j k+1} + u_{ijk+1} - u_{i+1 j+1 k} + u_{ij+1 k} + u_{i+1 j k} - u_{ijk}) \\
&\quad \times \frac{(x_p - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(y_q - y_j)}{y_{j+1} - y_j} \frac{(z_r - z_k)}{z_{k+1} - z_j} \tag{5.4.99}
\end{aligned}$$

となる。

ここで示した内挿の式はデカルト座標系を仮定しているが、直交座標系のうち、各座標変数のスケール因子がそれぞれの座標変数を引数に持たないような座標系^{*26}であるなら、

^{*26}つまり、任意の座標系 (x_1, x_2, x_3) があつたとする。このとき、これらの座標に対するスケール因子 (h_1, h_2, h_3) が、

$$h_1 = h_1(x_2, x_3), \quad h_2 = h_2(x_3, x_1), \quad h_3 = h_3(x_1, x_2)$$

となるような座標系のこと。例えば、円筒座標系や球座標系はこれに該当する。

全て上の各式で内挿値を計算することができる.

5.4.3 スプライン補間

以下では $M = 3$ のときのスプライン補間公式を導出する。ここで得られるスプライン補間を特に 3 次スプライン補間と呼ぶ。データ点は先と同じように x_i ($i = 1, \dots, N$) 点で y_i と定義されているとする。このときのスプライン関数 $S(x)$ は

$$S(x) = \sum_{i=1}^{N-1} S_i(x),$$

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \quad (5.4.100)$$

となる。ここで、 a_i, b_i, c_i, d_i は未知係数である。上式について、全データ点ではスプライン関数と実際のデータが一致するという条件から

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i, & S_{i-1}(x_i) &= y_i, & (i = 2, \dots, N-1) \\ S_1(x_1) &= y_1, & S_{N-1}(x_N) &= y_N \end{aligned} \quad (5.4.101)$$

が成り立ち、データ点 x_i ($i = 2, \dots, N-1$) での接続の定理から

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), \quad S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad (5.4.102)$$

という $4(N-1) - 2$ 個の関係式が得られる。(??) 式を用いて上の 4 つの式を具体的に表すと、 $i = 2, \dots, N-1$ について

$$d_i = y_i, \quad (5.4.103)$$

$$a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1} = y_i, \quad (5.4.104)$$

$$c_i = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}, \quad (5.4.105)$$

$$b_i = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + b_{i-1} \quad (5.4.106)$$

が成り立つ。これらをもとに、既知の値から未知係数 a_i, b_i, c_i, d_i を求める。まず、(5.4.103) から

$$d_i = y_i. \quad (5.4.107)$$

$h_i \equiv x_i - x_{i-1}$ と定義すると、(5.4.106) から

$$a_{i-1} = \frac{b_i - b_{i-1}}{3h_i}. \quad (5.4.108)$$

(5.4.104) から

$$c_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{b_i + 2b_{i-1}}{3}h_i. \quad (5.4.109)$$

これらを (5.4.105) に代入し b_i のみの式にすると、

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{b_{i+1} + 2b_i}{3} h_{i+1} &= (b_i - b_{i-1})h_i + 2b_{i-1}h_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{b_i + 2b_{i-1}}{3} h_i \\ \Rightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} &= \frac{h_{i+1}}{3} b_{i+1} + \frac{2}{3} [h_{i+1} + h_i] b_i + \frac{h_i}{3} b_{i-1}. \end{aligned} \quad (5.4.110)$$

という b_i についての線形連立方程式となる。ここで、上式が成り立つのは $i = 2, \dots, N-2$ であることに注意する。なぜなら、ここまでの議論はすべて $i = 2, \dots, N-1$ の場合の議論を行ってきたため、 a, c, d の各係数について d_i は (5.4.107) から $d_2 \sim d_{N-1}$ まで、 a_i は (5.4.108) から $a_1 \sim a_{N-2}$ まで、 c_i は (5.4.109) から $c_1 \sim c_{N-2}$ までのみの関係が与えられていることに注意する。つまり、漸化式 (5.4.105) は $i = N-1$ においてのみ b_i との関係式 (5.4.109) を用いることができないということである。 a_{N-1} , c_{N-1} , d_1 はそれぞれ以下に考える追加の条件から得られる関係式を用いて求めることになる。これが上で述べた (5.4.110) の適用範囲が $i = 2, \dots, N-2$ までとなる根拠である。 b_i は $N-1$ 個あるのに対し、上式は $N-3$ 個しかないので、追加で必要となる b_i についての式は 2 個となることがわかる。

関係式を 2 つ追加するために両端での微分条件を考える。ここでは一般性を失わないように、以下の 2 つの場合について考える：

ケース 1 $S'(x_1) = T'_1$, $S'(x_N) = T'_N$.

ケース 2 $S''(x_1) = T''_1$, $S''(x_N) = T''_N$.

ここで T'_1 , T'_N , T''_1 , T''_N はユーザが指定する値である。特に、ケース 2 の場合に $T''_1 = T''_N = 0$ であるなら、自然スプラインに一致する。

ケース 1 の場合、上の追加条件から

$$\begin{aligned} c_1 &= T'_1, \\ 3a_{N-1}(x_N - x_{N-1})^2 + 2b_{N-1}(x_N - x_{N-1}) + c_{N-1} &= T'_N \end{aligned} \quad (5.4.111)$$

とできる。これを用いると、 $i = 1, N$ の場合についても (5.4.103), (5.4.104), (5.4.111) あるいは (5.4.118) から

$$d_1 = y_1, \quad a_{N-1}h_N^3 + b_{N-1}h_N^2 + c_{N-1}h_N + y_{N-1} = y_N, \quad (5.4.112)$$

および、

$$c_1 = T'_1, \quad 3a_{N-1}h_N^2 + 2b_{N-1}h_N + c_{N-1} = T'_N, \quad (5.4.113)$$

から b_i についての式にする。(5.4.113) 第 1 式と (5.4.109) の $i = 2$ から c_1 を消去して

$$b_2 + 2b_1 = 3 \frac{y_2 - y_1}{h_2^2} - 3 \frac{T'_1}{h_2}, \quad (5.4.114)$$

(5.4.113) 第 2 式と (5.4.112) 第 2 式から a_{N-1} を消去して

$$c_{N-1} = -\frac{h_N}{2} b_{N-1} - \frac{T'_N}{2} + 3 \frac{y_N - y_{i-1}}{2h_N}. \quad (5.4.115)$$

これを $i = N - 1$ のときの (5.4.105) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h_N}{2}b_{N-1} - \frac{T'_N}{2} + 3\frac{y_N - y_{i-1}}{2h_N} = 3a_{N-2}h_{N-1}^2 + 2b_{N-2}h_{N-1} + c_{N-2} \\
 \Rightarrow & \left[\frac{2}{3}h_{N-1} + \frac{h_N}{2} \right] b_{N-1} + \frac{b_{N-2}}{3}h_{N-1} = -\frac{T'_N}{2} + 3\frac{y_N - y_{N-1}}{2h_N} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}}
 \end{aligned} \tag{5.4.116}$$

ここで、第 2 式は $i = N - 1$ のときの (5.4.108), (5.4.109) 式を用いて a_{N-2} , c_{N-2} を消去した。

以上より、(5.4.110), (5.4.114), (5.4.116) から

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_3 + h_2) & h_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & h_i & 2(h_{i+1} + h_i) & h_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-1} + h_{N-2}) & h_{N-1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 2h_{N-1} & 4h_{N-1} + 3h_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \end{pmatrix} \tag{5.4.117}$$

となり、 b_i について解くことができるようになる。ここで、

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 3\frac{y_2 - y_1}{h_2^2} - 3\frac{T'_1}{h_2}, \\
 z_i &= 3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - 3\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad (i = 2, \dots, N-2), \\
 z_{N-1} &= -3T'_N + 9\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - 6\frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}}
 \end{aligned}$$

である。 b_i が得られたらその値をもとに a_i , c_i , d_i を求める。 a_i は $i = 1, \dots, N-2$ について (5.4.104) から、 $i = N-1$ については (5.4.113) 第 2 式から得られる。 c_i については $i = 1, N-1$ については (5.4.113) 第 1 式、(5.4.115) からそれぞれ、また $i = 2, \dots, N-2$ については (5.4.109) から得られる。 d_i については (5.4.107), (5.4.112) から得られる。これですべての未知係数が得られたので、(5.4.101) から補間されたスプライン関数が得られる。

ケース 2 の場合、先の追加条件から

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{T_1''}{2}, \\ 3a_{N-1}(x_N - x_{N-1}) + b_{N-1} &= \frac{T_N''}{2} \end{aligned} \quad (5.4.118)$$

とできる。これを用いると、 $i = 1, N$ の場合についても

$$b_1 = \frac{T_1''}{2}, \quad 3a_{N-1}h_N + b_{N-1} = \frac{T_N''}{2}, \quad (5.4.119)$$

から b_i についての式にすることができる。(5.4.119) 第 1 式から明らかに

$$b_1 = \frac{T_1''}{2}, \quad (5.4.120)$$

(5.4.119) 第 2 式と (5.4.112) 第 2 式から a_{N-1} を消去して

$$c_{N-1} = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{T_N''}{6}h_N - \frac{2h_N}{3}b_{N-1}. \quad (5.4.121)$$

これを $i = N - 1$ のときの (5.4.105) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{T_N''}{6}h_N - \frac{2h_N}{3}b_{N-1} &= 3a_{N-2}h_{N-1}^2 + 2b_{N-2}h_{N-1} + c_{N-2} \\ \Rightarrow 2[h_N + h_{N-1}]b_{N-1} + h_{N-1}b_{N-2} &= 3\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{T_N''}{2}h_N - 3\frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} \end{aligned} \quad (5.4.122)$$

が得られる。ここで、第 2 式は $i = N - 1$ のときの (5.4.108), (5.4.109) 式を用いて a_{N-2} , c_{N-2} を消去した。

以上より、(5.4.110), (5.4.114), (5.4.116) から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_3 + h_2) & h_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & h_i & 2(h_{i+1} + h_i) & h_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-1} + h_{N-2}) & h_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & h_{N-1} & 2(h_N + h_{N-1}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \end{pmatrix} \quad (5.4.123)$$

となり、 b_i について解くことができるようになる。ここで、

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{T_1''}{2}, \\ z_i &= 3 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - 3 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, (i = 2, \dots, N-2), \\ z_{N-1} &= 3 \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - 3 \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} - \frac{T_N''}{2} h_N \end{aligned}$$

である。 b_i が得られたらその値をもとに a_i , c_i , d_i を求める。 a_i は $i = 1, \dots, N-2$ について (5.4.104) から、 $i = N-1$ について (5.4.119) 第 2 式から得られる。 c_i は $i = 1, \dots, N-2$ については (5.4.109) から、 $i = 1, N-1$ については (5.4.121) から得られる。 d_i については (5.4.107), (5.4.112) から得られる。これですべての未知係数が得られたので、(5.4.101) から補間されたスプライン関数が得られる。

5.5 Braun (2002) による熱帯低気圧の中心位置推定

ここでは、Braun (2002) で用いられている、数値モデルにおける熱帯低気圧の中心位置を推定する方法について述べる。

そもそも、成熟期の熱帯低気圧は第一近似として静力学バランスしているので、熱帯低気圧の中心は、海面更正気圧の最低値をとる水平格子点でよく代表される。水平解像度が 10 km 以上の静力学数値モデルではこの海面更正気圧の最低点が熱帯低気圧の軸対称な中心を表していた。しかし、近年では数値モデルの非静力学化・高解像度化に伴い、熱帯低気圧の内部コア (中心から半径 100 km 程度) の力学・熱力学構造を詳細に表現することが可能となった。すると、低解像度な数値モデルによる熱帯低気圧の計算では表面化しなかった、中心付近での局所的な気圧変動が顕著に見られるようになった^{*27} (Braun, 2002)。この局所的な気圧変動により、以前のような海面気圧の最低点で中心を定義する手法を用いると、中心点が幾何的な中心点に対してその周囲を回転するという振動現象が見られるようになる (図 5.13 参照)。Braun の用いた手法は、この中心点の振動を抑制する効果がある。

手法の概要は以下のようなになる。

^{*27} この局所的な気圧変動は、数値モデルにおける非静力学動圧に起因するものである。

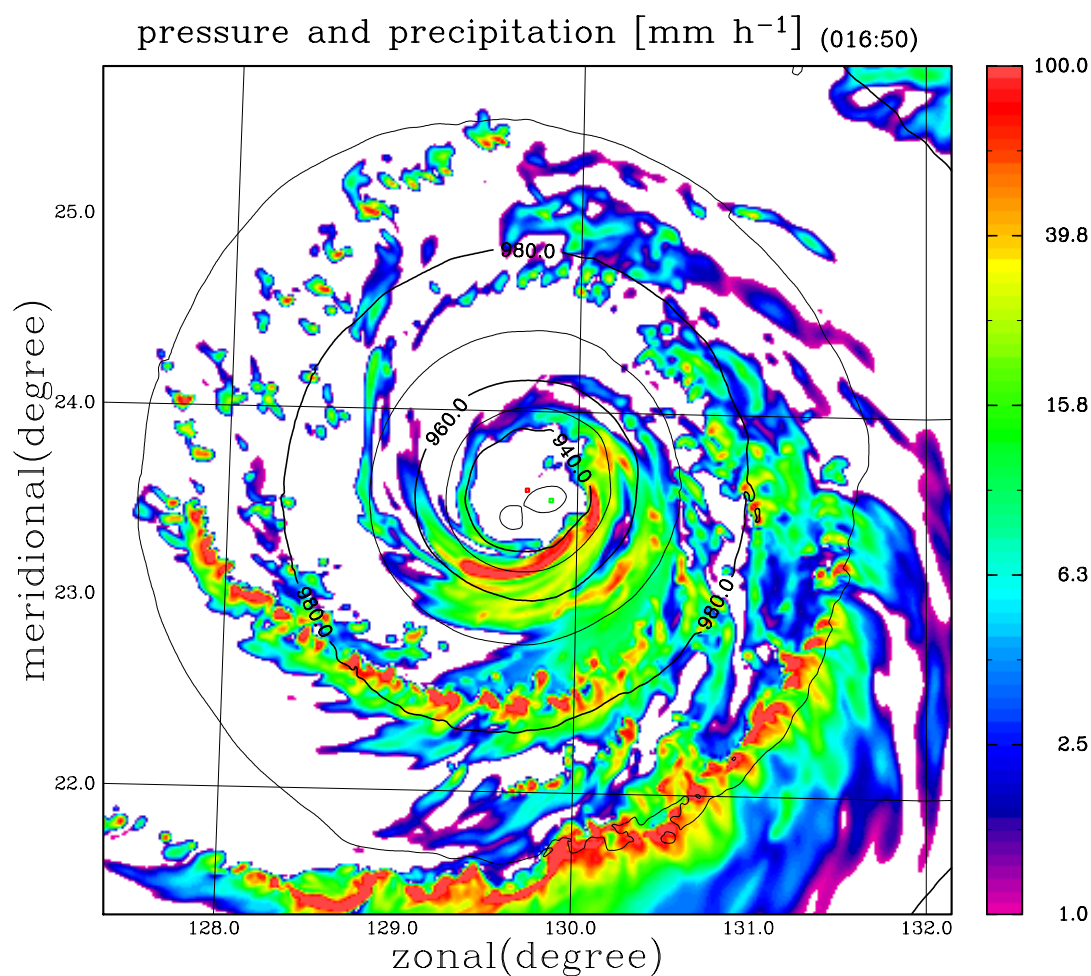


図 5.10: 非静力学数値モデルにおいて再現された典型的な台風における海面気圧の最低点 (緑点) と Braun (2002) の手法において推定された幾何的な中心点 (赤点). 等値線は海面気圧の分布, カラーは降水分布. この図が示すように, 内部コア域における局所的な気圧の変動によって, 幾何的な中心と最低気圧点が非常に異なることがわかる.

1. 海面更正気圧の最低値をとる点を第一推定点 (図 5.11 の fg) とする.
2. 図 5.11 において, 第一推定点を中心として長さ L の正方形領域内 (図 5.11 の赤枠内) に存在する格子点すべてを探索候補点とする.
3. 探索候補点の全点について, その各点を中心として半径 R の円形領域内 (図 5.11 の緑線内) に存在する格子点の全てについて接線平均 (図 5.12) からの標準偏差を計算し, 計算された円形領域内の格子点全ての標準偏差を足し合わせる.
4. この時点で, 探索候補点全点について, 半径 R の円形領域内の標準偏差和の値が存在しているので, この和が最小となる格子点を真の中心点と定義する. これは, 気圧について, 最も円形 (軸対称構造) となっている点を探索していることになる.

このプロセスにおける各パラメータを実際のサブルーチンの引数と対応させると,

fg = 第一推定点, var_dis = 半径 R , $search_dis$ = 探索候補領域 L

という対応関係になる.

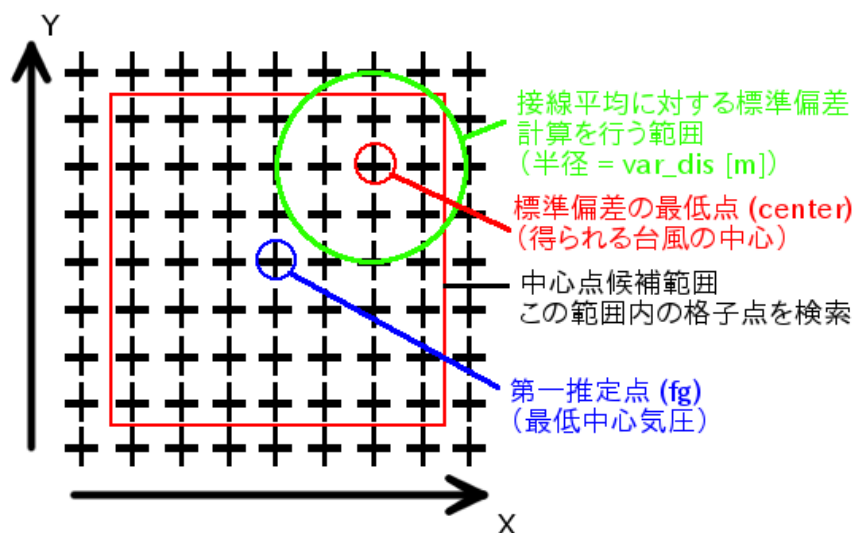


図 5.11: Braun 法の概念図 1. 第一推定点を中心に $search_dis$ の長さの正方形領域 (赤線) 内に存在する格子点全てが中心点候補となる. この中心点候補の全てについて, 図 5.12 の方法で接線平均偏差を計算する (上図では緑線の範囲がそれに相当する).

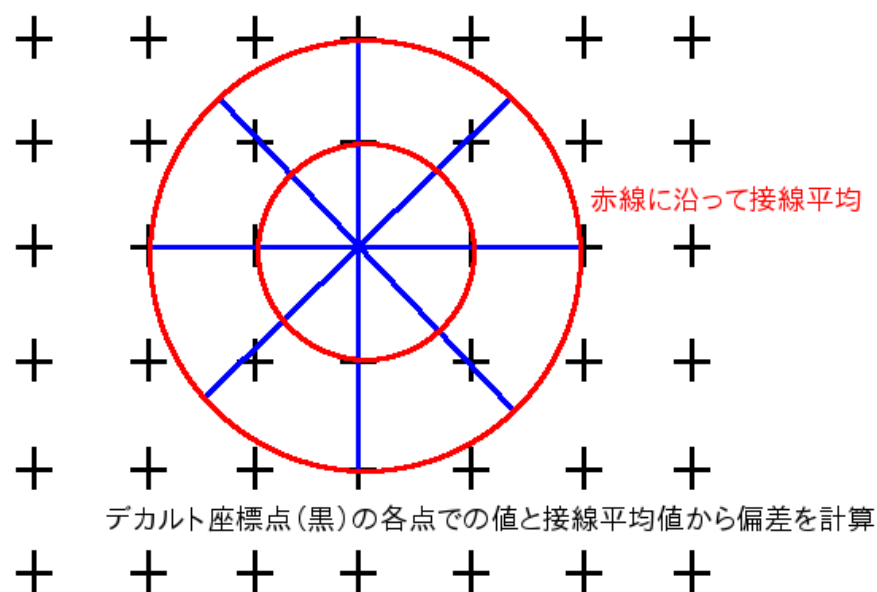


図 5.12: Braun 法の概念図 2. 中心点候補の全てについて同じ方法で接線平均偏差を計算してその最低値をとる点 (つまり, 接線方向の変動が一番少ない点) を探索する. 接線平均の動径方向格子点間隔は元のデカルト格子点の間隔と同じにする.

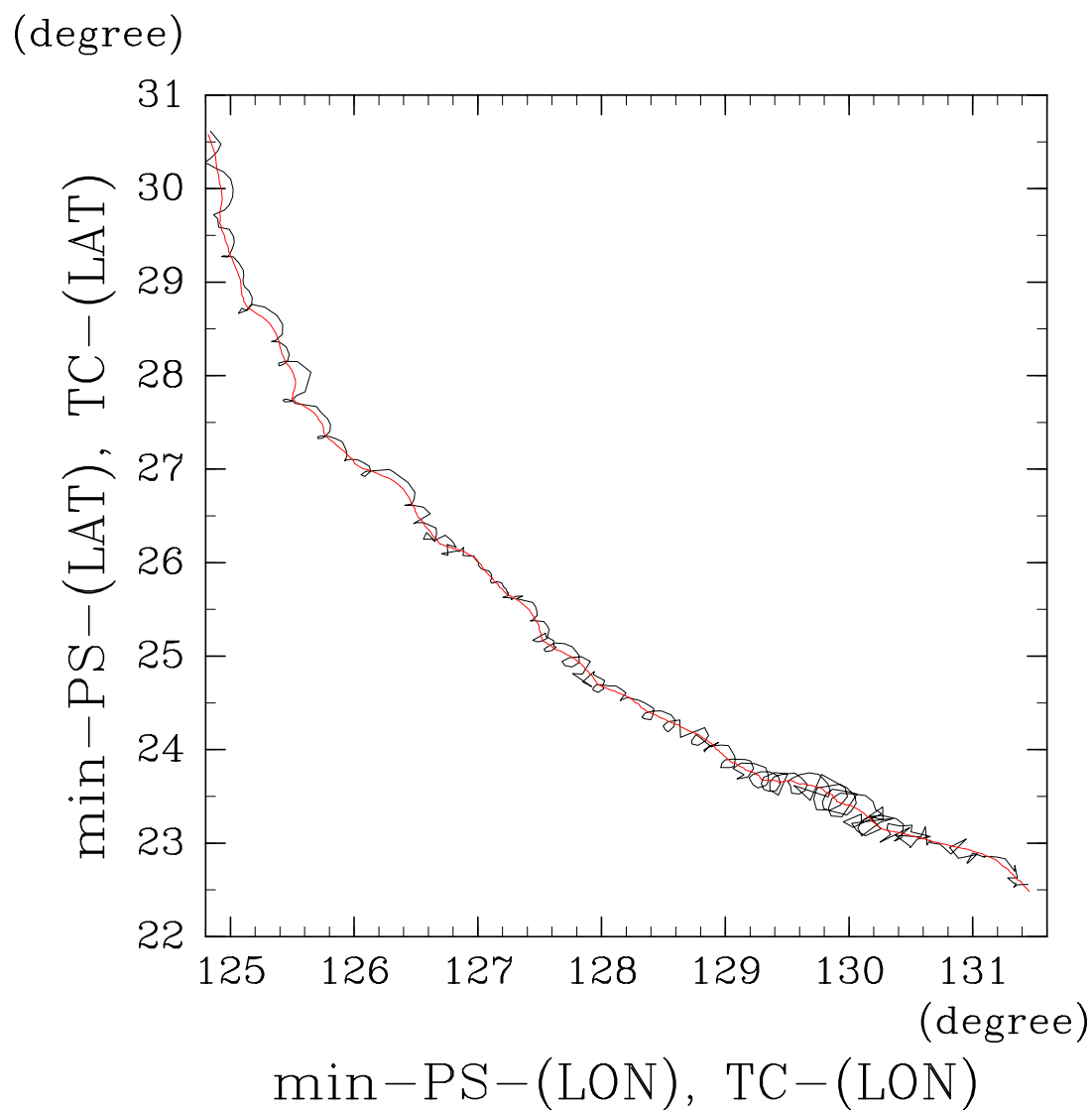


図 5.13: 図 5.10 の再現計算における緑点 (最低気圧点) と赤点 (Braun 手法) の距離の時間変化. この図では黒線が最低気圧点の軌跡を, 赤点が Braun 手法の中心点の軌跡を表している. この結果からも, 最低気圧点は顕著に振動していることが明らかである.

5.6 Kurihara et al. (1990) によるフィルタリング処理

ここでは, Kurihara et al. (1990) で提案されている局所スムージング作用素を利用した, 任意波動成分のフィルター作用素の数学的根拠を証明する. 以下は, Kurihara et al. (1990) で構築されたフィルター作用素の根拠として挙げられている Shuman (1957) に基づいている.

離散化された任意の 1 次元データ z_i を考える. ここで, i は格子番号である. このとき, i を中心にした隣接 3 格子での最も簡単なスムージング要素は

$$\bar{z}_i \equiv \mu z_i + \frac{1}{2}(1 - \mu)(z_{i-1} + z_{i+1}) \quad (5.6.124)$$

である. ここで, \bar{z}_i はスムージングされた物理量を表す. μ はスムージングの際の重みであり, $\mu = 1/3$ ならば, 隣接 3 点での単純平均操作に等しくなる. 上式は

$$\bar{z}_i = z_i + \frac{1}{2}\nu(z_{i-1} + z_{i+1} - 2z_i) \quad (5.6.125)$$

と書き換えられる. ここで, $\nu = 1 - \mu$ である. ν は相変わらずスムージングでの重みを表す. 今, z_i は独立変数 x_i が張る空間において定義されており,

$$z_i = C + A \cos(k(x_i - \bar{x}))$$

と表記できるとする. ここで, $k\bar{x}$ は任意の一定位相を表す. k は波数であり, 波長 L との間には $k = 2\pi/L$ という関係をもつ. このとき, 三角関数の合成から

$$\begin{aligned} z_{i\pm 1} &= C + A \cos k(x_{i\pm 1} - \bar{x}) \\ &= C + A \cos k(x_i \pm \Delta x - \bar{x}) \\ &= C + A [\cos k(x_i - \bar{x}) \cos k\Delta x \mp \sin k(x_i - \bar{x}) \sin k\Delta x] \end{aligned}$$

となる (複号同順). ここで, Δx は空間 x_i の格子点距離である. なお, ここでは x_i は等間隔に配置されているとする. 上式を (5.6.125) に代入すると,

$$\begin{aligned} \bar{z}_i &= C + A \cos k(x_i - \bar{x}) + \nu [A \cos k(x_i - \bar{x}) \cos k\Delta x - A \cos k(x_i - \bar{x})] \\ &= C + [1 - \nu(1 - \cos k\Delta x)] A \cos k(x_i - \bar{x}) \end{aligned} \quad (5.6.126)$$

と整理される. したがって, このスムージングは, ν の値によって z_i のもつ波数も位相も変化させないスムージングとなっていることがわかる. 一方, その振幅については, $[1 - \nu(1 - \cos k\Delta x)]$ 倍変化させることがわかる. 今, ν は使用者によって任意に決めることができる. もし, (5.6.126) 式の右辺第 2 項の係数がゼロとなる:

$$1 - \nu(1 - \cos k\Delta x) = 0$$

ように ν を設定すれば, (5.6.126) 式によって波数 k の振幅がゼロとなり, その波数成分を完全に除去することができる. これは, スムージング作用素 (5.6.124) が重みの選び方で,

特定波数の成分を数学的に完全にフィルタアウトすることができることを意味している (すなわち, フィルター作用素として機能することを意味している).

これまでの議論では, z_i が 1 つの波数成分のみをもっているときを考えたが, 任意の波の重ね合わせでも同じ議論が可能である. 物理量 z が空間 x についてフーリエ級数で表現されるとする:

$$z_i = \sum_n \hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}).$$

このとき, スムージング作用素 (5.6.125) は上と同様の三角関数合成により,

$$\begin{aligned} \bar{z}_i &= \sum_n \left[\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2} \nu (\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \Delta x - \bar{x}) + \hat{z}_n \cos k_n(x_i + \Delta x - \bar{x}) - 2\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x})) \right] \\ &= \sum_n [\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}) + \nu (\hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}) \cos k_n \Delta x - \hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}))] \\ &= \sum_n [1 - \nu (1 - \cos k_n \Delta x)] \hat{z}_n \cos k_n(x_i - \bar{x}) \end{aligned}$$

が得られる. ここでも, ν は使用者が任意に決定できるため, ある特定の 1 つの波数 k_c について

$$1 - \nu (1 - \cos k_c \Delta x) = 0$$

すなわち,

$$\nu = (1 - \cos k_c \Delta x)^{-1} \quad (5.6.127)$$

となるように ν を指定すれば, スムージングによって z に含まれる波数 k_c のモードは完全にフィルタアウトすることができる. このとき, ν は k のみに依存するので, k_c 以外の波数成分は振幅がゼロにならずに z に残ることになる. 異なる複数の波をフィルタするには, スムージング作用素 (5.6.125) を重み ν を変えて複数回行えばよい. 異なる M 個の波数成分を除去するスムージングを

$$\bar{z}_i^M \equiv \bar{z}_i^{M-1} + \frac{1}{2} \nu \left(\bar{z}_{i-1}^{M-1} + \bar{z}_{i+1}^{M-1} - 2\bar{z}_i^{M-1} \right) \quad (5.6.128)$$

として定義する. l 回目のスムージング係数は

$$\nu_l = (1 - \cos k_{m(l)} \Delta x)$$

となる. ここで, $k_{m(l)}$ は l 回目でフィルタアウトされる波数を意味する. スムージング作用素 (5.6.125) が波数と位相を変化させず, 振幅のみを変化させる:

$$\bar{z}_i^M = \sum_n \bar{\hat{z}}_n^M \cos k_n(x_i - \bar{x})$$

であることに注意すれば, (5.6.128) を (??) のようにフーリエ級数で表現することを考えると,

$$\bar{z}_i^M = \sum_n \bar{\hat{z}}_n^M \cos k_n(x_i - \bar{x}) = \sum_n [1 - \nu_M (1 - \cos k_n \Delta x)] \bar{\hat{z}}_n^{M-1} \cos k_n(x_i - \bar{x})$$

という漸化式が成り立つ．上式はフーリエの各モード n で独立に成り立つことに注意すると、 n 番目のモードで

$$\bar{z}_n^M = [1 - \nu_M (1 - \cos k_n \Delta x)] \bar{z}_n^{M-1}$$

が成り立つ．よって、ただちに \bar{z}_n^M に対して、

$$\bar{z}_n^M = \hat{z}_n \prod_{l=1}^M [1 - \nu_l (1 - \cos k_n \Delta x)] \quad (5.6.129)$$

という関係が得られる．この式は、 M 個の波数のフィルタリングによって、フィルタアウトされなかった成分がとる、フィルタ後の振幅を表している．つまり、フィルタアウトされなかった成分はこの M 回のフィルタ作用によって、振幅がもとの

$$\prod_{l=1}^M [1 - \nu_l (1 - \cos k_n \Delta x)]$$

倍になるということを意味する．!!!! 以降、Shuman の 図 1 の説明と 2 次元版の導出．

なお、Kurihara et al. (1990) では、 ν を

$$\nu = (1 - \cos 2\pi/m)^{-1}, \quad m = 2, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 2, 8, 9, 2 \quad (5.6.130)$$

という順番で 11 回フィルタ操作を行うと、 $2\Delta x$ から 9Δ までの波長をもつ波が完全にフィルタアウトされると述べている．これは、(5.6.127) 式と $k = 2\pi/L$ という関係を考えて、

$$\nu = (1 - \cos k_c \Delta x)^{-1} = (1 - \cos 2\pi \Delta x / m \Delta x)^{-1}$$

となることから、波長 $L = m\Delta x$ の波が (5.6.130) 式でフィルタアウトされることになる．このとき、フィルタアウトされない成分の振幅が (5.6.130) の操作でどの程度変化するかを見積もる．フィルタアウトされない任意の波数を $k_r = 2\pi/R\Delta x$ とすると、(5.6.129) 式から上の 11 回のスムージング操作によって、その振幅は

$$\bar{z}_r^{11} = \hat{z}_r \prod_{l=1}^{11} [1 - \nu_l (1 - \cos 2\pi/R)] \quad (5.6.131)$$

となる．たとえば、 $R = 15, 20, 30$ の場合^{*28}の振幅はそれぞれ、

$$R = 15 : 0.179, \quad R = 20 : 0.400, \quad R = 30 : 0.675$$

となり、それぞれオリジナルの振幅の 82 %, 60 %, 32 % まで減少することがわかる．

5.7 付録：サンプル

5.7.1 浅水方程式系の導出

ここでは、以下の各モデルで使用される支配方程式である浅水方程式系を導出する．

^{*28}Kurihara et al. (1990) に具体的に明記されている波長である．

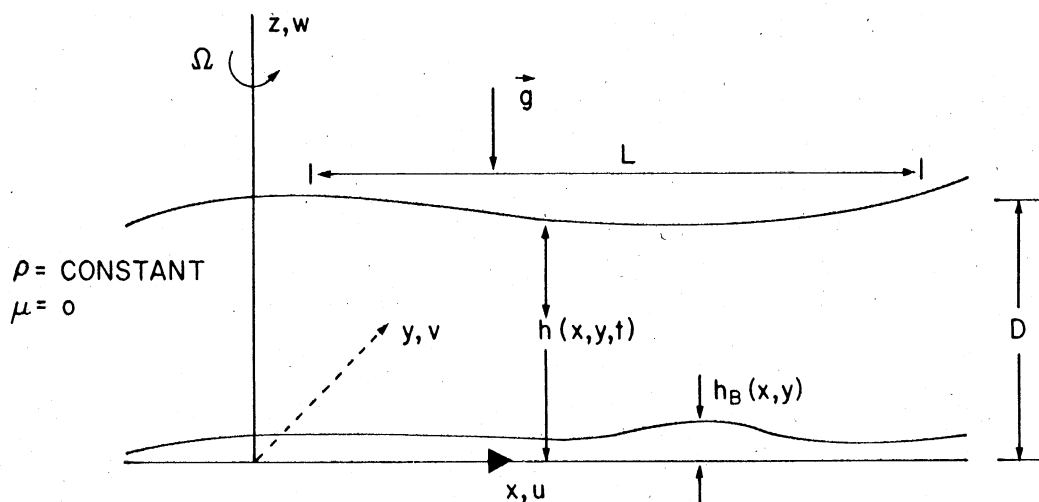


Figure 3.2.1 The shallow-water model.

図 5.14: 浅水システムの概念図 (Pedlosky, 1987 より).

図?? は浅水システムの概念図である。以下では、この図を元に方程式系を構築する。ここでは、以下の仮定をおく。

- 密度は一定。
- 系は y 方向について回転角速度が線形に変化している (β 面近似)。

すると、このときの運動方程式は、

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.7.132)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.7.133)$$

となる。鉛直方向には第一近似的に静力学バランスしていると仮定する。ここで、

$$f = f_0 + \beta y, \quad \beta = \text{Const.},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

である。また、 p は非静力学成分、つまり全圧を $P = p + p_0$ としたとき、

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho$$

を満たす p_0 を除いた圧力を指す。このとき、全圧 P の z 方向変化は

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p_0}{\partial z} \approx \frac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho$$

と近似できる^{*29}。上式を z 方向に積分すると、 ρ は一定なので、

$$P(x, y, z, t) = -g\rho z + A(x, y, t)$$

となる。ここで、 A は積分定数である。 $z = h$ における全圧を基準圧力 p_r とすると、

$$(P(x, y, h, t) =) p_r(x, y, h, t) = -g\rho h + A(x, y, t).$$

よって、上式を P についての式の A に代入すると、

$$P(x, y, z, t) = -g\rho z + g\rho h + p_r(x, y, h, t) = g\rho(h - z) + p_r(x, y, h, t)$$

となる。 $p_r(x, y, h, t)$ は流体上面高度における圧力を指す。ここで、流体の変化において、上面での圧力変化がほぼ無視できるという仮定（微小振幅の仮定）をおくと、 p_r は定数とみることができ、

$$P(x, y, z, t) = g\rho(h - z) + p_r$$

となる。ここで、運動方程式における圧力傾度力は静力学圧力 p_0 が z のみの関数であることに注意すると^{*30}、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = g\rho \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = g\rho \frac{\partial h}{\partial y}.$$

ここで、 z は x, y に独立であるという事実に注意。よって、運動方程式 (5.7.132), (5.7.133) はそれぞれ

$$\frac{du}{dt} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.7.134)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.7.135)$$

となる。今、密度一様で摩擦・粘性がないので、流速の時間変化が非常に遅い（準定常状態）であると仮定すると、テイラー・プラウドマンの定理から^{*31}、 $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ となるので、上式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.7.136)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.7.137)$$

となる。さらに、密度一定であるため、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.7.138)$$

^{*29}なぜなら、非静力学圧力が静力学圧力に比べて z 方向の変化の大きさが小さいからである。これを正確に示したものは Pedlosky (1987) 参照。

^{*30}今、 ρ が一定であるので、静力学関係式

^{*31}水平流速が高度方向に依存しないという定理。詳しくは Pedlosky (1987) 参照。

であり、水平流速は高度について一様であるため、上式は z について積分でき、

$$w(x, y, z = h, t) - w(x, y, z = h_B, t) = -(h - h_B) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

であることがわかる。ここで、 $w(x, y, z = h, t)$ は流体上面での変動に伴う速度、 $w(x, y, z = h_B, t)$ は流体下面での変動に伴う速度である。よって、上式は

$$w(x, y, z = h, t) - w(x, y, z = h_B, t) = \frac{dh}{dt} - \frac{dh_B}{dt} = -(h - h_B) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5.7.139)$$

となる。浅水系多層モデルを考える場合は、この式を問題設定（境界条件）に合わせて変形させればよい。ここでは、下面が剛体で固定されている場合を考える。その場合、 h_B はオイラー的にみると時間変化しないので、

$$\frac{dh_B}{dt} = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}$$

となる^{*32}。また、上面は自由変形を許すと、

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$$

となる。これらを考慮すると、(5.7.139) は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (h - h_B) + (h - h_B) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \{ u(h - h_B) \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ v(h - h_B) \} \quad (5.7.140)$$

という式が得られる。流体層の厚さを H とすると、

$$H(x, y, t) = h(x, y, t) - h_B(x, y)$$

であるので、結果的に得られる方程式系は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.7.141)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.7.142)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} \quad (5.7.143)$$

5.7.2 NM01 におけるモデルの詳細

浅水流体における大気の支配方程式系は

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -f \mathbf{k} \times \mathbf{v} - g \nabla h + \mathbf{F},$$

^{*32} h, h_B は水平空間におけるある高度座標 1 点を表すので、これらの変数は z について独立であることに注意。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = \text{Src.}$$

である。ここで、 \mathbf{v}, h, f, g は水平速度ベクトル、流体の深さ、コリオリパラメータ、重力加速度である。また、ベクトル微分演算子は水平 2 成分のみ有している。 \mathbf{F}, Src はそれぞれ流れに対する外力とソースである。これを円筒座標系で表記することを考える。ラグランジュ微分は速度が水平 2 成分であるため、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

である。ここで、 r, θ はそれぞれ動径、同位角方向であり、動径方向については原点から外向きを正、同位角方向については反時計回りを正とする。また、速度ベクトルは $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ で表記することができる。このとき、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ はそれぞれ動径、同位角方向の単位ベクトルであり、 u, v はそれぞれの方向の速度である。すると、先の支配方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = fv - g \frac{\partial h}{\partial r} + F_r, \quad (5.7.144)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -fu - \frac{g}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + F_\theta, \quad (5.7.145)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + h \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] = \text{Src.} \quad (5.7.146)$$

となる。

本モデルは動径方向には傾度風平衡状態にあり、定常状態の軸対称流の中に埋め込まれた非軸対称成分の時間発展を計算するモデルであるため、各従属変数は同位角方向に一樣でかつ、時間発展しない軸対称流と同位角方向に非一樣で時間発展が許される非軸対称成分に分けて表現するのが便利である。そこでこの方程式を軸対称流と非軸対称流に分ける。つまり、各従属変数 φ を

$$\varphi(r, \theta, t) = \bar{\varphi}(r) + \varphi'(r, \theta, t)$$

と分けると (5.7.144) - (5.7.146) 式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + u' \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{v'}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{v}v'}{r} - \frac{v'^2}{r} \\ & = fv' - g \frac{\partial h'}{\partial r} + F_r, \end{aligned} \quad (5.7.147)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + u' \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{v'}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}u}{r} + \frac{\bar{u}v'}{r} + \frac{u'\bar{v}}{r} + \frac{u'v'}{r} \\ & = -f(\bar{u} + u') - \frac{g}{r} \frac{\partial h'}{\partial \theta} + F_\theta, \end{aligned} \quad (5.7.148)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial r} + u' \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} + u' \frac{\partial h'}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial h'}{\partial \theta} + \frac{v'}{r} \frac{\partial h'}{\partial \theta} \\ & = -(\bar{h} + h') \left[\frac{\partial}{\partial r} (\bar{u} + u') + \frac{(\bar{u} + u')}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right] + \text{Src.} \end{aligned} \quad (5.7.149)$$

となる。ここで、接線方向には、傾度風平衡の関係：

$$f\bar{v} + \frac{\bar{v}^2}{r} = g \frac{\partial \bar{h}}{\partial r}$$

を用いた。また、本モデルでは、各外力、ソースとして、動径、同位角方向の2次の水平拡散を `diff_r`, `diff_t` という拡散係数で施す。また、領域の外側ではレイリーダンピングを施す。

5.7.3 `adjust` におけるモデルの詳細

f 面 1 次元線形浅水流体方程式系は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f_0 v' = -g \frac{\partial h'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' = 0.$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0.$$

である。この式は基本場は静止状態を仮定し、そのときの流体の高さが H として基本場の周りで線形化したものである。このとき、初期値に不連続な h' のプロファイルを与えると、初期に u', v' がゼロであっても地衡流調節という作用によって h' のバランスを解消しようと運動エネルギーを獲得することになる。サンプルでのプログラムはその過渡過程をシミュレートするものである。この方程式系で地衡流調節が作用する場合、方程式系がポテンシャル渦度保存を満たすので、調節後の定常状態の分布は実は初期値から見積もることができる。

5.7.4 `adjust_2d` におけるモデルの詳細

β 面 2 次元線形浅水流体方程式系は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' = -g \frac{\partial h'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f u' = -g \frac{\partial h'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0.$$

である。この式は基本場は静止状態を仮定し、そのときの流体の高さが H として基本場の周りで線形化したものである。このとき、初期値に不連続な h' のプロファイルを与えると、初期に u', v' がゼロであっても地衡流調節という作用によって h' のバランスを解消しようと運動エネルギーを獲得することになる。サンプルでのプログラムはその過渡過程をシミュレートするものである。この方程式系で地衡流調節が作用する場合、方程式系がポテンシャル渦度保存を満たすので、調節後の定常状態の分布は実は初期値から見積もることができる。

参考文献

- Bolton, D., 1980: The computation of equivalent potential temperature. *Mon. Wea. Rev.*, **108**, 1046–1053.
- Braun, S. A., 2002: A cloud-resolving simulation of hurricane bob (1991): Storm structure and eyewall buoyancy. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 1573–1592.
- Emanuel, K. A., 1994: *Atmospheric Convection*. Oxford University Press, 580 pp.
- Holton, J. R., 2004: *An Introduction to Dynamic Meteorology. Fourth Edition*. Elsevier Academic Press, 535 pp.
- Jordan, C. L., 1958: Mean soundings for the west indies area. *J. Meteor.*, **15**, 91–97.
- Kurihara, Y., M. A. Bender, R. E. Tuleya, and R. J. Ross, 1990: Prediction experiments of hurricane Gloria (1985) using a multiply nested movable mesh model. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 2185–2198, doi:10.1175/1520-0493(1990)118<2185:PEOHGU>2.0.CO;2.
- Murakami, M., 1990: Numerical modeling of dynamical and microphysical evolution of an isolated convective cloud. -the 19 july 1981 ccope cloud-. *J. Met. Soc. Japan.*, **68**, 107–128.
- Nguyen, H. V., and Y.-L. Chen, 2011: High-resolution initialization and simulations of typhoon Morakot (2009). *Mon. Wea. Rev.*, **139**, 1463–1491, doi:10.1175/2011MWR3505.1.
- Nolan, D. S., M. T. Montgomery, and L. D. Grasso, 2001: The wavenumber-one instability and trochoidal motion of hurricane-like vortices. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 3243–3270.
- Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics. Second Edition*. Springer, 710 pp.
- Pendergrass, A. G., and H. E. Willoughby, 2009: Diabatically induced secondary flows in tropical cyclones. part i: Quasi-steady forcing. *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 805–821.
- Shuman, F. G., 1957: Numerical methods in weather prediction: II. Smoothing and filtering. *Mon. Wea. Rev.*, **85**, 357–361, doi:10.1175/1520-0493(1957)085<0357:NMIWPI>2.0.CO;2.
- Thorpe, A. J., and C. H. Bishop, 1995: Potential vorticity and the electrostatics analogy: Ertel-rossby formulation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **121**, 1477–1495.
- 小倉義光, 1987: 気象力学通論.

- 森口繁一, 一松信, and 宇田川金圭久, 1987: 岩波数学公式 iii 特殊関数.
- 石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門.
- 川上一郎, 2008: 数値計算の基礎.
- 浅井富雄, 武田喬男, and 木村竜治, 1981: 大気科学講座 2 雲や降水を伴う大気.
- 大関誠, 2006: 気象研究ノート 第 211 号 スペクトルモデル入門.
- 巽友正, 1982: 新物理学シリーズ 21 流体力学.
- 東京大学理学部地球惑星物理学科地球惑星物理学演習テキスト編集グループ, 1994: 地球惑星物理学演習一数値計算入門一.
- 二宮洸三, 2000: 気象がわかる数と式.
- 平岡和幸, and 堀玄, 2004: プログラミングのための線形代数.