

修 士 学 位 論 文

非線形・非静力学・圧縮性 モデルを用いた 内部重力波の数値実験的研究

2017年2月3日

専攻名 惑星学専攻
学籍番号 153s415s
氏名 村上美雪

神戸大学 大学院理学研究科 博士課程前期課程

要旨

内部重力波とは安定成層した流体中を伝播する、浮力を復元力とする波である。大気や海洋など、成層した流体中に普遍的に存在しており、運動量を波の発生源から遠方へ伝達する性質を持つ。特に、対流圏で発生し伝播してきた内部重力波の運動量が中層大気の運動に影響を与えており、大気循環に対して重要な役割を果たしていると考えられ長い間研究されてきた。

本研究では非線形・非静力学・圧縮性の鉛直2次元モデルを作成し、対流で発生した内部重力波が中層大気まで伝播し、中層大気の運動に与える影響を調べた。東西風がない場合と、対流圏において理想的な東西風分布を持つ場合を設定し、対流からの内部重力波の生成と伝播、クリティカルレベルにおける波の吸収、クリティカルレベルから新たに発生する内部重力波の高高度伝播、さらに中間圏界面付近での碎波とそこでの平均東西風の生成が確認できた。

まず平均流が存在しない場合について述べる。高度12km付近でスペクトル解析を行った結果、水平波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、鉛直波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、振動数 $1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ の波と水平波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、鉛直波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、振動数 $1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ の波が見られた。これは重力波の分散関係を概ね満たしているため重力波であると考えられる。また高度80~110km付近において伝播してきた波の碎波が見られた。碎波領域における運動量フラックスの発散は $3 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ であり、これは線形理論から見積もられる運動量フラックスの発散と整合的である。

次に平均流が存在する場合について述べる。高度12km付近でスペクトル解析を行った結果、水平波数 $6 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、鉛直波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、振動数 $3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ の波が見られた。これは重力波の分散関係を概ね満たしているため重力波であると考えられる。またこの波の水平位相速度は 5 m s^{-1} である。この波のクリティカルレベルと考えられる高度20km付近で波の吸収が行われていることが確認できる。水平速度の摂動、運動量フラックス、運動量フラックスの発散を調べた。水平速度の摂動から1600sあたり 2 m s^{-1} の西向き加速があることがわかった。また運動量フラックスの発散は $3 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ である。これらの値は水平風の加速は運動量フラックスの発散によって生じていることを示している。次にクリティカルレベルから発生した二次的な波について調べた。高度30km付近においてスペクトル解析を行った結果、水平波数、鉛直波数、振動数がそれぞれ $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 、 $1.3 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 、 $1.5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ の波と $1.7 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 、 $6 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、 $2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ の波が見られた。大

気密度の減少に伴い波の振幅が増大することによって高度 100 ~ 110 km 付近で碎波が起こる。この領域における水平速度の摂動, 運動量フラックス, 運動量フラックスの発散を調べると, 水平速度の摂動から 2000 s で 10 m s^{-1} の水平風の東向き加速が見られた。運動量フラックスの発散の平均値は $2 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ である。これらの値は概ね整合的であり, 水平風の加速は運動量フラックスの発散によって生じていることを示している。この運動量フラックスの発散は観測に比べて一桁程度大きい。しかしながら下層から上層へ十分な量の運動量が輸送されていることが示された。

目次

第1章	はじめに	3
第2章	モデルについて	5
2.1	基礎方程式系	5
2.2	モデルの設定と計算方法	6
2.3	基本状態	9
2.4	散逸	11
2.5	モデルの解像度	11
2.6	初期条件と境界条件	11
第3章	線形理論	12
3.1	平均流中の内部重力波	12
3.1.1	非粘性の場合	12
3.1.2	粘性を考える場合	15
3.2	重力波砕波の簡単なモデル	18
第4章	結果: シア一流が存在しない場合	24

4.1	対流と内部重力波の発生	24
4.2	高高度領域における砕波	30
第5章	結果: シア一流が存在する場合	34
5.1	対流と内部重力波の発生	34
5.2	内部重力波のクリティカルレベルにおける吸収	40
5.3	二次的な内部重力波の放射	43
5.4	高高度領域における砕波	48
5.4.1	砕波による平均流加速	48
5.4.2	砕波高度についての考察	49
第6章	まとめ	50
付録A	Goya & Miyahara (1999) の方程式の導出	53
付録B	差分化の方法と精度について	56
B.1	一階微分	56
B.2	二階微分	56
B.3	四階微分	57
付録C	スペクトル解析	59
C.1	直接法	59
C.2	Blackman-Tukey 法	60

第1章 はじめに

内部重力波とは安定成層した流体中を伝播する, 浮力を復元力とする波であり, 大気や海洋など, 成層した流体中に普遍的に存在している. 運動量を波の発生源から遠方へ伝達する性質を持つ. 内部重力波は大気中の運動量輸送を担うことから, 大気大循環に大きな影響を与えていると考えられており, 盛んに研究が行われてきた.

内部重力波が大気大循環に大きな影響を与えていると考えられている主な理由は次の2つの特徴からである. 一つは鉛直方向の運動量を保存したまま伝播することから, 大気密度が高度とともに指数関数的に減少することで中層大気における内部重力波の速度や温度の振幅が大きくなるという点である. 内部重力波はある高度で砕波して運動量を平均流に渡して平均流を減速すると考えられている (Lindzen 1981). もう一つはクリティカルレベルの存在である. クリティカルレベルは内部重力波の位相速度と平均流の速度が一致する高度である. クリティカルレベルにおいて内部重力波は減衰し, 運動量を平均流に渡していると考えられている (Booker and Bretherton 1967). また, この際に不安定が発生し, そこから二次的な内部重力波を発生させる. 内部重力波の対流圏における波源についても, 対流, 地形, シアー不安定など様々なものについて議論されている. その中でも対流は緯度や地形に関係なく普遍的に存在していることから, 重要な波源のひとつであると考えられる.

よって対流によって発生する内部重力波の中層大気での振る舞いや平均流の加速・減速の効果を調べることは大気大循環について理解を深める上で非常に有益である. 内部重力波の性質の基本的な議論はブシネスク近似のもとで行われる場合が多い. しかし, 中層大気でのシミュレーションを行う際は密度の変化を無視することはできないため, 非圧縮性のモデルが必要である. 本研究では非線形・非静力学・圧縮性の鉛直2次元モデルを作成し, 対流で発生した内部重力波が中層大気まで伝播し, 中層大気の運動に与える影響を調べた.

本論文の構成は次のとおりである. 2章では本研究で作成したモデルについて解説する. 3章では結果の考察に必要な内部重力波の線形理論について解説する. 4

章では東西風が存在しない場合の結果について述べる. 5章ではシアーを持つ東西風が存在する場合の結果について述べる. 6章はまとめである.

第2章 モデルについて

2.1 基礎方程式系

対流圏における対流の発生, その対流からの内部重力波の発生, クリティカルレベルにおける内部重力波の吸収, クリティカルレベルからの二次的な内部重力波の発生, その波の高高度への伝播と砕波をシミュレーションするため, 非線形・非静力学・圧縮性の鉛直2次元モデルを作成した. シミュレーションを行う内部重力波の振動数は局所的な慣性振動数よりも大きいことから, 地球の自転の効果は無視する. 基礎方程式系は Goya and Miyahara (1999) で用いられたものを使用した. 基礎方程式系は次のとおりである:

$$\frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{u}u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}w}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} - K_H \frac{\partial^4 \delta \tilde{u}}{\partial x^4} + K_V \frac{\partial^2 \delta \tilde{u}}{\partial z^2} - R_f \delta \tilde{u}, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \delta \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{w}u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}w}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g - K_H \frac{\partial^4 \delta \tilde{w}}{\partial x^4} + K_V \frac{\partial^2 \delta \tilde{w}}{\partial z^2} - R_f \delta \tilde{w}, \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \delta \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{u}T}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}T}{\partial z} - \frac{R\tilde{T}}{c_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - K_H \frac{\partial^4 \delta \tilde{T}}{\partial x^4} + K_V \frac{\partial^2 \delta \tilde{T}}{\partial z^2} - \alpha \delta \tilde{T}, \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (2.1d)$$

$$p = R\tilde{T}. \quad (2.1e)$$

記号の定義は以下のとおりである:

- u : 水平速度,
- w : 鉛直速度,
- p : 圧力,
- ρ : 密度,
- T : 温度,
- g : 重力加速度,
- R : 乾燥大気の気体定数,
- c_v : 定積比熱,
- K_H : 水平方向の渦拡散係数,
- K_V : 鉛直方向の渦拡散係数,
- R_f : レイリー摩擦係数,
- α : ニュートン冷却係数,

力学変数 $[u, w, T]$ と ρ の積を \sim つきの量で表す: 例えば

$$\tilde{u} \equiv u(x, z, t) \cdot \rho(x, z, t) \quad (2.2)$$

である. さらに初期の基本場からの変化を表す場合は δ つきの量で表す. すなわち

$$\delta\tilde{u} = \tilde{u}(x, z, t) - \tilde{u}_B(z), \quad \tilde{u}_B \equiv \rho_B(z)u_B(z), \quad (2.3a)$$

$$\delta\tilde{w}(x, z, t) = \tilde{w}(x, z, t), \quad (2.3b)$$

$$\delta\tilde{T} = \tilde{T}(x, z, t) - \tilde{T}_B(z), \quad \tilde{T}_B \equiv \rho_B(z)T_B(z). \quad (2.3c)$$

添字の B は基本場の量を表す.

2.2 モデルの設定と計算方法

(2.1) の数値計算には図 2.1 のように物理変数を配置したスタッガード格子を用いる. 差分化した基礎方程式系は以下のとおりである.

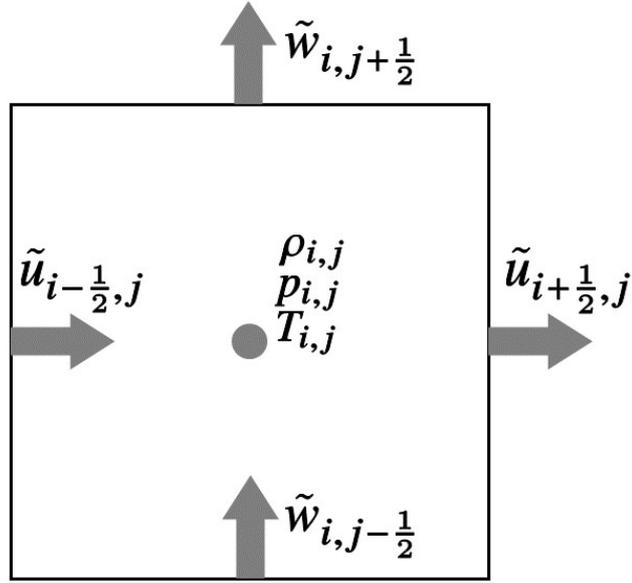


図 2.1: 格子点の配置. 空間変数を $(x, z) = (i\Delta x, j\Delta z)$ と差分化した時, 格子点 (i, j) に熱力学変数を配置し, そこから $1/2$ 格子点だけ x, z 方向にずれた点でそれぞれ u, w を配置する.

運動量方程式

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial t} \right)_{i+\frac{1}{2},j} &= - \frac{\tilde{u}_{i+1,j} u_{i+1,j} - \tilde{u}_{i,j} u_{i,j}}{\Delta x} \\
 &\quad - \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \\
 &\quad - \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \\
 &\quad - K_H \frac{\delta \tilde{u}_{i+\frac{5}{2},j} - 4\delta \tilde{u}_{i+\frac{3}{2},j} + 6\delta \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - 4\delta \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j} + \delta \tilde{u}_{i-\frac{3}{2},j}}{(\Delta x)^4} \\
 &\quad + K_V \frac{\delta \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2\delta \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \delta \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j-1}}{(\Delta z)^2} \\
 &\quad - R_f j \delta \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}
 \end{aligned} \tag{2.4a}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \delta \tilde{w}}{\partial t} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} &= - \frac{\tilde{w}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \tilde{w}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \\
 &\quad - \frac{\tilde{w}_{i+1,j} w_{i+1,j} - \tilde{w}_{i,j} w_{i,j}}{\Delta z} \\
 &\quad - \frac{\delta p_{i,j+1} - \delta p_{i,j}}{\Delta z} - g \frac{\delta \rho_{i,j+1} + \delta \rho_{i,j}}{2} \\
 &\quad - K_H \frac{\delta \tilde{w}_{i+2,j+\frac{1}{2}} - 4\delta \tilde{w}_{i+1,j+\frac{1}{2}} + 6\delta \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}} - 4\delta \tilde{u}_{i-1,j+\frac{1}{2}} + \delta \tilde{u}_{i-2,j+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^4} \\
 &\quad + K_V \frac{\delta \tilde{w}_{i,j+\frac{3}{2}} - 2\delta \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}} + \delta \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}}}{(\Delta z)^2} \\
 &\quad - R_{fj} \delta \tilde{w}_{i,j+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.4b}$$

ここで基本場について静水圧平衡が成り立つことから

$$\frac{(p_B)_{i,j+1} - (p_B)_{i,j}}{\Delta z} + g \frac{(\rho_B)_{i,j+1} + (\rho_B)_{i,j}}{2} = 0$$

であることを用いた。

連続の式

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j} = - \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} - \frac{\tilde{w}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{w}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \tag{2.4c}$$

熱力学の式

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \delta \tilde{T}}{\partial t}\right)_{i,j} = & -\frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}T_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}T_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} \\
& -\frac{\tilde{w}_{i,j+\frac{1}{2}}T_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{w}_{i,j-\frac{1}{2}}T_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \\
& + \frac{R\tilde{T}_{i,j}}{c_v} \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{w_{i,j+\frac{1}{2}} - w_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right] \\
& - K_H \frac{\delta \tilde{T}_{i+2,j} - 4\delta \tilde{T}_{i+1,j} + 6\delta \tilde{T}_{i,j} - 4\delta \tilde{T}_{i-1,j} + \delta \tilde{T}_{i-2,j}}{(\Delta x)^4} \\
& + K_V \frac{\delta \tilde{T}_{i,j+1} - 2\delta \tilde{T}_{i,j} + \delta \tilde{T}_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \\
& - \alpha_{i,j} \delta \tilde{T}_{i,j}
\end{aligned} \tag{2.4d}$$

モデルの領域は水平方向に 30 km, 鉛直方向に 150 km である. 時間積分の計算には leap-frog 法と Asselin フィルタを用いた.

2.3 基本状態

図 2.2 と図 2.3 にそれぞれ基本状態の $U_B(z)$ と $T_B(z)$ を示す. $U_B(z)$ については, すべての高度でゼロの場合と, 中緯度における対流圏と下部成層圏の東西風の鉛直プロファイルを想定した場合の 2 つの計算を行った. ただし, 24 km より上は内部重力波の伝播を見るために風速をゼロとした. $T_B(z)$ は現実的な大気の鉛直プロファイルを用いた. ただし, 高度 5 km より下では対流を発生させるために温度減率を乾燥断熱減率よりも僅かに大きい $dT_B(z)/dz = -10 \text{ K km}^{-1}$ とした. また, 数値シミュレーションが困難な熱圏での極端に速い音速を避けるため, 110 km より上では 300 K で一定と仮定する.

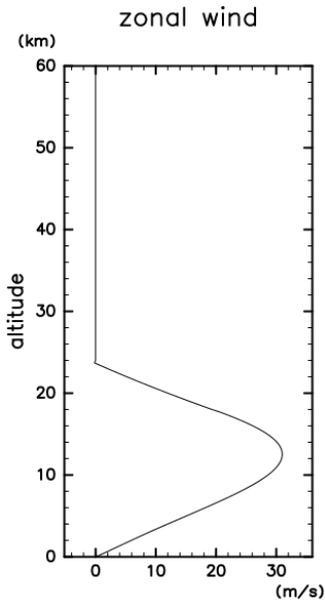


図 2.2: 水平風の基本場の鉛直プロファイル $U_B(z)$ [m s^{-1}].

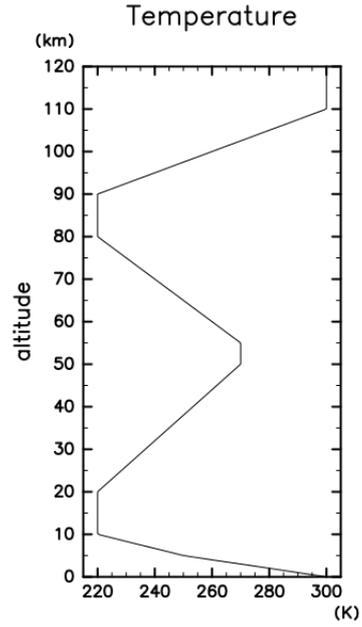


図 2.3: 温度の基本場の鉛直プロファイル $T_B(z)$ [K].

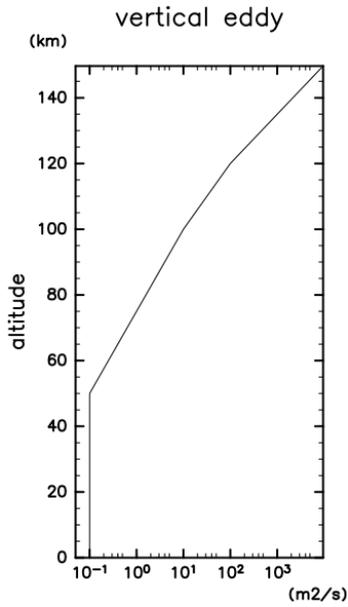


図 2.4: 鉛直渦粘性係数の鉛直プロファイル $K_V(z)$ [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$].

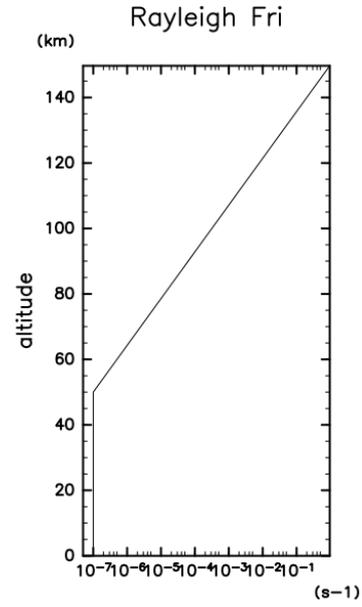


図 2.5: レイリー摩擦係数の鉛直プロファイル $R_f(z)$ [s^{-1}].

2.4 散逸

水平渦粘性係数は $K_H = 1.0 \times 10^7 \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$ で定数とする. 図 2.4 と図 2.5 はそれぞれ鉛直渦粘性係数とレイリー摩擦係数を表す. ニュートン冷却係数 $\alpha(z)$ は $R_f(z)$ と同じであると仮定する. 上端からの擬似的な波の反射を防ぐために K_V と R_f には高さとともに増加する値を与える. 鉛直渦拡散の項は, 例えば (2.1a) ならば物理的に正しい $\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K_V \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ の形式を採用すべきであるが, 簡単のため $K_V \partial^2 \delta \tilde{u} / \partial z^2$ の形式を用いる. Goya and Miyahara (1999) によればシミュレーションを行う範囲においては2つのスキームの差が与える影響は小さい.

2.5 モデルの解像度

格子点数は水平方向に 128 点 ($\Delta x \approx 234 \text{ m}$), 鉛直方向に 500 点 ($\Delta z = 300 \text{ m}$) とした. $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, フィルタの係数は 0.2 とした.

2.6 初期条件と境界条件

初期条件は $\delta \tilde{w}$ の初期摂動を除いてゼロとする:

$$\delta \tilde{u} = 0, \quad \delta \tilde{w} = 0, \quad \delta \tilde{T} = 0, \quad \delta \rho = 0, \quad \delta p = 0. \quad (2.5)$$

最下層の $x = 15 \text{ km}$ の一点において $\delta \tilde{w}$ に $4 \times 10^{-4} \text{ m}^{-2} \text{ kg s}^{-1}$ の振幅を持つ摂動を与える.

また境界条件について, 上端の境界条件をゼロとする:

$$\delta \tilde{u}^N = 0, \quad \delta \tilde{w}^N = 0, \quad \delta \tilde{T}^N = 0. \quad (2.6)$$

下端の境界条件は以下のように設定する. すなわち $\delta \tilde{u}$ の鉛直微分をゼロ, $\delta \tilde{w}$ と $\delta \tilde{T}$ をゼロとする:

$$\delta \tilde{u}^0 = \delta \tilde{u}^1, \quad \delta \tilde{w}^0 = 0, \quad \delta \tilde{T}^0 = 0. \quad (2.7)$$

水平方向の境界条件については周期境界とする.

第3章 線形理論

次章以降で述べる数値計算の結果を解釈するために必要な知識について簡潔に紹介する.

3.1 平均流中の内部重力波

Booker and Bretherton (1967) によって議論されたクリティカルレベル付近における内部重力波の振る舞いについて簡潔に述べる.

3.1.1 非粘性の場合

鉛直シアを持つ水平方向の平均流 $\bar{U}(z)$ が存在する非粘性, 非圧縮鉛直 2 次元 Boussinesq 流体を考える. 基準状態の密度を ρ_0 とし, 物理変数の摂動成分を ' つきの量で表す. このとき線形化された運動方程式の x, z 成分はそれぞれ

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{U}}{dz} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} - q', \quad (3.1b)$$

であり, 連続の式と熱力学方程式は

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (3.1c)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial q'}{\partial x} - N^2 w' = 0, \quad (3.1d)$$

である。ここで $\phi' = p'/\rho_0$, $q' = \rho'g/\rho_0$ であり, N は浮力振動数で定数であると仮定する。摂動成分について以下のように波型の解を仮定する:

$$\begin{aligned} u'(x, z, t) &= U'(z)e^{i(kx-\omega t)}, \\ w'(x, z, t) &= W'(z)e^{i(kx-\omega t)}, \\ q'(x, z, t) &= Q'(z)e^{i(kx-\omega t)}, \\ \phi'(x, z, t) &= \Phi'(z)e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned}$$

これを (3.1) に代入すると,

$$ik(\bar{U} - c)U' + W' \frac{d\bar{U}}{dz} = -ik\Phi', \quad (3.1a')$$

$$ik(\bar{U} - c)W' = -\frac{d\Phi'}{dz} - Q', \quad (3.1b')$$

$$ikU' + \frac{dW'}{dz} = 0, \quad (3.1c')$$

$$ik(\bar{U} - c)Q' - N^2W' = 0 \quad (3.1d')$$

となる。ここで $\omega = kc$ であり, c は位相速度である。(3.1a') と (3.1c') より,

$$-(\bar{U} - c) \frac{dW'}{dz} + W' \frac{d\bar{U}}{dz} = -ik\Phi'.$$

これを z で微分して整理すると,

$$-(\bar{U} - c) \frac{d^2W'}{dz^2} + W' \frac{d^2\bar{U}}{dz^2} = -ik \frac{d\Phi'}{dz} \quad (3.2)$$

となる。(3.1b'), (3.1d') を用いて $d\Phi'/dz$, Q' を消去すると W' についての式

$$\frac{d^2W'}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{(\bar{U} - c)^2} - \frac{1}{\bar{U} - c} \frac{d^2\bar{U}}{dz^2} - k^2 \right] W' = 0 \quad (3.3)$$

を得る。 W' の係数を $F(z)$ と置くと, W' は $F(z) > 0$ のとき z 方向について波型の解を持ち, $F(z) < 0$ のとき指数関数的な解を持つ。 $\bar{U} - c = 0$ となる z において $F(z)$ は特異点を持つ。

ここで WKB 近似を行い, $d^2\bar{U}/dz^2 \simeq 0$ と仮定する。 W' が波型の解 $\hat{W}e^{imz}$ を持つとすると, (3.3) から分散関係式

$$-m^2 + \left[\frac{N^2k^2}{(\omega - k\bar{U})^2} - k^2 \right] = 0 \quad (3.4)$$

または

$$m^2 = \frac{(N^2 - \hat{\omega}^2)k^2}{\hat{\omega}^2} \quad (3.5)$$

を得る. ここで $\hat{\omega} = \omega - k\bar{U} = k(c - \bar{U})$ は固有振動数である. $\bar{U} = c$ であるときを考えると, $\hat{\omega} \rightarrow 0$ となることから, (3.5) より $m^2 \rightarrow \infty$ となる. また鉛直群速度

$$C_{gz} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial m} = -\frac{m}{N^2 k^2} \hat{\omega}^3$$

は $C_{gz} \rightarrow 0$ となる. つまり $\bar{U} = c$ となる高度よりも上へは波は伝播しない.

$\bar{U}(z_c) = c$ となるようなクリティカルレベル z_c 付近の解を考える. 考える高度を $z = z_c + \Delta z$ と表し, $\bar{U}(z)$ の Taylor 展開を行うと,

$$\bar{U}(z) = \bar{U}(z_c) + \frac{d\bar{U}}{dz} \Delta z + \dots$$

となる. ここで二次以上の項は無視し, z_c を鉛直座標の原点にとると, 平均流は

$$\bar{U}(z) = c + \Lambda z \tag{3.6}$$

と表すことができる. ここで $\Lambda = d\bar{U}/dz$ である. これを用いて (3.3) を書き換えると,

$$\frac{d^2 W'}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{\Lambda^2 z^2} - k^2 \right] W' = 0 \tag{3.7}$$

となる. また Richerdoson 数 $Ri = N^2/\Lambda^2$ を用いると

$$\frac{d^2 W'}{dz^2} + \left[\frac{Ri^2}{z^2} - k^2 \right] W' = 0 \tag{3.8}$$

と書ける. ここで (3.8) は $z = 0$ が確定特異点であることから,

$$W' = \sum_{l=0}^{\infty} C_l z^{\lambda+l}$$

と置く*1. これを (3.8) に代入すると

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l (\lambda+l)(\lambda+l-1) z^{\lambda+l-2} + C_l Ri z^{\lambda+l-2} - C_l k^2 z^{\lambda+l} = 0$$

*1 n 階の微分方程式

$$y^{(n)}(x) + P_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + P_{n-1}(x)y'(x) + P_n y(x) = 0$$

の特異点 $x = a$ において,

$$(x-a)P_1(x), (x-a)^2 P_2(x), \dots, (x-a)^n P_n(x)$$

がすべて解析的であるとき, a を与えられた微分方程式の**確定特異点**という. 確定特異点 a を持つ微分方程式は

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^{\lambda+n}$$

の形式の解を持つことが知られている.

となる。 $l = 0$ に対応する、 $z^{\lambda-2}$ の係数について考えると

$$C_0\lambda(\lambda - 1) + C_0 Ri = 0$$

であることから、

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - Ri} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{Ri - \frac{1}{4}} \quad (3.9)$$

となる。 よって $Ri < 1/4$ のときシア不安定が発生する。 $Ri > 1/4$ のとき、 $z \sim 0$ における W' の解は

$$W' = A z^{\frac{1}{2} + i\sqrt{Ri - 1/4}} + B z^{\frac{1}{2} - i\sqrt{Ri - 1/4}} \quad (3.10)$$

である。 以下、 $Ri > 1/4$ である場合を考える。

3.1.2 粘性を考える場合

次に水平速度の摂動に比例する Newton damping がある場合を考える。 このとき (3.1a') の U' の係数は $ik(\bar{U} - c - i\alpha/k)$ となる。 (3.6) より $\bar{U} - c - i\alpha/k = \Lambda(z - i\alpha/\Lambda k)$ であることを用いると W' についての微分方程式 (3.7) は

$$\frac{d^2 W'}{dz^2} \left[\frac{Ri}{(z - ic_i/\Lambda)^2} - k^2 \right] W' = 0 \quad (3.11)$$

と変更され、解は

$$W' = A \left(z - \frac{ic_i}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{2} + i\sqrt{Ri - 1/4}} + B \left(z - \frac{ic_i}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{2} - i\sqrt{Ri - 1/4}} \quad (3.12)$$

となる。 ここで $c_i = \alpha/k$ である。 このことは粘性を含む一般の場合には非粘性の解 (3.10) における z を複素数と考えれば良いことを示している。 そこで以下では複素数 z を持つ (3.10) の解を考えていくことにする。

$c_i \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 0$) の極限を考えると、 $z > 0$ のとき $z = |z|$ となる。 このとき微分方程式の解は

$$\begin{aligned} W &= A |z|^{\frac{1}{2} + i\mu} + B |z|^{\frac{1}{2} - i\mu} \\ &= A |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\mu \ln |z|} + B |z|^{\frac{1}{2}} e^{-i\mu \ln |z|} \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。 ここで $\mu \equiv \sqrt{Ri - 1/4}$ である。 振幅 A, B に対応する局所鉛直波数をそれぞれ m_A, m_B とすると

$$m_A = \frac{\partial}{\partial z} (\mu \ln |z|) = \frac{\partial}{\partial |z|} (\mu \ln |z|) = \frac{\mu}{|z|} > 0, \quad (3.14a)$$

$$m_B = \frac{\partial}{\partial |z|} (-\mu \ln |z|) = -\frac{\mu}{|z|} < 0 \quad (3.14b)$$

となる. 一方 $z < 0$ の場合は, $d\bar{U}/dz > 0$, すなわち $\Lambda > 0$ のとき $z = |z|e^{-\pi i}$, $d\bar{U}/dz < 0$, すなわち $\Lambda < 0$ のとき $z = |z|e^{\pi i}$ である. $\Lambda > 0$ のとき微分方程式の解は

$$\begin{aligned} W &= A\left(|z|e^{-i\pi}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu} + B\left(|z|e^{-i\pi}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu} \\ &= -iA|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\mu\ln|z|}e^{\mu\pi} - iB|z|^{\frac{1}{2}}e^{-i\mu\ln|z|}e^{-\mu\pi}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$\Lambda < 0$ のとき微分方程式の解は

$$\begin{aligned} W &= A\left(|z|e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{2}+i\mu} + B\left(|z|e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{2}-i\mu} \\ &= iA|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\mu\ln|z|}e^{-\mu\pi} + iB|z|^{\frac{1}{2}}e^{-i\mu\ln|z|}e^{\mu\pi}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる. 局所鉛直波数は

$$m_A = \frac{\partial}{\partial z}(\mu \ln |z|) = -\frac{\partial}{\partial |z|}(\mu \ln |z|) = -\frac{\mu}{|z|} < 0, \quad (3.17a)$$

$$m_B = -\frac{\partial}{\partial |z|}(-\mu \ln |z|) = \frac{\mu}{|z|} > 0 \quad (3.17b)$$

となる. すなわち $z > 0$ と $z < 0$ では $e^{\pm\mu\pi}$ だけ振幅が異なる.

次に一周期に渡って平均化された摂動の運動量フラックスを考える.

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2} \left[U' e^{i(kx-\omega t)} + U'^* e^{-i(kx-\omega t)} \right], \\ w' &= \frac{1}{2} \left[W' e^{i(kx-\omega t)} + W'^* e^{-i(kx-\omega t)} \right] \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \overline{u'w'} &= \frac{1}{L} \int_0^L u'w' dx \\ &= \frac{1}{4L} \int_0^L (U'W'^* + U'^*W') dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U'W'^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{i}{k} \frac{dW'}{dz} W'^* \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

となる. ここで (3.1c') より

$$U' = \frac{i}{k} \frac{dW'}{dz}$$

であることを用いた. $z > 0$ のとき (3.13) から

$$\begin{aligned}\frac{dW'}{dz} &= A\left(\frac{1}{2} + i\mu\right)|z|^{-\frac{1}{2}+i\mu} + B\left(\frac{1}{2} - i\mu\right)|z|^{-\frac{1}{2}-i\mu}, \\ W'^* &= A^*|z|^{\frac{1}{2}-i\mu} + B^*|z|^{\frac{1}{2}+i\mu}\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\frac{i}{k} \frac{dW'}{dz} W'^* &= \frac{i}{k} \left[\left(\frac{1}{2} + i\mu\right)|A|^2 + \left(\frac{1}{2} - i\mu\right)|B|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + i\mu\right)AB^*e^{2i\mu} + \left(\frac{1}{2} - i\mu\right)A^*Be^{-2i\mu} \right] \\ &= \frac{i}{k} \left[\left(\frac{1}{2} + i\mu\right)|A|^2 + \left(\frac{1}{2} - i\mu\right)|B|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{1}{2} + i\mu\right)AB^*e^{2i\mu} \right\} \right] \quad (3.19)\end{aligned}$$

となる. よって

$$\overline{u'w'} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{i}{k} \frac{dW'}{dz} W'^* \right) = -\frac{\mu}{2k} (|A|^2 - |B|^2) \quad (3.20)$$

となる. $z < 0$ での平均運動量フラックスは, $d/dz = -d/d|z|$ であることに注意して (3.20) の A, B を $\Lambda > 0$ の場合は $A \rightarrow -iAe^{\mu\pi}, B \rightarrow -iBe^{-\mu\pi}$ に, $\Lambda < 0$ の場合は $A \rightarrow iAe^{-\mu\pi}, B \rightarrow iBe^{\mu\pi}$ に, 置き換えることで得られる. $\Lambda > 0$ のとき,

$$\overline{u'w'} = \frac{\mu}{2k} (|A|^2 e^{2\mu\pi} - |B|^2 e^{-2\mu\pi}), \quad (3.21)$$

$\Lambda < 0$ のとき

$$\overline{u'w'} = \frac{\mu}{2k} (|A|^2 e^{-2\mu\pi} - |B|^2 e^{2\mu\pi}) \quad (3.22)$$

となる. (3.20) と (3.21), (3.22) を比較すると, クリティカルレベルを境にして $e^{\pm 2\mu\pi}$ のファクターで運動量フラックスの収束・発散があり, 平均流を加速することがわかる.

位相速度について, A に比例する波と B に比例する波を個別に考える. 水平波数 $k > 0$ であると仮定する. このとき固有振動数は $\hat{\omega} = -k\Lambda z$ であることから, $\Lambda > 0$ の場合,

$$\begin{aligned}z > 0 \text{ のとき } \hat{\omega} < 0, \quad c_x = \hat{\omega}/k < 0, \\ z < 0 \text{ のとき } \hat{\omega} > 0, \quad c_x = \hat{\omega}/k > 0\end{aligned}$$

である. A に比例する波について, 鉛直位相速度 c_z は z の符号に関係なく (3.14a), (3.17a) より $c_z < 0$ となる. 一方 B に比例する波について (3.14b), (3.17b) より $c_z > 0$ となる.

$\Lambda < 0$ の場合,

$$\begin{aligned} z > 0 \text{ のとき } \hat{\omega} > 0, c_x = \hat{\omega}/k > 0, \\ z < 0 \text{ のとき } \hat{\omega} < 0, c_x = \hat{\omega}/k < 0 \end{aligned}$$

である。A に比例する波について、鉛直位相速度 c_z は (3.14a), (3.17a) より $c_z > 0$ となる。一方 B に比例する波について (3.14b), (3.17b) より $c_z < 0$ となる。これらの結果を表 3.1 にまとめると以下のとおりである。

表 3.1: クリティカルレベル付近における内部重力波の振る舞い。

シアー	対応する振幅	z	位相速度	w の振幅	$\overline{u'w'}$	群速度の伝播方向
$\Lambda > 0$	A	$z > z_c$	↙	$ A $	$-\frac{\mu}{2k} A ^2$	上向き
		$z < z_c$	↘	$ A e^{\mu\pi}$	$+\frac{\mu}{2k} A ^2e^{2\mu\pi}$	
	B	$z > z_c$	↖	$ B $	$+\frac{\mu}{2k} B ^2$	下向き
		$z < z_c$	↗	$ B e^{-\mu\pi}$	$-\frac{\mu}{2k} B ^2e^{-2\mu\pi}$	
$\Lambda < 0$	A	$z > z_c$	↗	$ A $	$-\frac{\mu}{2k} A ^2$	下向き
		$z < z_c$	↖	$ A e^{-\mu\pi}$	$+\frac{\mu}{2k} A ^2e^{-2\mu\pi}$	
	B	$z > z_c$	↘	$ B $	$+\frac{\mu}{2k} B ^2$	上向き
		$z < z_c$	↙	$ B e^{\mu\pi}$	$-\frac{\mu}{2k} B ^2e^{2\mu\pi}$	

3.2 重力波砕波の簡単なモデル

中間圏界面付近で生じる内部重力波の砕波に関する Lindzen (1981) の研究を Andrews et al. (1987) に従って簡潔に紹介する。静止した非粘性、非圧縮鉛直 2 次元流体を考える。対数圧力座標系における線形化した方程式系は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0, \tag{3.23a}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \rho_0^{-1} \frac{\partial \rho_0 w'}{\partial z} = 0, \tag{3.23b}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z \partial t} + N^2 w' = 0 \tag{3.23c}$$

である。ここで $\Phi \equiv \int_0^z g dz$ はジオポテンシャルである。簡単のため N を定数とし、

$$(u', w', \Phi') = e^{z/2H} \text{Re} \left[(\hat{u}, \hat{w}, \hat{\Phi}) \exp i(kx + mz - \omega t) \right] \tag{3.24}$$

を (3.23) に代入する。ここで \hat{u} などは定数であり、以下の偏波関係式を得る:

$$\hat{u} = \frac{k}{\omega} \hat{\Phi}, \tag{3.25a}$$

$$\hat{w} = -\frac{\omega}{N^2} \left(m - \frac{i}{2H} \right) \hat{\Phi}. \tag{3.25b}$$

また分散関係式は

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{m^2 + 1/4H^2} \quad (3.26)$$

である. 中層大気中を伝播する内部重力波の鉛直波長は 15 km 程度で, $H = 7$ km のとき $m^2 \gg 1/4H^2$ である. 鉛直群速度が $c_g^{(z)} = \partial\omega/\partial m > 0$, 水平波数が $k > 0$ の波を考えると, (3.26) のうちの

$$\omega = -Nk/m \quad (3.27)$$

の根を考えれば良い. (3.24) において, $\rho_0^{-1/2}$ と比例する $e^{z/2H}$ の因子の存在によって, 線形, 非散逸の理論は速度とジオポテンシャルの擾乱が高度とともに成長することを予測する; ある高さで無視されていた非線形項が重要になり, 線形理論は破綻する.

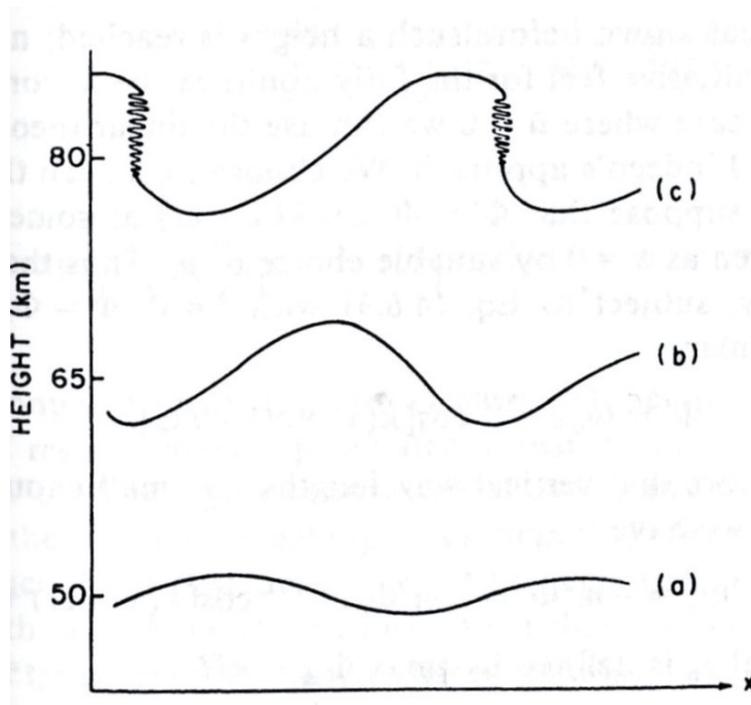


図 3.1: 中間圏へ鉛直伝播してきた内部重力波の碎波の模式図 (Andrews et al. 1987). (a), (b), (c) は物質面を表す. (a), (b) では線形で散逸のない理論があてはまる. (c) の高度では, 以前の波打った物質面の非可逆的な崩壊や, 小スケールの混合や散逸を伴った波の峰の近くの乱流を伴う非線形の効果が重要になる.

碎波の物理的な描像はいろいろなレベルにおける一組の物質面について考えることで得られ, それらを通して内部重力波が鉛直方向に伝播することで物質面が波打つ; 図 3.1 はこのような状況の模式図である. 下部中間圏では物質面 (a) は線形理論で予言されたように緩やかな正弦波的な変化をする. 一日よりも十分短い周期

を持つ重力波では放射緩和の効果は小さく, その他の非断熱過程が存在しなければ等温位線 (一定の θ の表面) を物質面 (a) として用いることができる. 中部中間圏では物質面は (b) は依然として正弦波的だが, (a) に比べて大きな振幅を持つ; 線形理論は依然として成立しており, (b) はまだ等温位線を用いることができる. しかし上部中間圏では, 非線形の効果が必要になり, (c) のような速く不可逆に崩れた等値線を作る. その後乱流や小スケールの混合, 散逸を引き起こす. 非断熱の効果の励起によって等温位線はもはや物質面ではなくなる.

個々で述べた過程は**重力波の砕波**として知られ, 海面の波が遠浅の浜でひっくり返ったり壊れたりするのに似ている. これは $e^{z/2H}$ で高さとともに成長する重力波の振幅を制限し, 下で見るように中層大気における大スケールの流れに対して重要な結論を持つ.

この砕波の過程についての単純なモデルは Lindzen (1981) によって提案された. 彼は基本東西流 $\bar{u}(z)$ の線形化した擾乱を考え, WKB法を用いて (3.24) の解を一般化した. そして等温位面が最初に縦になる $\partial\theta/\partial z = 0$ となる高度, すなわち静的安定性を失い, 乱流と混合が始まることが示唆される高度を**砕波高度** z_b として定義した. 対数圧力座標系における浮力振動数

$$N^2(z) = \frac{R}{H} \theta_{0z}(z) e^{-\kappa z/H},$$

静水圧平衡の式

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial z} = \frac{R}{H} \theta' e^{-\kappa z/H}$$

より,

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial\theta'}{\partial z} = HR^{-1} e^{\kappa z/H} \left[N^2 + \frac{\partial^2\Phi'}{\partial z^2} + \kappa H^{-1} \frac{\partial\Phi'}{\partial z} \right] \quad (3.28)$$

である. 線形理論から計算された Φ' が z に関して指数関数的に成長することから, $-(\partial_{zz}\Phi' + \kappa H^{-1} \partial_z\Phi')$ は十分な高度において, いくつかの x, y, t の値を持つ波の「峰」で N^2 を打ち消す大きさになると考えられる. この点から $\theta_z = 0$ となり砕波が起こるとするのが Lindzen の考えである. この取り組みは厳密には矛盾している. なぜなら線形な解はそのような高度に到達する前に壊れてしまうからである; にも関わらずこれは完全な非線形の振る舞いに対する定性的な雰囲気を与える.

線形理論を用いて Lindzen の取り組みを説明する. ある低高度で $\Phi' = \Phi_0 \cos k(x - ct)$ であると仮定する. この高度は適当に p_s を選ぶことで $z = 0$ と取ることができる. すなわち (3.24) の解を当てはめ, (3.25) において $\hat{\Phi} = \Phi_0$ (実数) を仮定し, $\omega = ck$ とする; 特に

$$\Phi' = \Phi_0 e^{z/2H} \cos[k(x - ct) + mz] \quad (3.29)$$

である. 今一度鉛直波長が十分小さく, $|m| \gg 1/2H$ であることを保証すると,

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} + \kappa H^{-1} \frac{\partial \Phi'}{\partial z} \approx -m^2 \Phi' = -m^2 \Phi_0 e^{z/2H} \cos[k(x - ct) + mz]$$

を得る. 砕波高度 z_b は $\{\max|\Phi'_{zz} + \kappa H^{-1}\Phi'_z|\}_{z=z_b} = N^2$ で定義され, (3.29) と (3.27) と $c = \omega/k$ より

$$z_b \approx 2H \ln \left| \frac{N^2}{m^2 \Phi_0} \right| = 2H \ln |c^2 \Phi_0^{-1}| \quad (3.30)$$

である. z_b は波の位相速度 c と初期のジオポテンシャルの振幅 Φ_0 に依存することに気をつけよう; 小さい振幅の波は, 壊れるのに十分なほど大きな振幅に成長する前により高高度を通る必要があるため, 砕波高度は Φ_0 が小さくなると大きくなる.

次のステップは砕波高度より上では何が起こるかを説明することである. おそらく, できはじめた乱流は熱と運動量の拡散を引き起こし, この拡散をパラメタリゼーションする粗い方法を (3.23a), (3.23c) に適用すると

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = K \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \quad (3.31a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z \partial t} + N^2 w' = K \frac{\partial^3 \Phi'}{\partial z^3}, \quad (3.31b)$$

$$z > z_b,$$

ここで K は一定の拡散係数である; z_b より上の高度では連続の式 (3.23b) が依然として成立する.

$$\Phi' = e^{z/2H} \text{Re}[\Phi_1 \exp i(kx + m_1 z - kct)]$$

の形式の解を z_b より上で探し, z_b において (3.29) と合うものを選ぶと,

$$\omega + im_1^2 K = -Nk/m_1 \quad (3.32)$$

という (3.27) と似た解が見つかる. ここで $k > 0$ の慣習は保持されている. すなわち

$$m^2 K \ll |\omega| \quad (3.33)$$

となる小さな K が選ばれているならば, これは当然

$$m_1 \approx -\frac{Nk}{\omega} + \frac{iKN^3 k^3}{\omega^4} = m + \frac{iKN^3}{c^4 k}$$

となることから,

$$\Phi' = \Phi_0 \exp \left[\frac{z}{2H} - \frac{KN^3}{c^4 k} (z - z_b) \right] \cos[k(x - ct) + mz], \quad z > z_b \quad (3.34)$$

となり z_b において (3.29) との連続性を満たす. K を伴う余分の指数関数の因子は砕波による波の拡散減衰を仮定した結果によるものである. Lindzen は z_b より上では波は飽和しているか砕波の境界にあるかのどちらかであると仮定した; すなわちすべての $z \geq z_b$ で $\max|\Phi'_{zz} + \kappa H^{-1}\Phi'_z| = N^2$ となる. ゆえに拡散による減衰は陽に $e^{z/2H}$ の成長と釣り合わなくてはならず, K は (3.34) の指数関数の項の z の係数を消去するように選ばれ

$$K = c^4 k / 2HN^3 \quad (3.35)$$

である. これは (3.27) から

$$m^2 K = \frac{N^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{c^4 k}{2HN^3} \right) = \frac{c^2 k}{2HN} = \left| \frac{\omega}{2Hm} \right|$$

が示唆され, すなわち (3.33) は我々がはじめに仮定した $|m| \gg 1/2H$ と整合的である. (3.35) を (3.34) に代入すると小さなパラメータ $m^2 K / \omega$ のリーディングオーダーにおいて

$$z \geq z_b \quad \text{に対して} \quad \Phi' = \Phi_0 e^{z_b/2H} \cos[k(x - ct) + mz] \quad (3.36a)$$

を得, (3.31) から $z \geq z_b$ に対して

$$u' = c^{-1} \Phi_0 e^{z_b/2H} \cos[k(x - ct) + mz] \quad (3.36b)$$

$$w' = -\frac{k}{m} c^{-1} \Phi_0 e^{z_b/2H} \cos[k(x - ct) + mz] \quad (3.36c)$$

を得る. すなわち Lindzen の飽和仮説は z_b よりも上ではそれ以上波の振幅は成長しないことを示唆している: これは大雑把には中間圏で観測された重力波の振幅と整合的である. ついでに, (3.36) と (3.30) から, $z \geq z_b$ に対して $\max|u'| = |c|$ であることに注意しよう.

今, (3.36), (3.30), (3.27), (3.35) を用いて

$$\bar{X}_1 \equiv -\rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{u'w'})_z; \quad (3.37)$$

の大きさを見積もると

$$z > z_b \quad \text{に対して} \quad \bar{X}_1 = c^3 k / 2NH = \frac{N^2 K}{c} \quad (3.38)$$

であり, 一般的にゼロでない定数である. すなわち $c > 0$ ならば砕波高度より上に ($c < 0$ ならば逆になる) 東西平均した波の鉛直運動量フラックスの収束か Eliassen-Palm フラックスの発散が存在し, これは東西平均流の波が誘発する強制への寄与を示唆する. また Lindzen は重力波に対しても K で表される東西平均流へ働く運動量と熱拡散を仮定した.

Lindzen の方法はここで与えられたものよりも一般的で、ゆっくりと変化する平均流 $[\bar{u}(z), 0, 0]$ と、ゼロでない子午面方向の波数 l を含む。一般化した (3.38) は

$$\bar{X}_1 = \frac{(c - \bar{u})^3 k}{2N} \left[\frac{1}{H} + \frac{3 d\bar{u}/dz}{c - \bar{u}} \right] = \frac{N^2 K}{c - \bar{u}} \quad (3.39)$$

ここで $l = 0$ だが $\bar{u} \neq 0$ である。レーダーによって観測された高度 80 ~ 90 km 付近の重力波は数分から 1 時間程度の周期と 5 ~ 15 km 程度の鉛直波長を持つ。このような特徴の波のパラメータをこの式に代入すると、Lindzen の重力波の碎波によるありそうな摩擦の効果のパラメタリゼーションは上部中間圏の東西平均循環の強い強制を示唆し、観測に従うと、 \bar{X}_1 は数十 $\text{m s}^{-1} \text{day}^{-1}$ のオーダーを持つことを示す。

Lindzen のモデルはかなり単純化されており、本質的には単色の重力波の線形理論が元になっていることを強調しておく。モデルの妥当性を調べ、重力波碎波の詳細な非線形の力学とこれらの平均流への効果を理解するために本研究のような数値実験は強力な手段となる。

第4章 結果: シアー流が存在しない場合

4.1 対流と内部重力波の発生

図 4.1, 図 4.2, 図 4.3 にそれぞれ対流圏における温位 θ , 水平速度の摂動 δu , 鉛直速度 w を示す. 水平, 鉛直スケールが共に約 5 km のアスペクト比が 1 程度の対流が摂動を与えた領域で発生していることがわかる. このアスペクト比はいわゆる乾燥対流のセルのアスペクト比と同じ程度になっている. 図 4.4 は図 4.3 について $z = 60$ km まで見たものである. 摂動を与えた領域以外でも対流が起き始め, 高度 5 km よりも上では x, z 方向に特徴的な波数を持った波が発生していることがわかる. 波は x 軸の正の方向, 負の方向どちらにも等方的に伝播している. この波について, $z = 12$ km において $t = 7000$ s \sim 9000 s の範囲でスペクトル解析を行った結果が図 4.5 である. 西進する波と東進する波が等方的に存在することがわかる. また $t = 8000$ s において $z = 8 \sim 15$ km の範囲で鉛直スペクトルを調べた結果 (図 4.6), 鉛直波長は約 7 km (鉛直波数 $m = 0.9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$) であった. スペクトルのピークが見られる波数と振動数について表 4.1 にまとめる.

表 4.1: 図 4.5 に見られる主な水平波数に対応する波の水平波長, 周期, 水平位相速度, 鉛直群速度.

水平波数 (m^{-1})	水平波長 (km)	周期 (min)	水平位相速度 (m s^{-1})	鉛直群速度 (m s^{-1})
0.9×10^{-3}	7	10	11	6
0.4×10^{-3}	15	16	15	6
0.2×10^{-3}	30	30	15	3

これらのパラメータは, 浮力振動数を $N^2 = 9.4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ と仮定した時, 内部重力波の分散関係

$$\hat{\omega}^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2} \quad (4.1)$$

を満たすことから内部重力波であると考えられる.

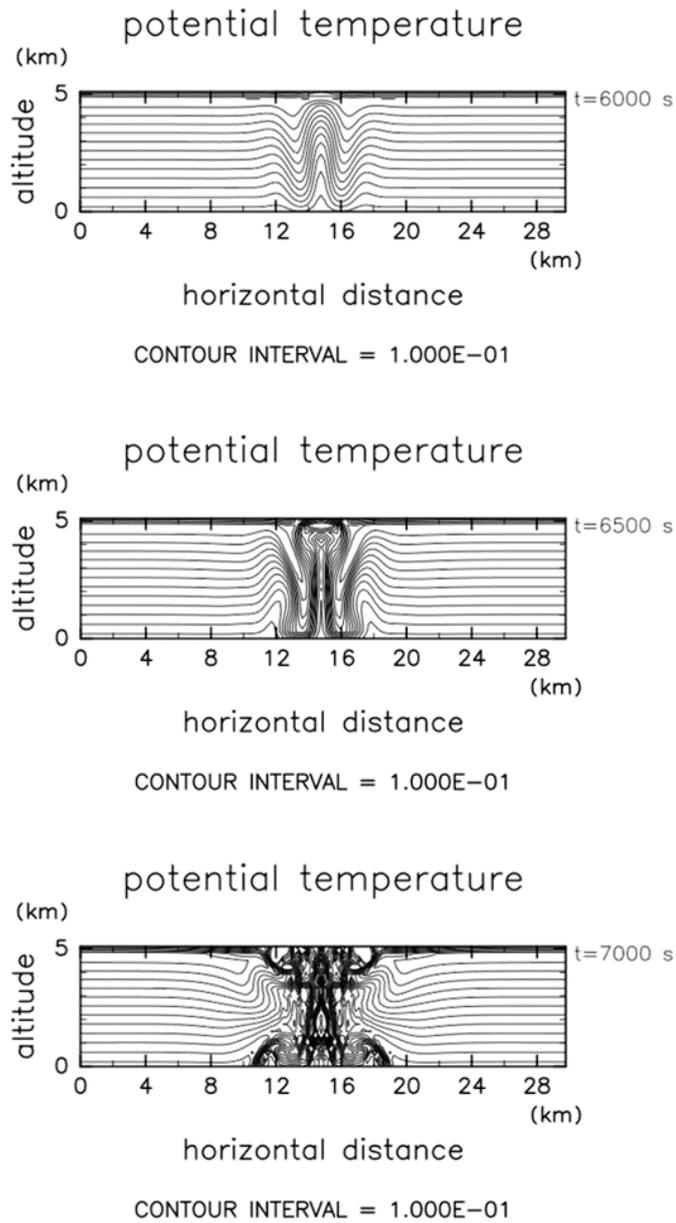


図 4.1: 上から, $t = 6000$ s, 6500 s, 7000 s, 高度 $0 \sim 5$ km における温位 θ (K) の等値線のスナップショット.

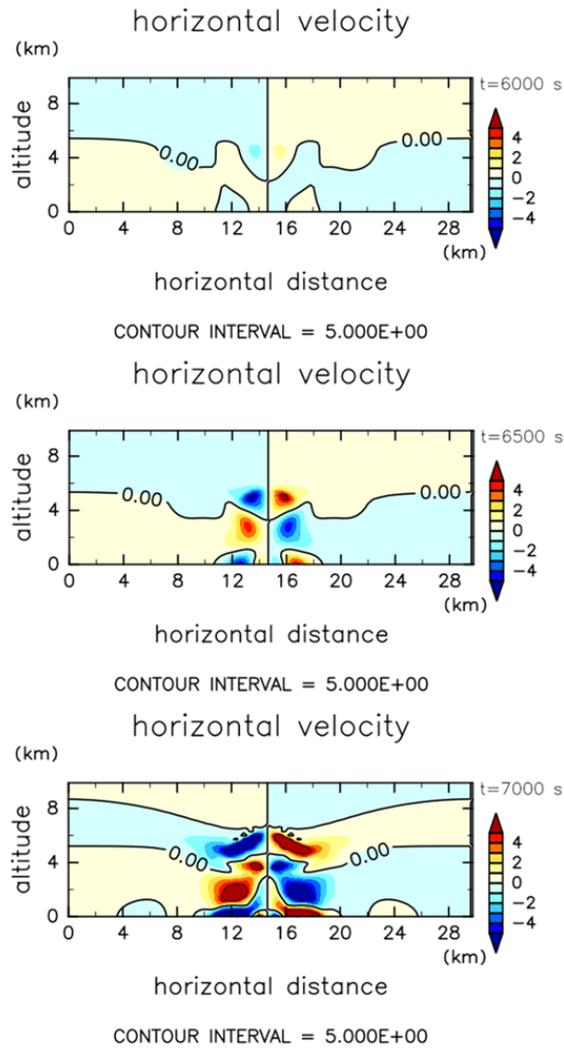


図 4.2: 高度 0 ~ 10 km における水平速度の基本場からの摂動 δu (m s^{-1}). 時刻は図 4.1 と同様.

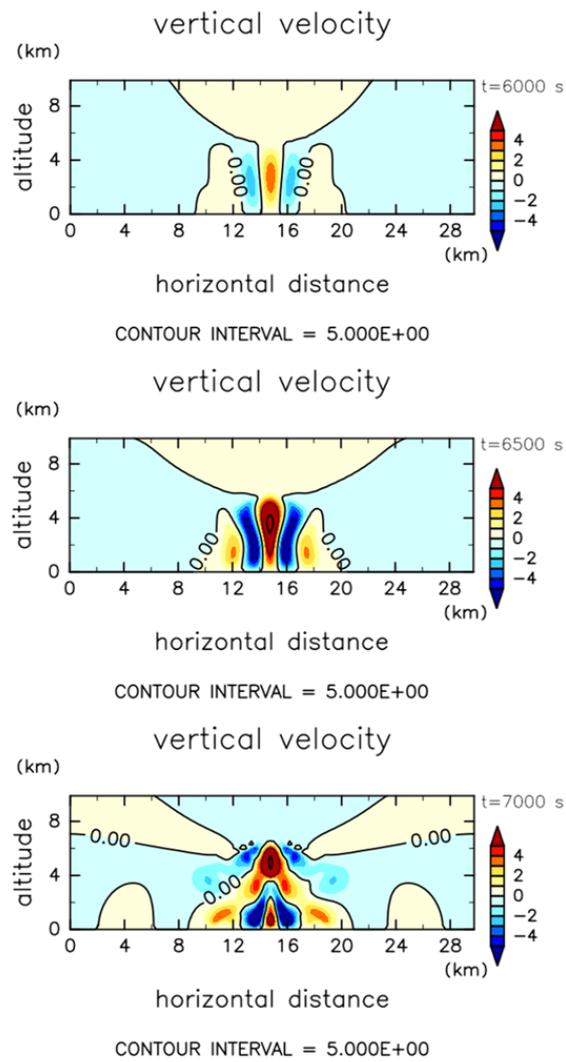


図 4.3: 図 4.2 と同様. ただし鉛直速度 w (m s^{-1}).

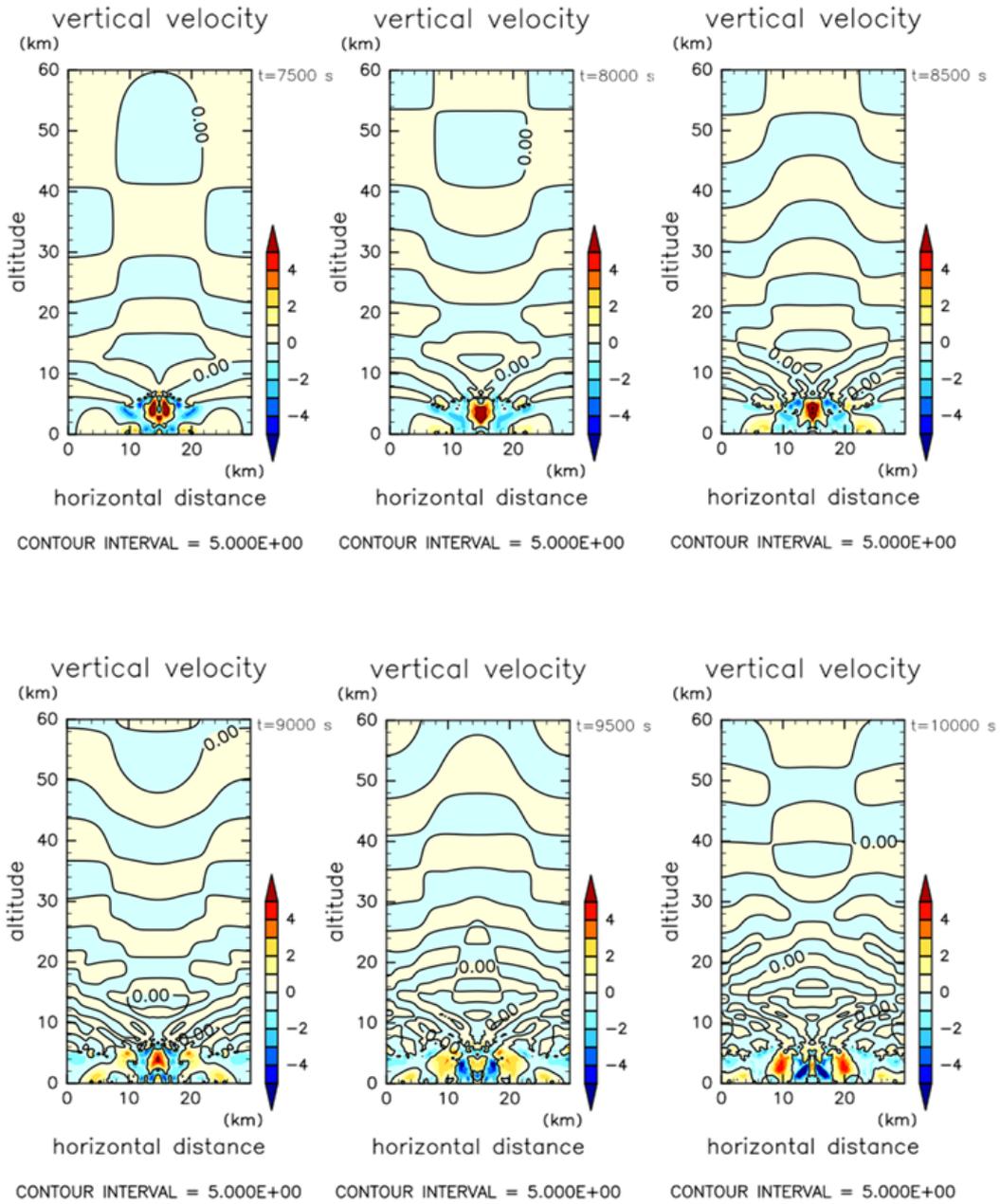


図 4.4: 図 4.3 と同様. ただし $z = 0 \sim 60$ km の範囲において, $t = 7500$ s(上段左), 8000 s(上段中央), 8500 s(上段右), 9000 s(下段左), 9500 s(下段中央), 10000 s(下段右).

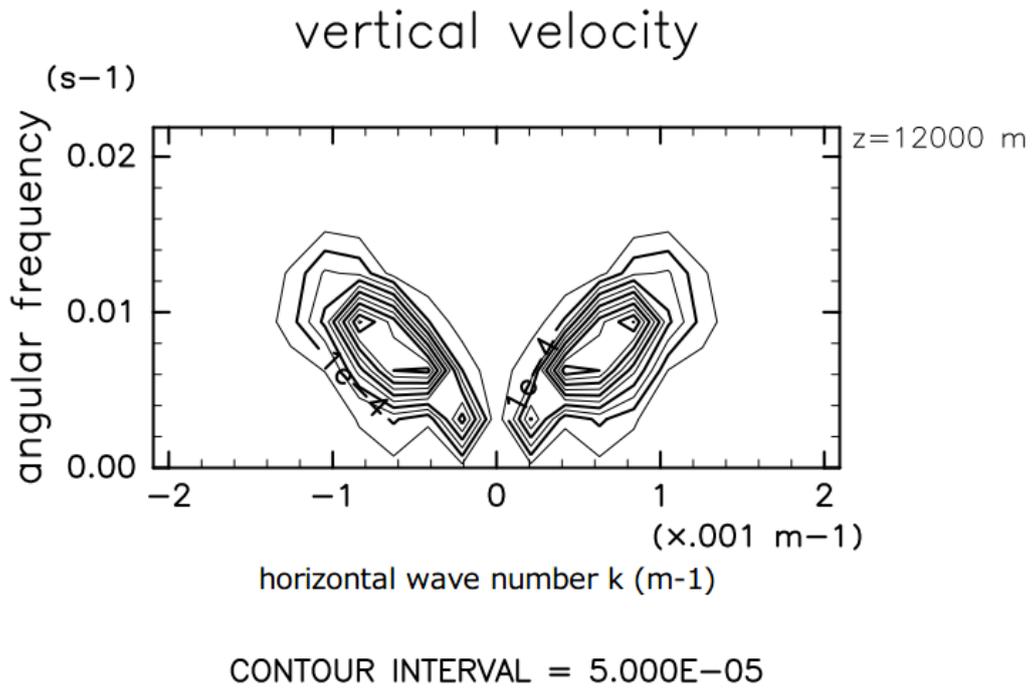


図 4.5: $z = 12 \text{ km}, t = 7000 \text{ s} \sim 9000 \text{ s}$ における鉛直速度の時空間スペクトル

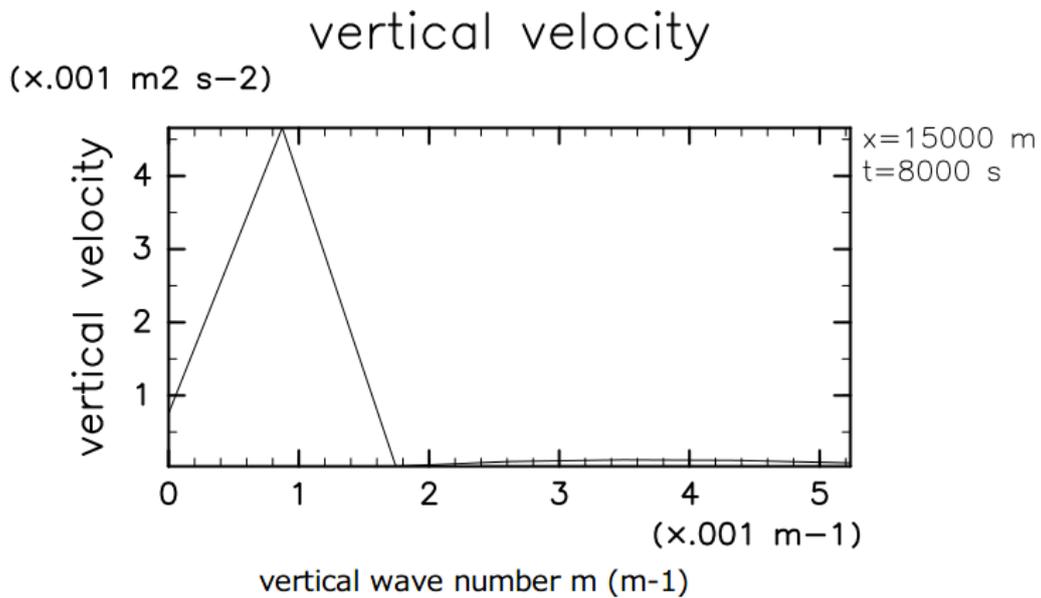


図 4.6: $t = 8000 \text{ s}, z = 8 \sim 15 \text{ km}$ における鉛直速度の鉛直スペクトル

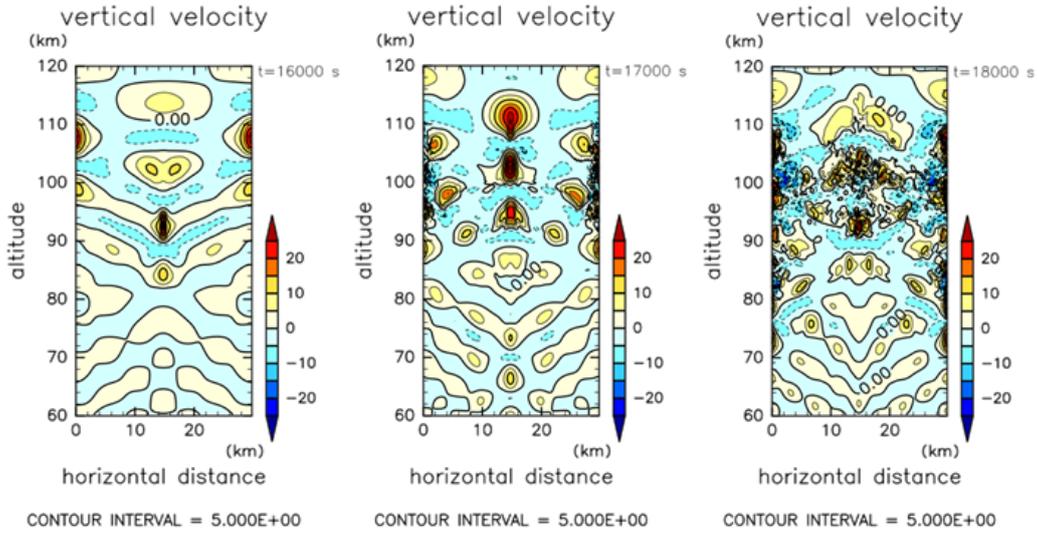


図 4.7: $t = 16000$ s, 17000 s, 18000 s, 高度 60 ~ 120 km における鉛直速度

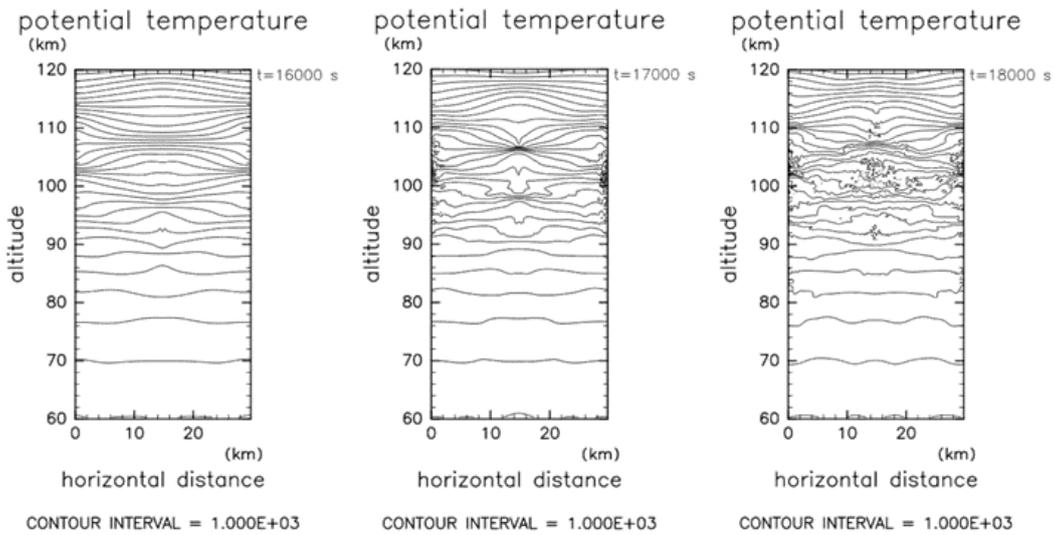


図 4.8: 図 4.7 と同じ時刻, 領域における温位の等値線.

4.2 高高度領域における碎波

図 4.7, 4.8 はそれぞれ $z = 60 \sim 120$ km, $t = 16000$ s, 17000 s, 18000 s における鉛直速度と温位である. この時刻は前節で解析された内部重力波の鉛直群速度から推測される, 対流から発生した内部重力波がこの高度に到達すると考えられる時刻

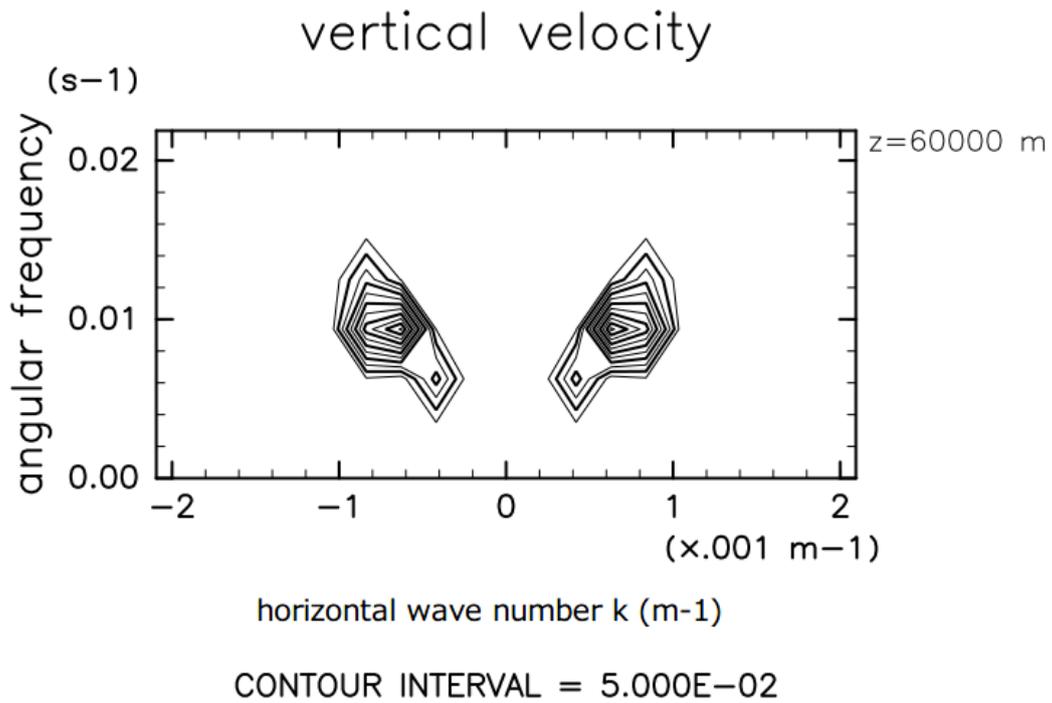


図 4.9: $z = 60$ km, $t = 16000$ s ~ 18000 s における鉛直速度の時空間スペクトル

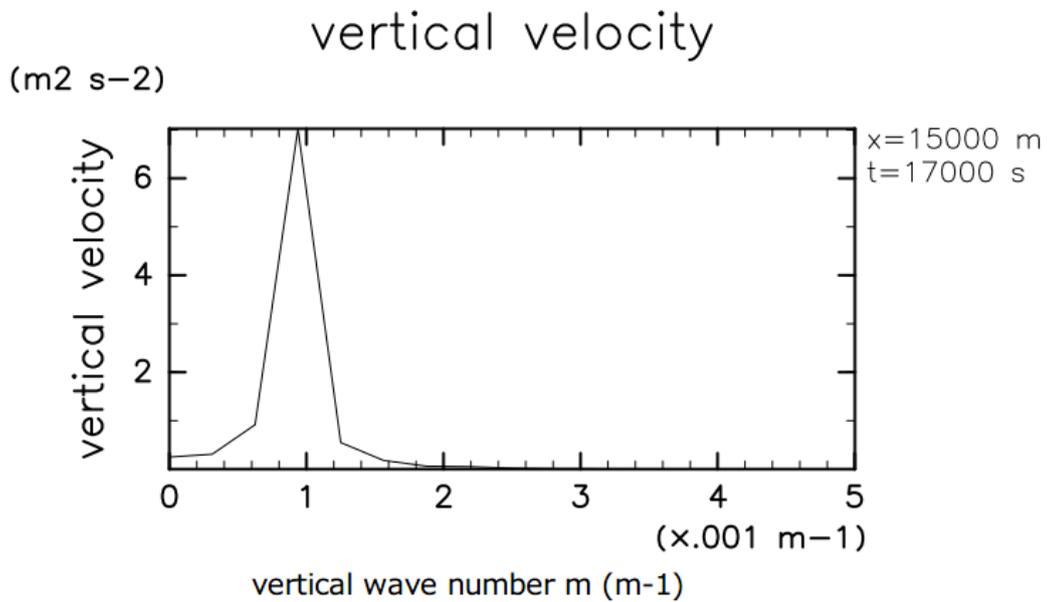


図 4.10: $t = 17000$ s, $z = 50 \sim 70$ km における鉛直速度の鉛直スペクトル

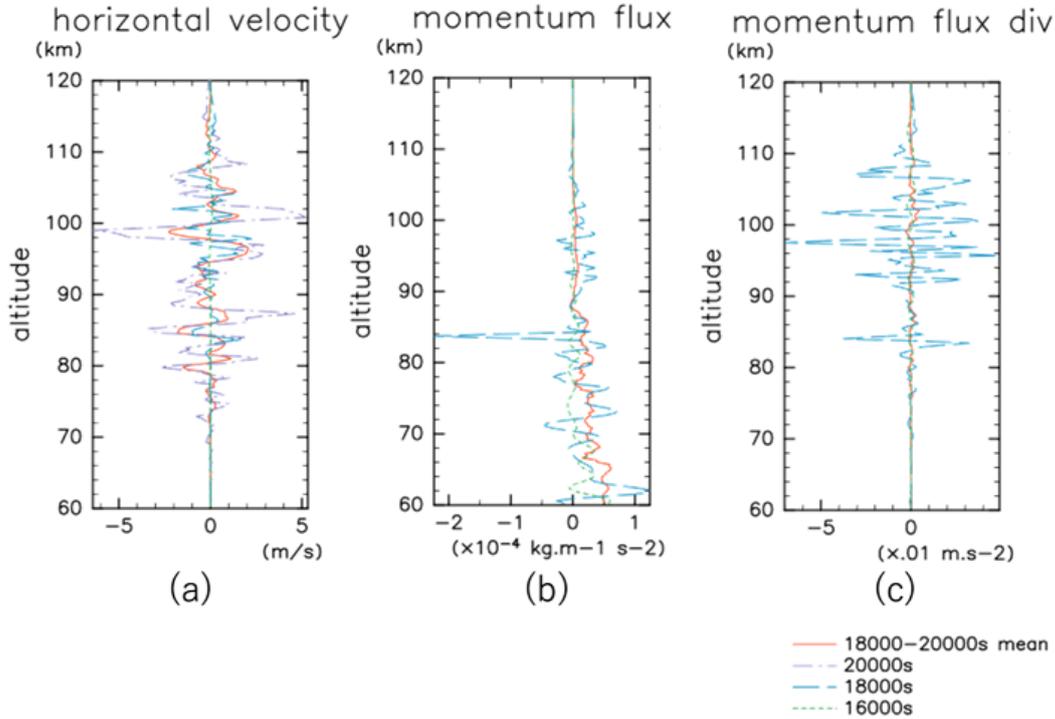


図 4.11: $z = 60 \sim 120$ km における (a) 水平速度の基本場 $U_B(z)$ からのずれ, (b) 運動量フラックス, (c) 運動量フラックスの鉛直微分の逆符号. 点線, 破線, 一点鎖線はそれぞれ $t = 16000$ s, 18000 s, 20000 s における値を表し, 実線は $t = 18000 \sim 20000$ s の時間平均を表す.

である. 高度約 80 ~ 110 km 付近で波の振幅が増大し碎波していることがわかる. $z = 60$ km, $t = 16000 \sim 18000$ s においてスペクトル解析を行うと, 水平波数, 振動数が $z = 12$ km, $t = 7000 \sim 9000$ s で見られた内部重力波と概ね一致する波が見られる^{*1}. よって碎波している波は対流圏から伝播してきた内部重力波だと考えられる. また碎波領域は時間とともに高度が下がっている.

図 4.11 は高度 60 ~ 120 km の水平速度の摂動 (a), 運動量フラックス (b), 運動量フラックスの発散 (c) である. 運動量フラックスは高度とともに減少し, 上部中間圏から下部熱圏にかけて水平速度の東向き・西向きの両方の加速が起きている. ここで表 4.1 から解析された内部重力波が碎波する際の運動量フラックスの発散を見積もる. 線形理論において, 内部重力波が碎波する際の運動量フラックスの発散は

$$\bar{X} = \frac{c^3 k}{2NH} \tag{4.2}$$

^{*1} ただし $z = 12$ km における解析で見られた水平波数 $0.2 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ に対応する波は見られない. これはこの波の鉛直群速度が他の二つの波の半分ほどであり, まだこの領域に到達していないためであると考えられる.

である (Andrews et al. 1987). これを用いて運動量フラックスの発散を見積もると $k = 0.9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ に対応する波では $2.5 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$, $k = 0.4 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ に対応する波では $2.8 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ となる. これは図 4.11(c) の, $t = 18000 \sim 20000 \text{ s}$ の平均の値と概ね一致する. よって運動量フラックスの発散は線形理論で予測された運動量フラックスの発散と整合的である.

第5章 結果: シアー流が存在する場合

5.1 対流と内部重力波の発生

図 5.1, 図 5.2, 図 5.3 にそれぞれ対流圏における温位 θ , 水平速度の摂動 δu , 鉛直速度 w を示す. 時間とともに幾つかの対流セルが成長しながら背景風によって東に流されていることがわかる. 温位の擾乱と, 水平速度の摂動, 鉛直速度の強い部分が一致している. 鉛直速度で見ると, $t = 25000, 25800$ s において 9 から 10 個のセルが見られる. そこでセルの水平サイズは 3 km 程度である. これらの時刻においてセルは高度 3 ~ 4 km に達しているので, 対流セルのアスペクト比はいわゆる乾燥対流のセルのアスペクト比と同じ程度になっている. また鉛直速度の最大値が 4 m s^{-1} を超える強いものが 3 個見られる.

図 5.4 は図 5.3 について 30 km までの高度で見たものである. 対流は時間とともに強くなり, そこから波が発生していることがわかる. 波は水平波長が約 10 km で位相線は西に傾いている. この波について $z = 12 \text{ km}$ において $t = 24000 \text{ s} \sim 26000 \text{ s}$ の範囲でスペクトル解析を行うと (図 5.5), 水平波長が 10 km (水平波数 $k \sim 0.6 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$), 周期が約 33 min (振動数 $\omega \sim 3.0 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$), 水平位相速度が $c = 5 \text{ m s}^{-1}$ の波が見られる. ここで固有振動数

$$|\hat{\omega}| = |\omega - \bar{U}k| \sim 1.5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (5.1)$$

から固有周期を見積もると, 固有周期が約 7 min であることがわかる. また固有位相速度は $\hat{c} = c - \bar{U} = -25 \text{ m s}^{-1}$ であることから西進する波である. 図 5.6 は $t = 28000 \text{ s}$ において $z = 8 \sim 15 \text{ km}$ の範囲で鉛直スペクトルを調べた結果である. ここから鉛直波長は約 7 km (鉛直波数 $m = 0.9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$) であることがわかる. これらのパラメータは内部重力波の分散関係 (4.1) を満たすことから内部重力波であると考えられる.

$z = 12 \text{ km}$ において $t = 27000 \text{ s} \sim 29000 \text{ s}$ の範囲でスペクトル解析を行うと (図 5.7), 図 5.5 よりも振動数, 水平波数の大きな東進する波が存在する. この波の水平

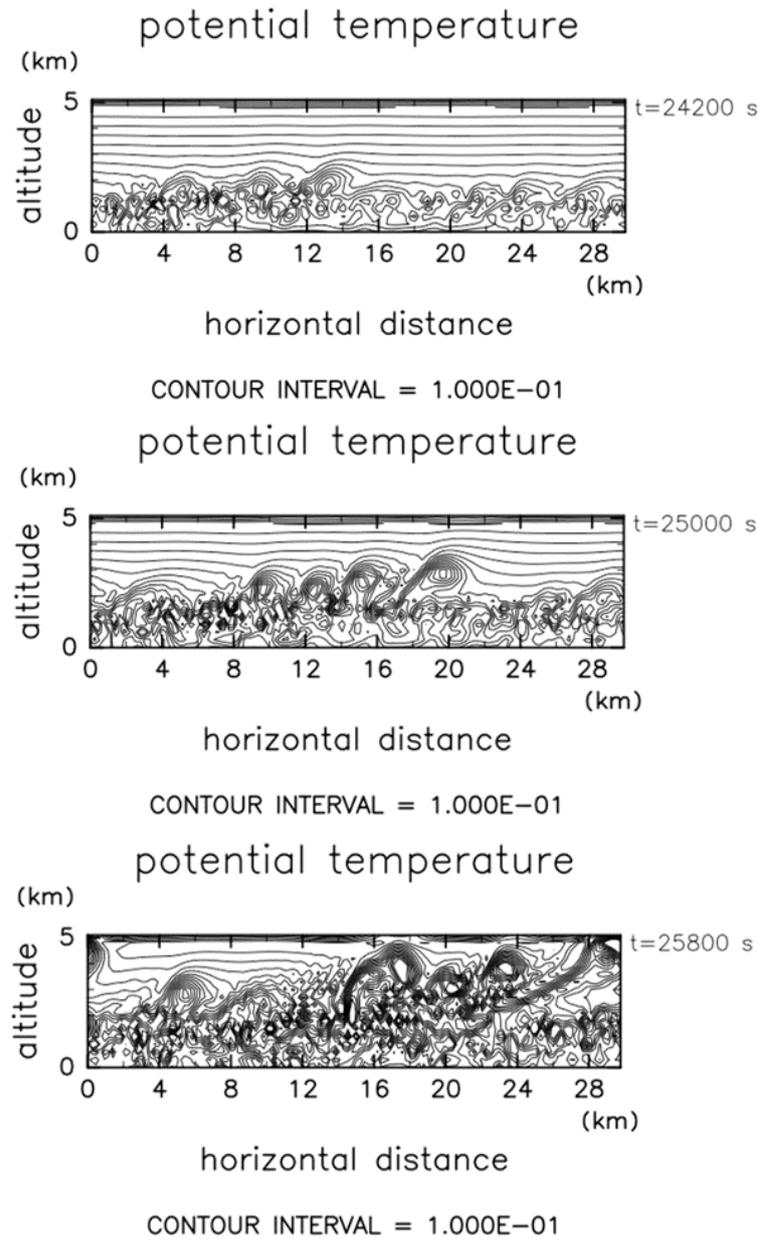


図 5.1: 上から, $t = 24200$ s, 25200 s, 25800 s, 高度 $0 \sim 5$ km における温位 θ (K) の等値線のスナップショット.

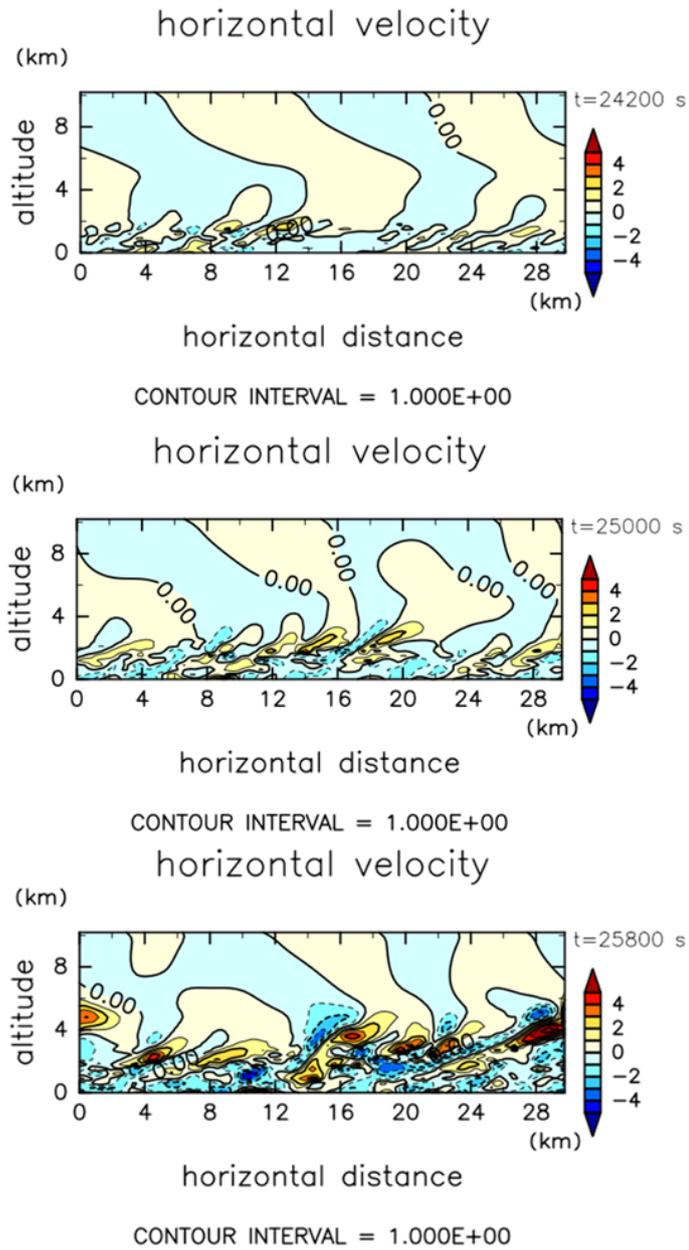


図 5.2: 高度 0 ~ 10km における水平速度の基本場からの摂動 δu (m s^{-1}). 時刻は図 5.1 と同様.

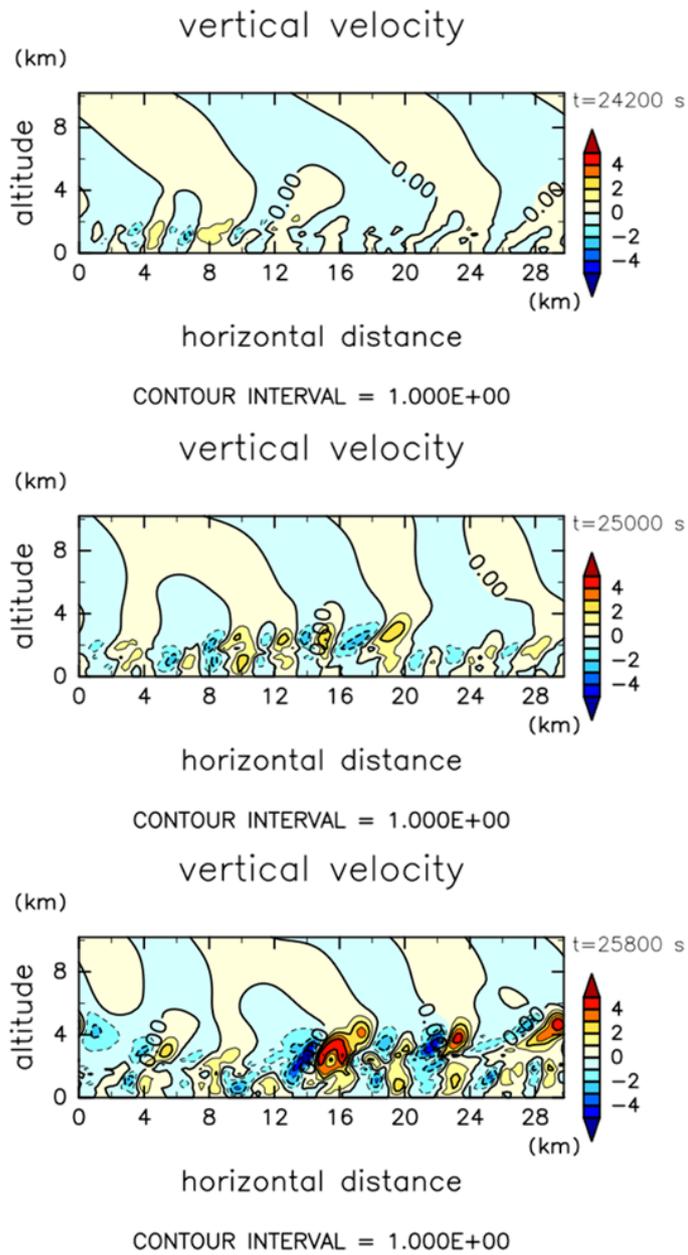


図 5.3: 図 5.2 と同様. ただし鉛直速度 w (m s^{-1}).

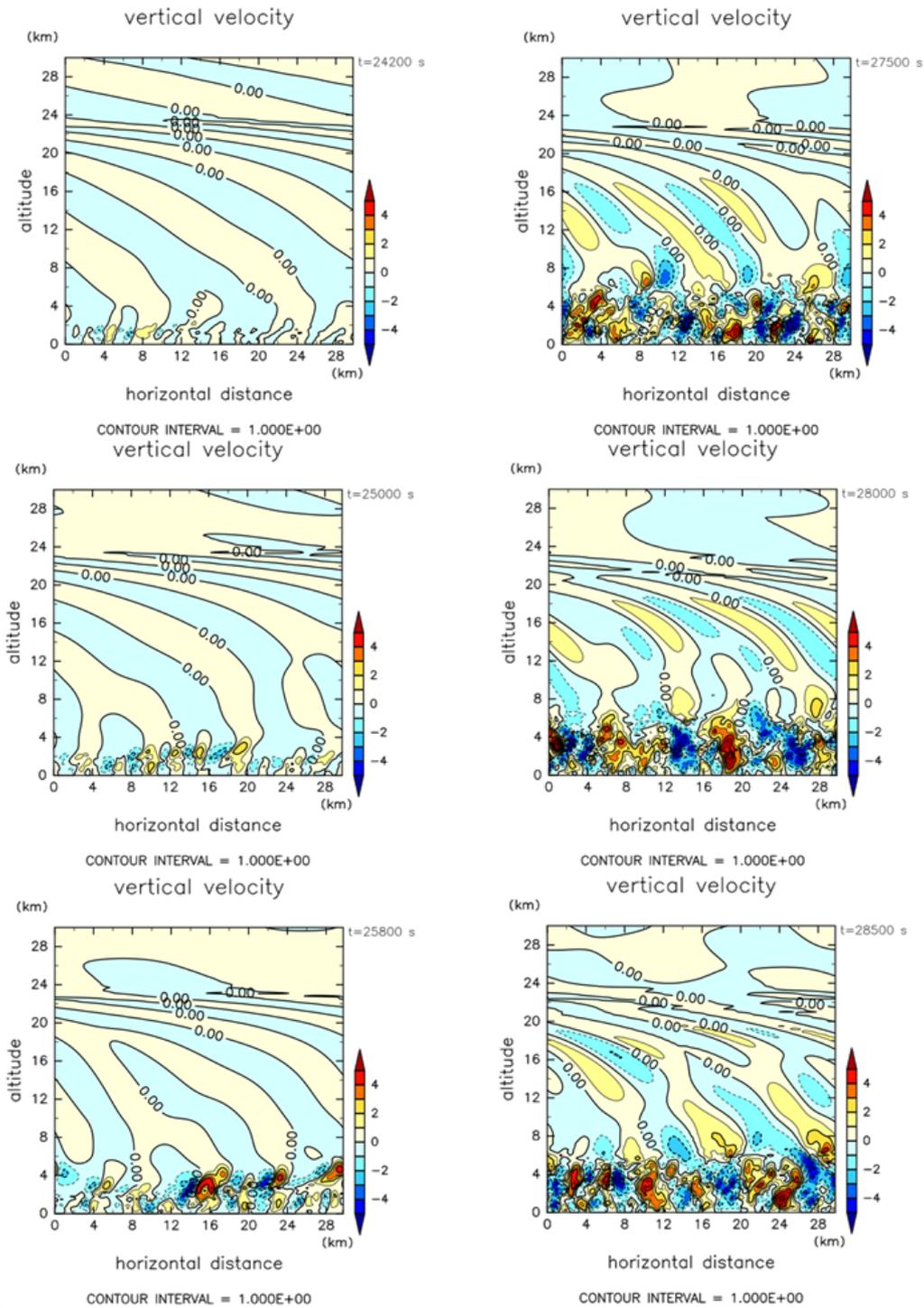


図 5.4: 図 5.3 と同様. ただし $z = 0 \sim 30$ km の範囲において, $t = 24200$ s(左上), 25000 s(左中央), 25800 s(左下), 27500 s(右上), 28000 s(右中央), 28500 s(右下).

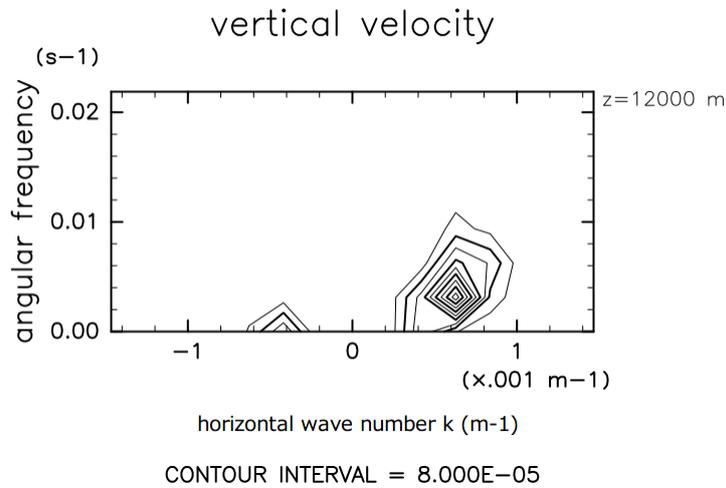


図 5.5: $z = 12 \text{ km}, t = 24000 \text{ s} \sim 26000 \text{ s}$ における鉛直速度の時空間スペクトル

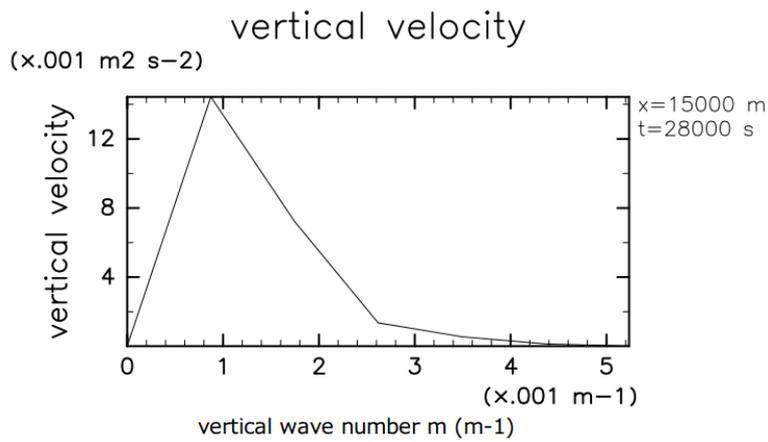


図 5.6: $t = 28000 \text{ s}, z = 8 \sim 15 \text{ km}$ における鉛直速度の鉛直スペクトル

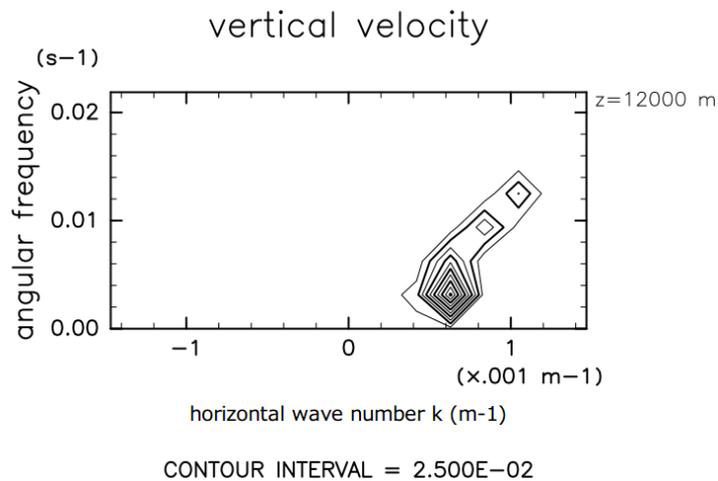


図 5.7: $z = 12 \text{ km}, t = 27000 \text{ s} \sim 29000 \text{ s}$ における鉛直速度の時空間スペクトル

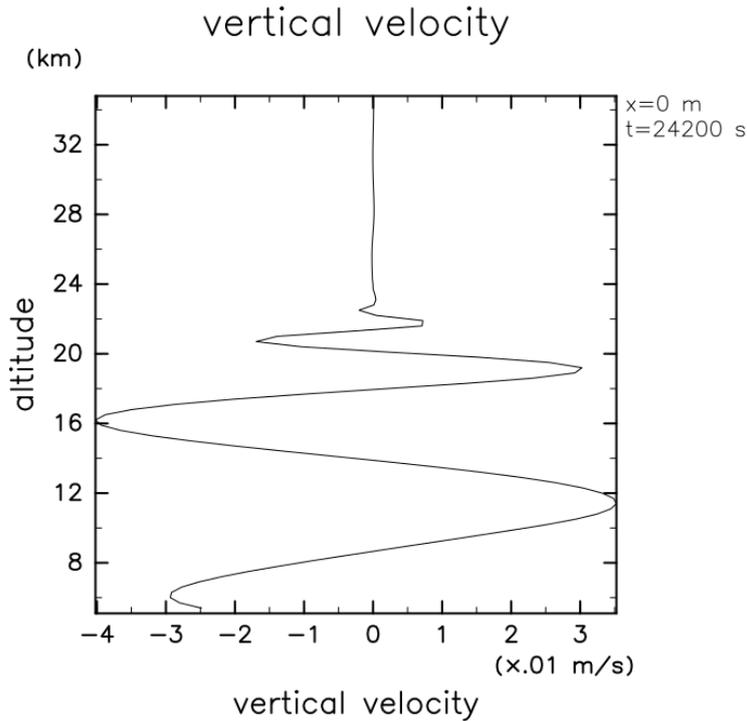


図 5.8: $x = 0 \text{ km}$, $z = 5 \sim 35 \text{ km}$, $t = 24200 \text{ s}$ における鉛直速度.

波数のピークは $0.8 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ と $1.1 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ に存在し, どちらも内部重力波の分散関係 (4.1) を満たすことから内部重力波である. この波の位相速度は約 12 m s^{-1} で, これは高度 $3 \sim 4 \text{ km}$ の対流圏上部の水平風の基本場の速度と概ね一致する. この図 5.7 で見られる内部重力波について以下の表にまとめておく.

表 5.1: 図 5.7 で見られる主な水平波数に対応する波の水平波長, 周期, 水平位相速度, 鉛直群速度.

水平波数 (m^{-1})	水平波長 (km)	周期 (min)	水平位相速度 (m s^{-1})	鉛直群速度 (m s^{-1})
0.6×10^{-3}	10	33	5	2
0.8×10^{-3}	8	10	12	6
1.1×10^{-3}	5	8	12	6

5.2 内部重力波のクリティカルレベルにおける吸収

図 5.8 は $x = 0 \text{ km}$, $z = 5 \sim 35 \text{ km}$, $t = 24200 \text{ s}$ における鉛直速度のプロファイルである. 図 5.4, 図 5.8 から, 高度 20 km 付近で鉛直波長が小さくなり, 位相線が水平

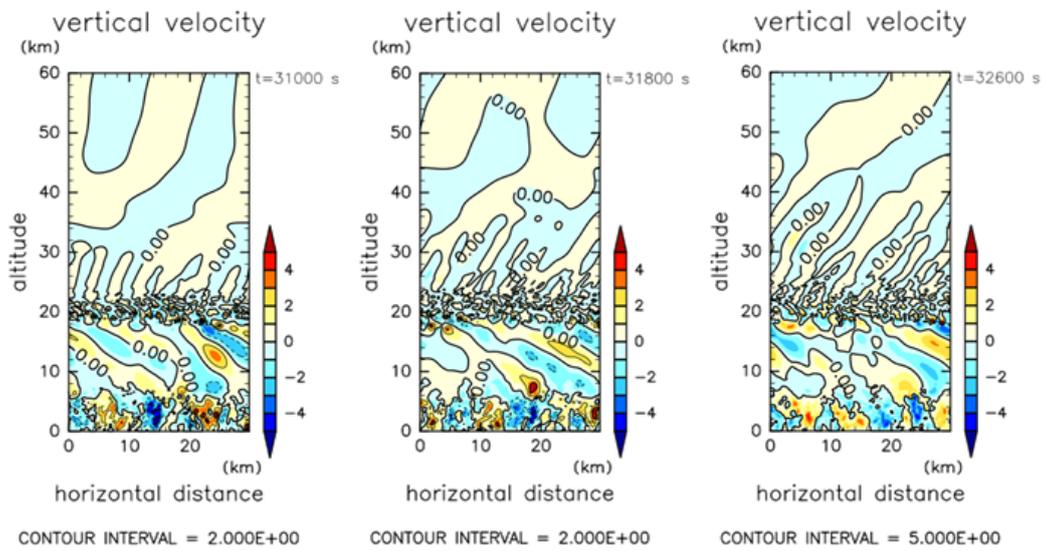


図 5.9: $t = 31000$ s, 31800 s, 32600 s, $z = 0 \sim 60$ km における鉛直速度.

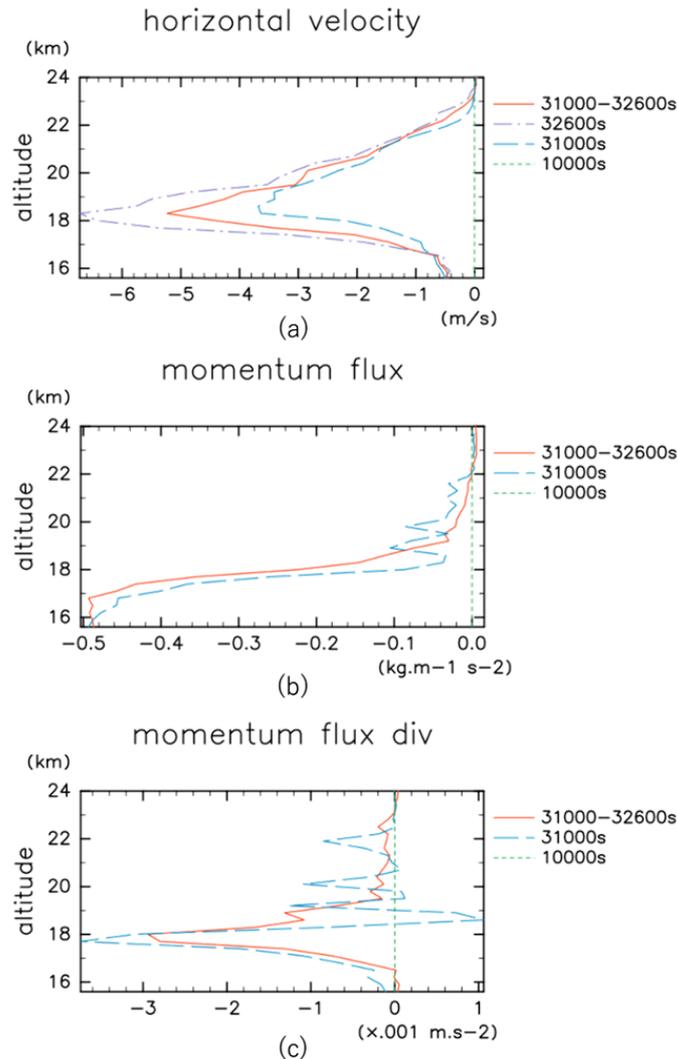


図 5.10: クリティカルレベル $z = 16 \sim 24$ km における (a) 水平速度の基本場 $U_B(z)$ からのずれ, (b) 運動量フラックス, (c) 運動量フラックスの鉛直微分の逆符号. 点線, 破線, 一点鎖線はそれぞれ $t = 10000$ s, 31000 s, 32600 s における値を表し, 実線は $t = 31000 \sim 32600$ s の時間平均を表す.

に近づいており, $z = 22$ km 付近で鉛直速度の振幅がゼロになっていることがわかる. この付近が対流から発生した内部重力波のクリティカルレベルであると考えられる. 図 5.9 は $t = 31000$ s, 31800 s, 32600 s, $z = 0 \sim 60$ km における鉛直速度である. これから対流圏で発生した重力波がクリティカルレベルである高度 20 km 付近で不安定を起こしており, そから新たに位相線が東に傾いた二次的な波が発生していることがわかる. これは Booker and Bretherton (1967) の結果と整合的である.

図 5.10 は高度 16 ~ 24km の水平速度の摂動 (a), 運動量フラックス (b), 運動量フラックスの発散 (c) である. 図 5.10(c) の値はブシネス近似のもとでの平均風 $\bar{U}(z, t)$ と運動量フラックスの関係

$$\frac{\partial \bar{U}(z, t)}{\partial t} \approx \frac{-1}{\rho_B(z)} \frac{\partial (\rho_B \overline{u'w'})}{\partial z} \quad (5.2)$$

の右辺である. 図 5.10(a) を見ると $z = 18$ km 付近で平均風が減速されていることがわかる. $t = 31000$ s と $t = 32600$ s を比較すると, 1600 秒間で約 3 m s^{-1} 減速していることがわかる. 図 5.10(b) からは高度 18 ~ 22 km で運動量フラックスが減少していることがわかる. 図 5.10(c) は運動量フラックスの発散を表し, $t = 31000 \sim 32600$ s の平均のピークの値は $3.0 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ である. この値を用いて (5.2) から平均風の減速を見積もると平均風の減速は 1600 s で 4.8 m s^{-1} となり, 図 5.10(a) で見られた減速と概ね一致する.

図 5.11 は 16 ~ 24 km における温位の等値線である. 等温位線の逆転が見られ, 不安定を起こしていることがわかる. これがクリティカルレベル付近の高度のランダムなパターンを作り, 次節に見るような二次的な波を放射する.

5.3 二次的な内部重力波の放射

図 5.12 は $z = 30$ km, $t = 31000 \sim 32600$ s における鉛直速度の時空間スペクトル解析である. $k = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ (水平波長約 6 km), $\omega = 1.5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (周期約 6.7 min) と $k = 1.7 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ (水平波長約 3.5 km), $\omega = 2.0 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (周期約 5 min) に大きなスペクトルのピークが見られる. また $k = 0.2 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ (水平波長約 30 km), $\omega = 1.0 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (周期約 10 min) にも小さなピークが見られる. 鉛直方向の時空間スペクトル解析の結果である図 5.13 から, 大きなピークに対応する鉛直波数は約 $6.0 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, 小さなピークに対応する鉛直波数は約 $4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ であると考えられる. これらの内部重力波について表 5.2 にまとめておく.

表 5.2: 図 5.12 で見られる主な水平波数に対応する波の水平波長, 周期, 水平位相速度, 鉛直群速度.

水平波数 (m^{-1})	水平波長 (km)	周期 (min)	水平位相速度 (m s^{-1})	鉛直群速度 (m s^{-1})
1.0×10^{-3}	6	6.7	15	7
1.7×10^{-3}	3.5	5	11	3.4
0.2×10^{-3}	30	10	50	20

これらの値はそれぞれ分散関係式 (4.1) を満たしていることから内部重力波であると考えられる. また大きなピークの水平位相速度はクリティカルレベルにおける

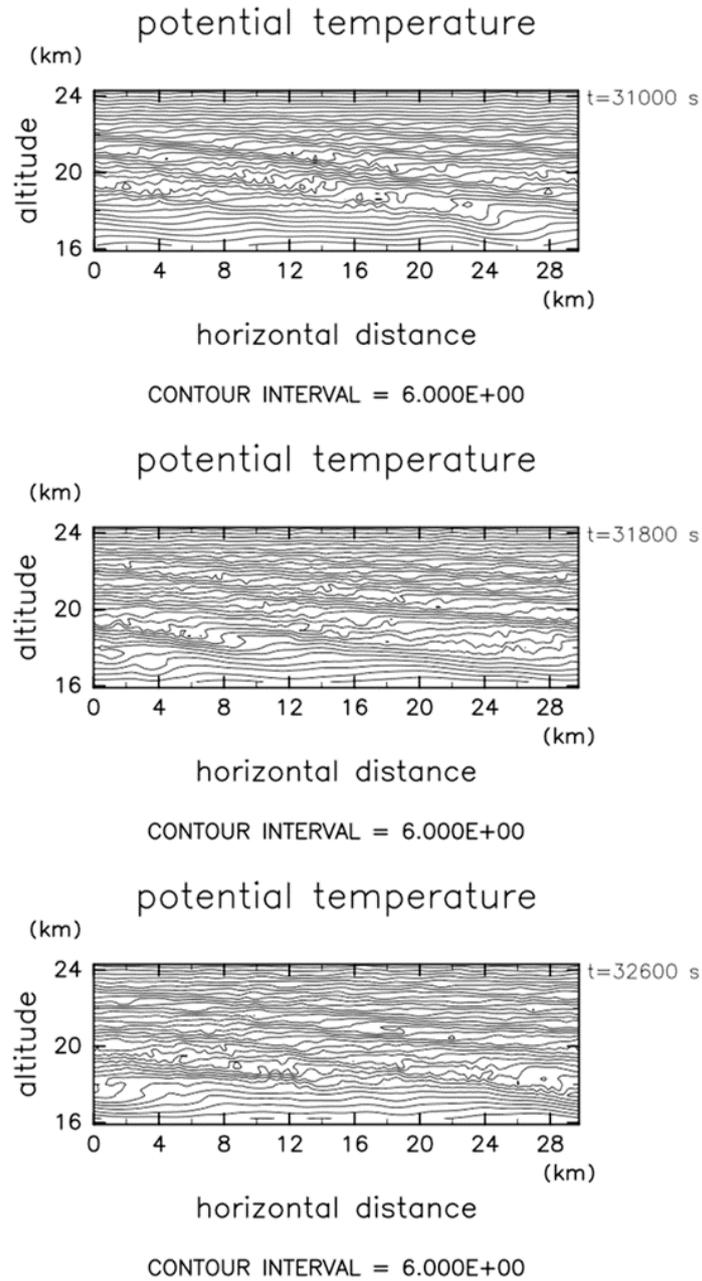


図 5.11: $t = 10000\text{ s}$, 31000 s , 32600 s における温位の等値線 (K).

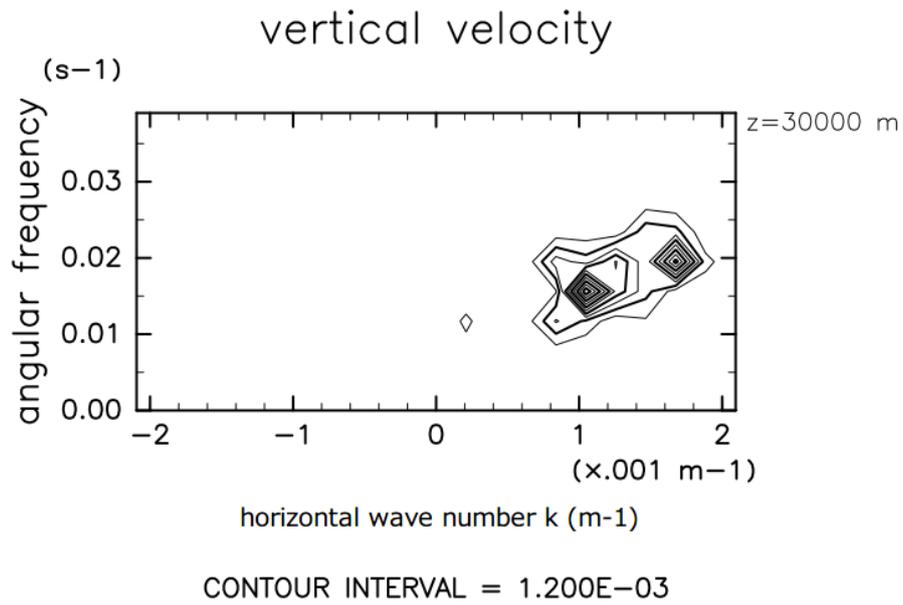


図 5.12: $z = 30$ km, $t = 31000 \sim 32600$ s における鉛直速度の時空間スペクトル.

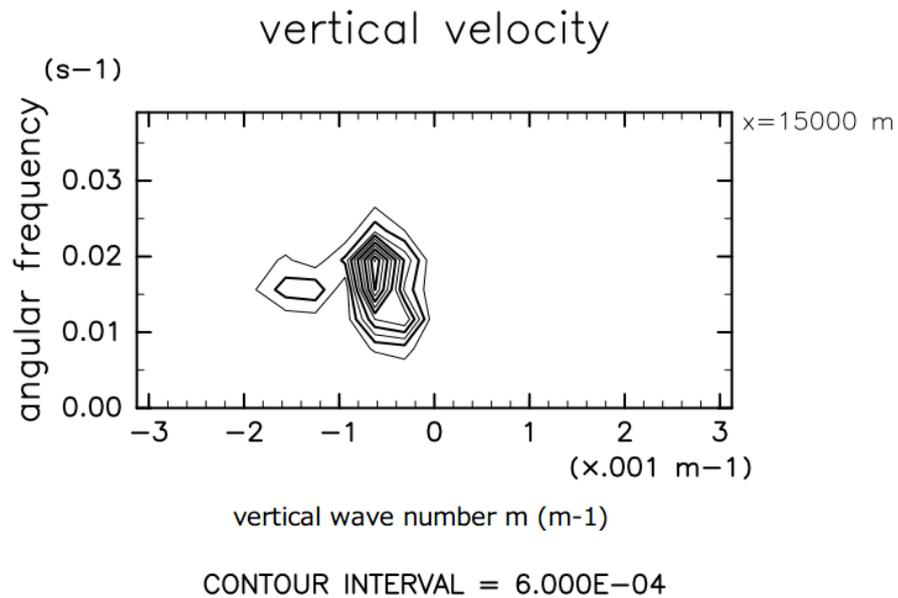


図 5.13: $z = 25 \sim 45$ km, $t = 31000 \sim 32600$ s における鉛直速度の時空間スペクトル.

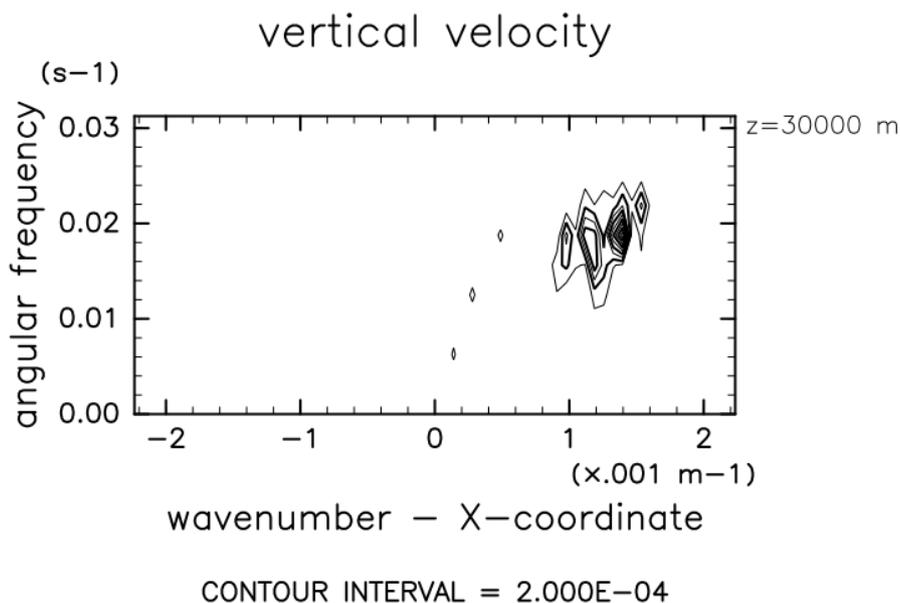


図 5.14: 水平領域を 90 km に広げた場合の, $z = 30 \text{ km}$, $t = 32000 \sim 34000 \text{ s}$ における鉛直速度の時空間スペクトル.

東西平均流の速度と概ね一致しており, 波源での平均流の速度が位相速度を決めると考えられる.

一方小さなピークを持つ波は水平波長が 30 km と長く, 位相速度もかなり大きい. この波は Goya and Miyahara (1999) でも見られ, 波長 5 ~ 6 km 程度の重力波どうしの非線形相互作用である可能性が言及されていた. しかし Goya and Miyahara(1999) では詳しい議論がなされていないこと, 水平波長が水平領域の大きさと一致していることから, 水平領域を 90 km に広げた場合についても計算を行った. 図 5.14 は水平領域を 90 km に広げた場合の水平方向の時空間スペクトルである. 水平領域が 30 km の場合と同様に水平波数 $1 \times 10^{-3} \sim 1.8 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ の範囲に大きなピークを持ち, 水平波数 $0.1 \times 10^{-3} \sim 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ の範囲に小さなピークを持つことがわかる. この小さなピークに対応する波長は 10 ~ 40 km であり, 波長 5 ~ 6 km の波が非線形相互作用を起こした場合に発生すると考えられる波長と一致する. このことから, 水平領域が 30 km の場合の波長 30 km の波は, 領域によって波長が制限されている可能性はあるが, 非線形相互作用によって発生した波であると考えられる.

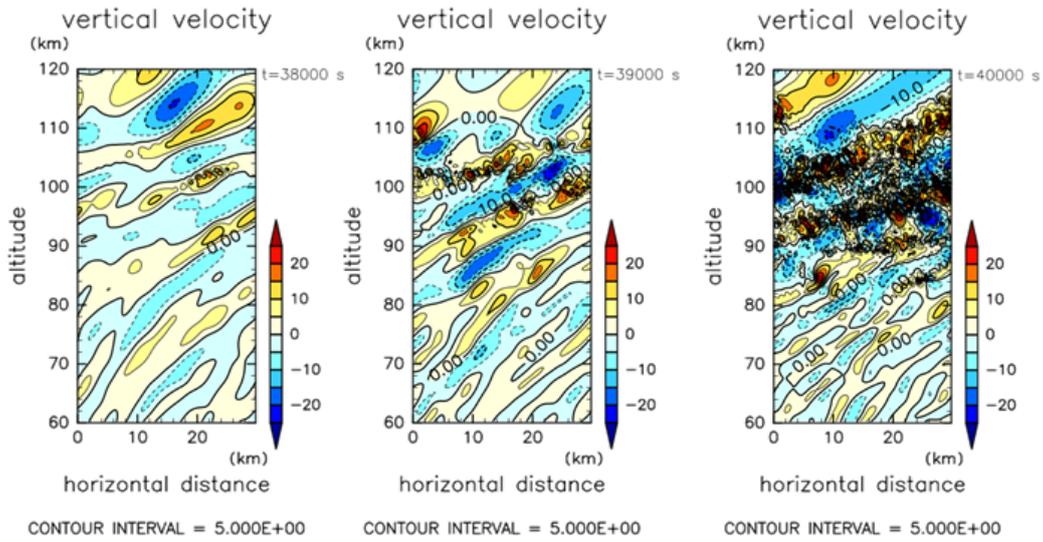


図 5.15: $t = 38000$ s, 39000 s, 40000 s, 高度 60 ~ 120 km における鉛直速度

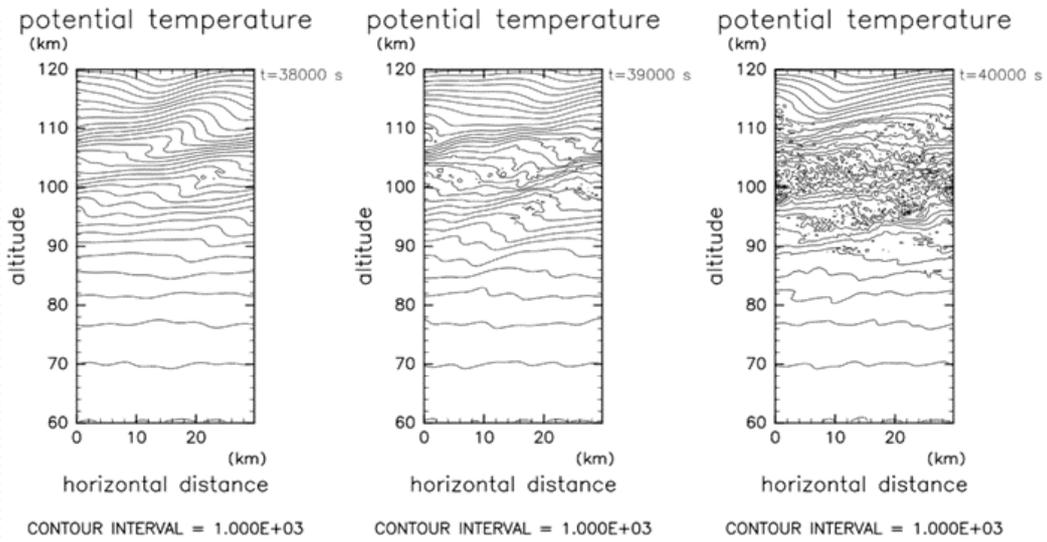


図 5.16: 図 5.15 と同じ時刻, 領域における温位の等値線.

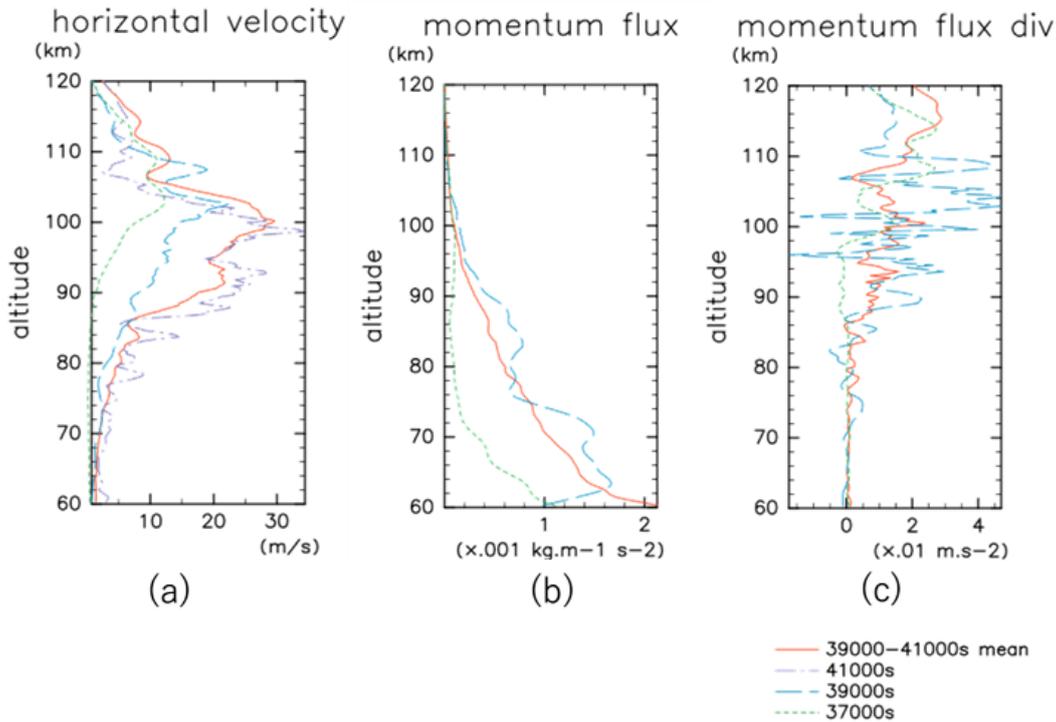


図 5.17: $z = 60 \sim 120 \text{ km}$ における (a) 水平速度の基本場 $U_B(z)$ からのずれ, (b) 運動量フラックス, (c) 運動量フラックスの鉛直微分の逆符号. 点線, 破線はそれぞれ $t = 37000 \text{ s}$, 39000 s における値を表し, 実線は $t = 39000 \sim 41000 \text{ s}$ の時間平均を表す.

5.4 高高度領域における碎波

5.4.1 碎波による平均流加速

図 5.15, 5.16 はそれぞれ $z = 60 \sim 120 \text{ km}$, $t = 38000 \text{ s}$, 39000 s , 40000 s における鉛直速度と温位である. 位相線が東へ傾いている波であることから, クリティカルレベルから発生した二次的な内部重力波がさらに高高度へ伝播し, 高度約 $80 \sim 110 \text{ km}$ 付近で振幅が増大し碎波していることがわかる. また碎波領域は時間とともに高度が下がっている. 図 5.17 は高度 $60 \sim 120 \text{ km}$ の水平速度の摂動 (a), 運動量フラックス (b), 運動量フラックスの発散 (c) である. ここから内部重力波の碎波によって東向きの風が誘発されていることがわかる. 運動量フラックスは高度とともに減少し, 上部中間圏から下部熱圏にかけて東向きの加速が起きている. クリティカルレベルにおける平均流加速の考察と同様に, 図 5.17(a), (c) から平均流の加速を見積もる. 図 5.17(a) からは 2000 s あたり 10 m s^{-1} の水平風の加速が起き

ていることがわかる. また図 5.17(c) から $t = 39000 \sim 41000$ s の平均のピークの値は $2.0 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ と見積もられ, これらの値から 2000 s あたりの加速は 40 m s^{-1} となる. したがって図 5.17(a) から見積もられる値とオーダーは一致している.

5.4.2 砕波高度についての考察

5.3 節で得られた二次的な内部重力波のパラメータを用いて砕波高度を見積もり, 計算結果との比較を行う.

線形理論における砕波高度 (3.30) と偏波関係式 (3.25b) より, w の振幅から見積もられる砕波高度は

$$z_b = 2H \ln \left| \frac{\omega}{m\hat{w}} \right|. \quad (5.3)$$

ここで \hat{w} は鉛直速度の振幅である. スケールハイトを $H = 7 \text{ km}$ とし, 図 5.13 から $\omega = 0.02 \text{ s}^{-1}$, $m = 0.6 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, $\hat{w} = 0.06 \text{ m s}^{-1}$ を (5.3) 代入すると, $z_b \sim 80 \text{ km}$ となる. これは計算結果と概ね一致している.

また $t = 31000 \text{ s}$, $z = 30 \text{ km}$ において鉛直群速度が 7 m s^{-1} であることから, 砕波高度 80 km に到達する時刻は約 $t = 39000 \text{ s}$ であると見積もられる. これも砕波が始まる時刻と整合的である. これらの結果から計算結果と Lindzen (1981) の線形理論は整合的であるといえる.

第6章 まとめ

本研究では非線形・非静力学・圧縮性の鉛直2次元モデルを作成し、対流で発生した内部重力波が中層大気まで伝播し、中層大気の運動に与える影響を調べた。東西風がない場合と、対流圏において理想的な東西風分布を持つ場合を設定し、対流からの内部重力波の生成と伝播、クリティカルレベルにおける波の吸収、クリティカルレベルから新たに発生する内部重力波の高高度伝播、さらに中間圏界面付近での碎波とそこでの平均東西風の生成が確認できた。

まず平均流が存在しない場合について述べる。高度 12 km 付近でスペクトル解析を行った結果、水平波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、鉛直波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、振動数 $1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ の波と水平波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、鉛直波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、振動数 $1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ の波が見られた。これは重力波の分散関係を概ね満たしているため重力波であると考えられる。また高度 80 ~ 110 km 付近において伝播してきた波の碎波が見られた。碎波領域における運動量フラックスの発散は $3 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ であり、これは線形理論から見積もられる運動量フラックスの発散と整合的である。

次に平均流が存在する場合について述べる。高度 12 km 付近でスペクトル解析を行った結果、水平波数 $6 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、鉛直波数 $9 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、振動数 $3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ の波が見られた。これは重力波の分散関係を概ね満たしているため重力波であると考えられる。またこの波の水平位相速度は 5 m s^{-1} である。この波のクリティカルレベルと考えられる高度 20 km 付近で波の吸収が行われていることが確認できる。水平速度の摂動、運動量フラックス、運動量フラックスの発散を調べた。水平速度の摂動から 1600 s あたり 2 m s^{-1} の西向き加速があることがわかった。また運動量フラックスの発散は $3 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ である。これらの値は水平風の加速は運動量フラックスの発散によって生じていることを示している。次にクリティカルレベルから発生した二次的な波について調べた。高度 30 km 付近においてスペクトル解析を行った結果、水平波数、鉛直波数、振動数がそれぞれ $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 、 $1.3 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 、 $1.5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ の波と $1.7 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 、 $6 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ 、 $2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ の波が見られた。これらの波は対流で発生した内部重力波よりも水平波長が短い。大気密度の減少に伴い波の振幅が増大することによって高度 100 ~ 110 km 付近で碎波が起こる。この

領域における水平速度の摂動, 運動量フラックス, 運動量フラックスの発散を調べると, 水平速度の摂動から 2000 s で 10 m s^{-1} の水平風の東向き加速が見られた. 運動量フラックスの発散の平均値は $2 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ である. これらの値は概ね整合的であり, 水平風の加速は運動量フラックスの発散によって生じていることを示している. この運動量フラックスの発散は観測に比べて一桁程度大きい. また平均風がない場合に対流圏から伝播してきた内部重力波によるものと比べた場合にもこちらのほうが一桁程度大きい. しかしながら下層から上層へ十分な量の運動量が輸送されていることが示された.

謝辞

本研究にあたり多くの方々のご指導ならびにご協力をいただきました。林祥介教授にはセミナーを通して研究内容の指針をいただきました。岩山隆寛准教授には研究内容の指針から理論や数値計算の手法など広範囲にわたってご指導や助言をいただきました。高橋芳幸准教授にはプログラムの作成などについて多くの有益なアドバイスをいただきました。博士後期課程の河合佑太氏をはじめとする地球および惑星大気科学研究室の皆様には計算機の利用や日々の議論など様々な面でお世話になりました。ここに改めて皆様に心よりお礼を申し上げます。

また、本研究を進めるにあたり合屋研之博士に数値計算プログラムや初期値データを提供していただきました。心より感謝します。

計算結果の解析・描画には、地球流体電脳倶楽部 (<http://www.gfd-dennou.org/>) によって開発された Gphys, Ruby DCL を使用させていただきました。

付録A Goya & Miyahara (1999) の方程式の導出

Goya & Miyahara (1999) で扱う方程式系を導出する. 鉛直 2 次元の系を考えると運動方程式は

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + D_u, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + D_w \quad (\text{A.2})$$

である. 連続の式は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

である. 熱力学の式は

$$c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + D_T \quad (\text{A.4})$$

である. また理想気体の状態方程式は

$$p = \rho RT \quad (\text{A.5})$$

である. 記号は以下のとおりに定義している:

u : 水平速度,

w : 鉛直速度,

p : 圧力,

ρ : 密度,

T : 温度,

$D_{u,w,T}$: 散逸の効果.

(2.3a), (2.3b) を用いて (A.3), (A.5) を書き換えると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (\text{2.1d})$$

$$p = R\tilde{T} \quad (2.1e)$$

となる.

(2.1a), (2.1b) を導出する. (A.1) の物質微分を展開し, (2.3a), (2.3b) を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho D_x \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{u}u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}w}{\partial z} + u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho D_u \end{aligned} \quad (A.6)$$

ここで

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta \tilde{u} + \tilde{u}_B) = \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial t}$$

であることと, (2.1d) を用いると (A.6) は

$$\frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{u}u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}w}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho D_u \quad (A.7)$$

と書ける. (A.2) も同様に変形すると

$$\frac{\partial \delta \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{w}u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}w}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \rho D_w \quad (A.8)$$

である.

(2.1c) を導出する. (2.1e) の物質微分をとると

$$\frac{Dp}{Dt} = R \frac{D\tilde{T}}{Dt}.$$

これを用いて (A.4) から Dp/Dt を消去すると,

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{DT}{Dt} &= R \frac{D\tilde{T}}{Dt} + \rho D_T \\ c_p \left(\frac{D\tilde{T}}{Dt} - T \frac{D\rho}{Dt} \right) &= R \frac{D\tilde{T}}{Dt} + \rho D_T \end{aligned} \quad (A.9)$$

である. これに (A.3) を用い, 物質微分を微分を展開して整理すると,

$$\begin{aligned} c_v \frac{D\tilde{T}}{Dt} &= -c_p \tilde{T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho D_T \\ \frac{\partial \delta \tilde{T}}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{u}T}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}T}{\partial z} - \frac{R\tilde{T}}{c_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\rho}{c_v} D_T \end{aligned} \quad (A.10)$$

となる。

$$\frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{u}u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}w}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} - K_H \frac{\partial^4 \delta \tilde{u}}{\partial x^4} + K_V \frac{\partial^2 \delta \tilde{u}}{\partial z^2} - R_f \delta \tilde{u} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \delta \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{w}u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}w}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g - K_H \frac{\partial^4 \delta \tilde{w}}{\partial x^4} + K_V \frac{\partial^2 \delta \tilde{w}}{\partial z^2} - R_f \delta \tilde{w} \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \delta \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{u}T}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}T}{\partial z} - \frac{R\tilde{T}}{c_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - K_H \frac{\partial^4 \delta \tilde{T}}{\partial x^4} + K_V \frac{\partial^2 \delta \tilde{T}}{\partial z^2} - \alpha \delta \tilde{T} \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0, \quad (2.1d)$$

$$p = R\tilde{T} \quad (2.1e)$$

付録 B 差分化の方法と精度について

B.1 一階微分

水平方向・鉛直方向ともに差分化には中央差分近似を用いる。格子間隔を Δx とすると、一階微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{B.1})$$

と表される。 $f(x + \Delta x)$ と $f(x - \Delta x)$ をそれぞれ二次の項まで Taylor 展開し、(B.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\left\{ f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 - O(\Delta x^3) \right\} \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となるので、この近似は Δx について二次精度の近似である。

B.2 二階微分

二階微分の中央差分近似を導出する。二階微分は一階微分の差分として表すことができるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial}{\partial x} f \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} f \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

である. $f(x + \Delta x)$, $f(x - \Delta x)$ を3次の項まで Taylor 展開すると

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 \pm \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \quad (\text{B.4})$$

となるので, (B.3) に代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} 2\Delta x^2 + O(\Delta x^4) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{B.5})$$

となり, (B.3) は Δx について二次精度の近似であることがわかる.

B.3 四階微分

$f(x + \Delta x/2)$, $f(x - \Delta x/2)$ での三階微分の差分を考える. $f(x + \Delta x/2)$, $f(x - \Delta x/2)$ の三階微分は (B.3) を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x + \Delta x/2) &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial^2 f(x + \Delta x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{f(x + 2\Delta x) - 3f(x + \Delta x) + 3f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x^3}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x - \Delta x/2) &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f(x - \Delta x)}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - 3f(x) + 3f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^3} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

である. (B.6), (B.7) を用いると $f(x)$ の四階微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x + \Delta x/2) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x - \Delta x/2) \right] \\ &= \frac{f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + 6f(x) - 4f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^4} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

と書ける. また $f(x \pm 2\Delta x)$, $f(x \pm \Delta x)$ を5次の項まで展開すると,

$$\begin{aligned} f(x \pm 2\Delta x) &= f(x) \pm \frac{\partial f}{\partial x} (2\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (2\Delta x)^2 \pm \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (2\Delta x)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} (2\Delta x)^4 \pm \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} (2\Delta x)^5 + O(\Delta x^6), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} f(x \pm \Delta x) &= f(x) \pm \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 \pm \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Delta x^4 \pm \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \Delta x^5 + O(\Delta x^6). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

これを (B.8) に代入して整理すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} &= \frac{2}{\Delta x^4} \left[\left\{ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (2\Delta x)^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} (2\Delta x)^4 \right\} \right. \\ &\quad \left. - 4 \left\{ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Delta x^4 \right\} + \mathcal{O}(\Delta x^6) \right] \\ &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^2)\end{aligned}\tag{B.11}$$

となるので, この近似は Δx について二次精度を持つ.

付録C スペクトル解析

C.1 直接法

離散的で有限な区間で定義された関数 $x(t_i)$ を考える。離散時間間隔を Δt 、データの個数を N とすると、基本周期 $T = N\Delta t$ となる。独立変数は $t_i \equiv (i-1)\Delta t$ の点で定義される。これのフーリエ級数展開は

$$x(t_i) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m \left(a_n \cos \frac{2\pi}{T} n t_i + b_n \sin \frac{2\pi}{T} n t_i \right) \quad (1 \leq m \leq N/2), \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t_i) \cos \frac{2\pi}{T} n t_i dt \\ &= \frac{2\Delta t}{T} \sum_{i=1}^N x(t_i) \cos \frac{2\pi}{T} n t_i, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t_i) \sin \frac{2\pi}{T} n t_i dt \\ &= \frac{2\Delta t}{T} \sum_{i=1}^N x(t_i) \sin \frac{2\pi}{T} n t_i \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

となる。ただし、 m を $N/2$ まで取ったときは $b_{N/2} \equiv 0$ である。ここから解像できる最小の周期は $2\Delta t$ であることがわかる。この周波数 $f_N \equiv 1/(2\Delta t)$ をナイキスト周波数という。ある周波数 $f_n = 1/n\Delta t$ の変動の強さは振幅 $X(f_n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ で表される。その周波数の持つ変動の強さを表したものを**スペクトル (spectrum)** という。一般的には取扱が簡単な $|X(f_n)|$ を二乗した量、すなわち

$$|X(f_n)|^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad (\text{C.4})$$

がスペクトルとして用いられる場合が多い。直接法はデータを直接フーリエ変換し、スペクトルを求める方法である。現在では計算の高速化のために高速フーリエ変換 (FFT) を用いて行われる場合が多い。また誤差を減少させるために平滑化を行ったりテーパーと呼ばれる重みをつけたりする場合もある。

C.2 Blackman-Tukey 法

Blackman-Tukey 法は自己共分散関数のフーリエ変換によってパワースペクトルを推定する方法である。「自己共分散関数のフーリエ変換はスペクトルであり、スペクトルの逆フーリエ変換は自己共分散関数である」という Wiener-Khintchine の関係に基づいている。この関係から、自己共分散関数、あるいはその規格化された関数である自己相関関数で示される情報はすべてスペクトル中に存在しているといえる。

まず無限のデータがあると考え、これを $x(t_i)$ とする。このとき自己共分散関数は以下のように定義される:

$$C(\tau) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i)x(t_i + \tau). \quad (\text{C.5})$$

このとき $C(0)$ は定義から $x(t_i)$ の分散であり、 $r(\tau) \equiv C(\tau)/C(0)$ はラグ相関である。自己共分散関数の定義から、 $C(\tau) = C(-\tau)$ 、すなわち偶関数であること、 $|C(\tau)| \leq C(0)$ であることは自明である。

次にパワースペクトル密度関数 $S(f)$ を定義する。それは先程述べたように自己共分散関数のフーリエ変換として定義される:

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{i2\pi f\tau} df = 2 \int_0^{\infty} S(f) \cos(2\pi f\tau) df, \quad (\text{C.6})$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)e^{-i2\pi f\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau. \quad (\text{C.7})$$

このように自己共分散関数とパワースペクトルは互いにフーリエ変換の関係にある。ただし普通に言うパワースペクトル密度関数はこの $S(f)$ を 2 倍して、正の周波数のみで定義された片側スペクトル

$$G(f) = 2S(f) \quad (0 \leq f < \infty) \quad (\text{C.8})$$

で定義されるものである。 $G(f)$ を使うと、(C.6)、(C.7) は次のようになる:

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} G(f) \cos(2\pi f\tau) df, \quad (\text{C.9})$$

$$G(f) = 4 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (0 \leq f < \infty). \quad (\text{C.10})$$

また

$$C(0) = \int_0^{\infty} G(f) df \quad (\text{C.11})$$

となるから、パワースペクトル密度関数の積分が分散に等しい。

次にデータレコードが有限である場合を考える。すなわちデータを x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) として時間間隔を Δt とする。ラグが $l (\geq 0)$ のとき、自己共分散関数は

$$\hat{C}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{i=1}^{N-l} x_i x_{i+l} \quad (\text{C.12})$$

と書ける。 l の定義域は、 l に負を許して $0 \leq |l| \leq M < N/2$ であり ($-M \leq l \leq M$)、最大周期は $2M\Delta t$ である。次に (C.10) を離散化すると

$$\begin{aligned} \hat{G}(k) &= 4 \left[\frac{1}{2} \hat{C}(0) + \sum_{l=1}^{M-1} \hat{C}(l) \cos \left(2\pi \frac{k}{2M\Delta t} l \Delta t \right) + \frac{1}{2} \hat{C}(M) \cos \left(2\pi \frac{k}{2M\Delta t} M \Delta t \right) \right] \Delta t \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} \hat{C}(0) + \sum_{l=1}^{M-1} \hat{C}(l) \cos \left(\frac{\pi k l}{M} \right) + \frac{1}{2} \hat{C}(M) \cos(\pi k) \right] \Delta t \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} \hat{C}(0) + \sum_{l=1}^{M-1} \hat{C}(l) \cos \left(\frac{\pi k l}{M} \right) + \frac{1}{2} \hat{C}(M) (-1)^k \right] \Delta t \\ &= 4\Delta t \left[\sum_{l=0}^M \hat{C}(l) \cos \left(\frac{\pi k l}{M} \right) \cdot \delta_l \right] \\ &\text{for } k = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

ここで

$$\delta_l = \begin{cases} 1 & \text{for } l = 1, 2, \dots, M-1 \\ 1/2 & \text{for } l = 0, M \end{cases}$$

である。 Δf は最大周期が $2M\Delta t$ であることより $\Delta f = 1/(2M\Delta t) = f_N/M$ を使っている。スペクトルは周波数 $f_k = k/(2M\Delta t) = k f_N/M$ for $k = 0, 1, 2, \dots, M$ の $M+1$ 個で見積もっていることになる。(C.13)を見ると $\hat{G}(k)$ は多くの成分の加重平均である事がわかる。ここからこの方法によるパワースペクトルは安定したスペクトルの推定を与えることがわかる。

実際にデータ処理を行う場合は適切な**ラグ・ウィンドウ (lag window)** または**スペクトル・ウィンドウ**を用いる必要がある。有限長さ P のデータからの共分散関数の計算は $|\tau| \leq \tau_m < P$ の範囲で打ち切られる。これは無限ラグの自己共分散関数に

$$W_0(\tau) = \begin{cases} 1 & (|\tau| \leq \tau_m) \\ 0 & (|\tau| > \tau_m) \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

のような箱型の関数を掛けていることと等価である。これをラグ・ウィンドウと呼ぶ。スペクトル・ウィンドウはこのラグ・ウィンドウのフーリエ変換である。有限のラグで得られた共分散関数を $C_0(\tau)$ ($|\tau| \leq \tau_m$) とし、 τ を無限まで取った共分散関数を $C(\tau)$ で表すとき、これを式で表現すると

$$C_0(\tau) = W_0(\tau)C(\tau) \quad (\text{C.15})$$

となる。これをフーリエ変換するとスペクトルが得られるが、手続きは前と同じである。すなわち $C_0(\tau)$, $W_0(\tau)$, $C(\tau)$ のフーリエ変換をそれぞれ $S_0(f)$, $Q_0(f)$, $S(f)$ とすると、(C.15) のフーリエ変換は

$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_0(f - f')S(f')df' \quad (\text{C.16})$$

となる。この $Q_0(f)$ がラグ・ウィンドウのフーリエ変換なので、ここでのスペクトル・ウィンドウである。 $S_0(f)$ は真のスペクトル $S(f)$ とスペクトル・ウィンドウ $Q_0(f)$ のたたみ込みとなっている。したがって $Q_0(f)$ は $f = 0$ 付近でのみ値を持ち、ほかはゼロになっていることが望ましい。特に連続的なデータはデルタ関数、離散的なデータでは

$$Q_{00}(f) = \begin{cases} 1/\Delta f = \tau_m & (|f| \leq 0.5\Delta f) \\ 0 & (|f| > 0.5\Delta f) \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

であれば全く歪みがない。しかし実際の $Q_0(f)$ は

$$Q_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\tau)e^{-i2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\tau_m}^{\tau_m} e^{-i2\pi f\tau} d\tau = 2\tau_m \frac{\sin(2\pi f\tau_m)}{2\pi f\tau_m} \quad (\text{C.18})$$

であり、長い裾部を持ち、その一部が負の値となる。これは真のスペクトルを大きく歪ませ、強いスペクトルのピークの周辺に負のスペクトルを与えることになる。

このようなことから、望ましいラグ・ウィンドウが色々と提案されており、Hanning ウィンドウや Hamming ウィンドウがよく使われる。 $|\tau|$ が大きくなるに連れて徐々に減衰する関数となっている。すなわち適当なウェイトを自己共分散関数にかけて平滑化することに対応している。

参考文献

- ¹Andrews, D. G., J. R. Holton, and C. B. Leovy, *Middle atmosphere dynamics*, Academic press, 1987.
- ²Booker, J. R. and F. P. Bretherton, The critical layer for internal gravity waves in a shear flow, *J. Fluid Mech.* **27**, 513–539 1967.
- ³Durran, D. R., *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*, Vol. 32 Springer Science & Business Media, 1998.
- ⁴Goya, K. and S. Miyahara, A non-hydrostatic and compressible 2-d model simulation of internal gravity waves generated by convection, *Earth, Planets and Space* **51**, 485–498 1999.
- ⁵Holton, J. R. and G. J. Hakim, *An introduction to dynamic meteorology*, Academic press, 2012.
- ⁶Lindzen, R. S., Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown, *J. Geophys. Res.* **86**, 9707–9714 1981.
- ⁷伊藤久徳, 見延庄士郎, 気象学と海洋物理学で用いられるデータ解析法, 気象研究ノート, 1–253 2010.
- ⁸佐藤薫, 中層大気重力波の研究: 1998 年度日本気象学会賞受賞記念講演, 天気 **46**, 803–818 1999.
- ⁹小高正嗣, Asselin (1972) の時間フィルター, http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~gfdlab/comptech/y2011/resume/1124/pub/Asselin_1972.pdf.