

Mellor and Yamada(1974)の
乱流クロージャモデル

The Turbulence Closure Model of
Mellor and Yamada (1974)

北守 太一

Kitamori Taichi

北海道大学理学部地球科学科
地球流体力学研究室

2004/01/30

要旨

物理量を平均成分と変動成分に分け、基礎方程式に代入して、式全体のレイノルズ平均をとることで乱流統計量の方程式を導出することができる。

乱流統計量の方程式は未知数の数が方程式の数よりも多く閉じていない。この問題を解決するために導入される仮定をクロージャ仮定と呼ぶ。Mellor (1973) はあるクロージャ仮定を導入して方程式を閉じ、クロージャモデルを完成させた。

完成したクロージャモデルは多くの方程式からなり、複雑である。Mellor and Yamada (1974) は異方性を支配するパラメータが小さいと仮定して Mellor (1973) の乱流クロージャモデルを簡略化した。簡略化された乱流統計量の方程式は、その簡略化の度合によりレベル 4 からレベル 1 までの 4 段階に分類されている。

Mellor and Yamada (1974) はレベル 4 からレベル 2 までのクロージャモデルを用いて大気境界層の日変化の計算を行った。簡略化されたモデルであるレベル 3、レベル 2 のモデルの計算結果は厳密なモデルであるレベル 4 のモデルの計算結果と大差ないので、簡略化されたモデルの方が計算時間が短くてすむ分だけ効率がよいモデルであるといえる。

目次

1	はじめに	2
2	平均成分の方程式とレイノルズ応力方程式	4
2.1	系の設定	4
2.2	レイノルズ平均と平均成分の方程式	4
2.3	レイノルズ応力方程式	5
3	クロージャモデル	7
4	クロージャモデルの簡略化とレベル	10
4.1	各項のオーダーの見積もり	10
4.2	レベル4	15
4.3	レベル3	15
4.4	レベル2	15
4.5	レベル1	16
5	シミュレーション結果の比較	17
5.1	シミュレーションの概要	17
5.1.1	考える系およびモデル	17
5.1.2	境界条件	17
5.1.3	初期値	18
5.2	シミュレーション結果	18
6	まとめ	23
	謝辞	25
	付録 A 数式の導出	26
A.1	平均成分の方程式の導出	26
A.2	レイノルズ応力方程式の導出	27
A.3	乱流エネルギー方程式の導出	31
	参考文献	36

1 はじめに

大気の流れは乱流状態にある。乱流運動は乱流自身のスケールよりも大きなスケールの運動に影響を与える。従って、大気の運動を正確に把握するためには乱流運動まで考慮する必要がある。大気の運動を記述する方程式の解を求める方法のひとつに数値計算がある。数値計算で乱流の影響を反映させるには、格子点間隔を無限小にすればよいが、計算時間が無限大になってしまうので現実的に無理である。しかし、格子点間隔を有限にすると格子点間隔以下の運動が無視されてしまう。

有限の格子点間隔で格子点間隔以下の運動を扱うためには、乱流運動に関係する物理量の平均、標準偏差、相関といった統計量を格子点で表現されている量に関係づける。このように乱流運動を扱う方法のことをパラメタリゼーションと呼ぶ。

統計量についての方程式を求めると必ずその方程式の中に高次のモーメントの項が現れる。例えば、2次のモーメントについての方程式の中には3次のモーメントの項が含まれている。高次のモーメントについての方程式を求めても、より高次のモーメントの項が現れるので方程式は閉じない。そこで、いくつかの仮定を導入して、高次のモーメントを低次のモーメントで置き換えて方程式を閉じる。この方程式を閉じるための仮定をクロージャ仮定と呼び、クロージャ仮定によって閉じられた方程式のことをクロージャモデルと呼ぶ。

Boussinesq (1877) は乱流による運動量拡散は分子運動による運動量拡散と同じような形で表すことができると仮定し、渦粘性モデルと呼ばれるクロージャモデルを初めて考えた。渦粘性モデルは2次のモーメントを1次のモーメントで置き換えることから、1次クロージャモデルとも呼ばれる。渦粘性モデルの欠点は渦粘性係数を経験的に与えなくてはならないことである。渦粘性係数は流れの状態、大気の安定度により大きく変化するために、関数形を決定するのが困難である。

1950年代になると、前述した1次クロージャモデルの欠点を克服した2次クロージャモデルが考えられた。2次クロージャモデルは3次のモーメントを2次のモーメントで置き換えるモデルである。渦粘性係数の関数形を決める必要がないこと、高次のモーメントの仮定は低次のモーメントの仮定に比べて重要でないことと推定されることから2次クロージャモデルは1次クロージャモデルに比べると信頼性があるモデルであると考えられている(山田, 1999)。2次クロージャモデルは計算機の性能上の理由で考案後すぐには実用化されなかった。実際に初めて2次クロージャモデルを用いたのは Mellor (1973) や Donaldson (1973) である。計算機性能が飛躍的に向上した現在では2次クロージャモデルは大気のシミュレーションに広く用いられている。

Mellor(1973) の2次クロージャモデルには乱流統計量についての時間発展方程式

が 10 本あり, 計算するのが大変である. Mellor and Yamada (1974) は, 異方性を支配するパラメータは微小であるという仮定を導入して, 2 次クロージャモデルを簡略化した. 簡略化されたクロージャモデルは簡略化の度合によって 4 段階のレベルに分類される.

Mellor (1973) および Mellor and Yamada (1974) のモデルは現在の大気モデルに用いられる代表的な乱流クロージャモデルである. このモデルを理解すれば大気モデルを構築していく上で必要な乱流クロージャモデルの基礎的な知識を得ることができるだろう. 本論文では, Mellor (1973) および Mellor and Yamada (1974) によって議論された乱流クロージャモデルの詳細を解説することを目的とする.

2 章ではレイノルズ応力方程式などの乱流統計量の時間発展方程式の導出について述べる. 3 章では Mellor (1973) のクロージャモデルの導出について解説する. 4 章では Mellor and Yamada (1974) の乱流クロージャモデルの簡略化の方法と各レベルのモデルを解説する. 5 章では Mellor and Yamada (1974) が各レベルのモデルの比較のために行った大気境界層のシミュレーションについて述べる. 6 章は 5 章までの内容を踏まえて各レベルのモデルの特徴をまとめる.

2 平均成分の方程式とレイノルズ応力方程式

乱流運動を取り扱うために物理量を平均成分と変動成分に分け、基礎方程式に代入する。さらに、方程式全体のレイノルズ平均 (後述) をとると平均成分、乱流統計量の方程式を導出することができる。

2.1 系の設定

簡単のためブジネスク方程式系を考える。すなわち密度変化の影響は重力と結び付いた項しか考えない。 x^i ($i = 1, 2, 3$) を座標変数とする直交直線座標系では連続の式、運動方程式、熱力学の式はそれぞれ以下で与えられる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i U_k) + \varepsilon_{ikl} f_k U_l = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - g_i \beta \Theta + \nu \nabla^2 U_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_k \Theta) = \alpha \nabla^2 \Theta. \quad (3)$$

ただし、Einstein の和の規約を用いて書いている。ここで、 U_i は速度、 $\rho (= \text{const.})$ は密度、 P は圧力偏差、 Θ は温位、 $f_i = (0, f_y, f)$ はコリオリパラメータ、 $g_i = (0, 0, g)$ は重力、 α は熱拡散率、 β は体積変化率、 ν は動粘性係数である。

2.2 レイノルズ平均と平均成分の方程式

任意の物理量 A を以下のように平均成分と、変動成分に分解して書き表す。

$$A = \bar{A} + a. \quad (4)$$

をつけた量が平均成分、小文字で書いた量が変動成分である。以下、同様の書き方をする。この平均は以下の性質を満足するものと定義する。

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}, \quad \bar{a} = 0, \quad \overline{AB} = \bar{A}\bar{B} + \overline{ab}, \quad \overline{a\bar{B}} = 0. \quad (5)$$

(5) 式を満足する平均のことをレイノルズ平均と呼ぶ。レイノルズ平均は一般的にはアンサンブル平均

$$\bar{A} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A_k(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

を用いて表される。ここで、 \mathbf{r} は位置ベクトルである。(6) 式は確かに (5) 式を満足する。また、レイノルズ平均には以下に示すような微分演算子との互換性がある。

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial A}{\partial t}}, \quad (7)$$

$$\nabla \bar{A} = \overline{\nabla A}. \quad (8)$$

(4) 式にならって速度 U , 圧力勾配 P , 温位 Θ を平均成分と変動成分に分けて書き, 連続の式 (1) 式, 運動方程式 (2) 式, 熱力学の式 (3) 式に代入する. さらに各式全体にレイノルズ平均をとることにより平均成分の方程式が求められる.

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{U}_i \bar{U}_k + \overline{u_i u_k}) + \varepsilon_{ikl} f_k \bar{U}_l = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - g_i \beta \bar{\Theta} + \nu \nabla^2 \bar{U}_i, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{U}_k \bar{\Theta} + \overline{u_k \theta}) = \alpha \nabla^2 \bar{\Theta}. \quad (11)$$

(10) 式, (11) 式にはレイノルズ応力 $\overline{u_i u_k}$, 熱伝導モーメント $\overline{u_k \theta}$ が含まれている. 平均成分の方程式 (9) 式–(11) 式が閉じるためにはレイノルズ応力, 熱伝導モーメントの方程式が必要となる.

2.3 レイノルズ応力方程式

$\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_j \theta}$ の方程式を導出するための準備として変動成分の方程式が必要になる. 元の式 (1) 式–(3) 式から平均成分の方程式 (9) 式–(11) 式を差し引くと変動成分の方程式が求められる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{U}_i u_k + \bar{U}_k u_i + u_i u_k - \overline{u_i u_k}) + \varepsilon_{ikl} f_k u_l \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i \beta \theta + \nu \nabla^2 u_i, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\Theta} u_k + \bar{U}_k \theta + u_k \theta - \overline{u_k \theta}) = \alpha \nabla^2 \theta. \quad (14)$$

レイノルズ応力方程式は (13) 式に u_j をかけた式と (13) 式の j 成分の式に u_i をかけた式を足し合わせ, さらにその式全体のレイノルズ平均をとると求められる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{U}_k \overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} \overline{p u_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \overline{p u_j} + f_k (\varepsilon_{jkl} \overline{u_i u_l} + \varepsilon_{ikl} \overline{u_j u_l}) \\ = -\frac{\overline{u_i u_k}}{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} - \frac{\overline{u_j u_k}}{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) \\ + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (15)$$

同様に、熱伝導モーメントの方程式は (13) 式に θ をかけた式と (14) 式に u_i をかけた式を足し合わせ、さらにその式全体のレイノルズ平均をとることで求められる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i \theta}) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{U_k u_i \theta} + \overline{u_i u_k \theta} - \alpha u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \nu \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \overline{p \theta} \right) + \varepsilon_{ikl} f_k \overline{u_l \theta} \\ = & -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta^2} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} - (\alpha + \nu) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式には $\overline{\theta^2}$ が含まれている。この $\overline{\theta^2}$ についての方程式は (14) 式の両辺に θ をかけると求められる。

$$\frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{U_k \theta^2} + \overline{u_k \theta^2} - \alpha \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right) = -2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - 2 \alpha \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}. \quad (17)$$

(15) 式, (16) 式には $\overline{u_i u_j u_k}$ や $\overline{u_i u_k \theta}$ といった変動成分の 3 次の統計量が含まれている。したがって方程式 (9) 式–(11) 式, (15) 式–(17) 式は閉じていない。この 3 次の統計量についての方程式を求めると、その方程式には 4 次の統計量が表れる。このように高次の量の方程式を求めても、さらに高次の量が現れるので方程式は閉じない。方程式を閉じるために高次の統計量を低次の統計量で近似して未知数を減らす必要がある。

3 クロージャモデル

この章では Mellor (1973) のモデルを紹介する. (9) 式–(11) 式, (15) 式–(17) 式は方程式の数に対して未知数の数が圧倒的に多く, 方程式が閉じない. Mellor (1973) は $\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_j \theta}$, $\overline{\theta^2}$ 以外の統計量を $\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_j \theta}$, $\overline{\theta^2}$ でパラメタライズすることを考えた. さらに, これらの統計量でパラメタライズできない部分は乱流の特徴的強さ $q \equiv \sqrt{\overline{u_i^2}} = \sqrt{\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}}$ と経験的に分かっている現象の特徴的なスケールを用いて評価できるものとして考えた. パラメタリゼーションの結果, 方程式数と未知数の数が一致して方程式が閉じる. この閉じたモデルのことをクロージャモデルと呼ぶ.

以下に Mellor (1973) がクロージャモデルを導出するために用いた仮定を述べる.

$\overline{(p/\rho)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)}$ の項は Rotta (1951) の仮定に従って以下のようにおいている.

$$\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{q}{3l_1} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right) + Cq^2 \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right). \quad (18)$$

ここで l_1 と C は経験的に決定される値である.

$\overline{(p/\rho)(\partial \theta/\partial x_i)}$ の項も (18) 式と同様に Rotta (1951) の仮定に従って以下のようにおいている.

$$\frac{p}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = -\frac{q}{3l_2} \overline{u_i \theta}. \quad (19)$$

l_2 も l_1 と同様に経験的に決定される長さスケールである.

$2\nu \overline{(\partial u_i/\partial x_k)(\partial u_j/\partial x_k)}$ の項は粘性の影響による項は等方テンソルで表されるという Kolmogorov (1941) の仮定に従って以下のようにおいている.

$$2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \delta_{ij}. \quad (20)$$

ただし, Λ_1 は粘性の及ぶ特徴的なスケールである.

$(\alpha + \nu) \overline{(\partial u_i/\partial x_k)(\partial \theta/\partial x_k)}$ の項も (20) 式と同様に Kolmogorov (1941) の仮定に従う. この項は1階のテンソルであり, 等方な1階テンソルは0しか存在しないので

$$(\alpha + \nu) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = 0 \quad (21)$$

とおいている.

$2\alpha(\overline{\partial\theta/\partial x_k})(\overline{\partial\theta/\partial x_k})$ の項は (20) 式と同じような形式で

$$2\alpha \frac{\overline{\partial\theta}}{\partial x_k} \frac{\overline{\partial\theta}}{\partial x_k} = 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (22)$$

とおいている。 Λ_2 は粘性の及ぶ特徴的なスケールである。

$\overline{u_i u_j u_k}$, $\overline{u_i u_k \theta}$, $\overline{u_k \theta^2}$ の項は 2 次モーメントの拡散項で表すことができると Mellor (1973) は仮定し、それぞれ以下のような形でおいている。

$$\overline{u_i u_j u_k} = -q\lambda_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j u_k}) \right\}, \quad (23)$$

$$\overline{u_i u_k \theta} = -q\lambda_2 \left(\frac{\partial \overline{u_k \theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_k} \right), \quad (24)$$

$$\overline{u_k \theta^2} = -q\lambda_3 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k}. \quad (25)$$

ここで、 λ_1 , λ_2 , λ_3 は特徴的な長さスケールである。

$\overline{p u_i}$, $\overline{p \theta}$ の項は大きさは圧力拡散項はもともと小さいという Hanjalic and Lander (1972) の主張に従い、以下のように仮定している。

$$\overline{p u_i} = \overline{p \theta} = 0. \quad (26)$$

以上の仮定 (18) 式–(26) 式を (15) 式, (16) 式, (17) 式に代入して,

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (27)$$

とおくと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\overline{u_i u_j}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_k}) \right\} \right] \\ &+ \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} + f_k (\varepsilon_{jkl} \overline{u_i u_l} + \varepsilon_{ikl} \overline{u_j u_l}) \\ &= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) \\ &- \frac{q}{3l_1} (\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2) + Cq^2 \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \delta_{ij}, \quad (28) \\ \frac{D}{Dt} (\overline{u_i \theta}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i \theta}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_k \theta}) \right\} \right] \\ &+ \alpha u_i \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + \nu \theta \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \varepsilon_{ikl} f_k \overline{u_l \theta} \end{aligned}$$

$$= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} - \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta^2} - \frac{q}{3l_2} \overline{u_i \theta}, \quad (29)$$

$$\frac{D\overline{\theta^2}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q\lambda_3 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} + \alpha \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right) = -2\overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} - 2\frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2}. \quad (30)$$

(28) 式–(30) 式が乱流クロージャモデルである¹⁾. (9) 式–(11) 式, (28) 式–(30) 式未知数の数が 15 個であるのに対し, 方程式の数も 15 本²⁾であり両者の数が一致するので方程式が閉じる.

¹⁾乱流クロージャモデルといった場合は乱流統計量の時間発展方程式のみを指すのか, 平均成分の方程式も含めたものを指すのかはよくわからない. 私は前者であると考えているので, 本論文でも乱流クロージャモデルは乱流統計量の時間発展方程式のみを指すものとする.

²⁾(28) 式は添字の i と j を入れ換えても同じ式になるので 6 本と数える.

4 クロージャモデルの簡略化とレベル

Mellor (1973) の乱流クロージャモデル (28) 式–(30) 式は 10 本の時間発展方程式からなるので、離散化が大変である、計算時間がかかるといった問題がある。Mellor and Yamada (1974) は微小な項を省略してモデルを簡略化することを考えた。彼らは微小項がどれであるかを判定するために様々な仮定を導入している。ここで用いた仮定に応じて、モデルはレベル 4 からレベル 1 までの 4 段階に分類される。

Mellor and Yamada (1974) ではコリオリ力の効果は小さいとして (28) 式, (29) 式, (30) 式の中の

$$\varepsilon_{ikl} f_k \overline{u_j u_l}, \varepsilon_{ikl} f_k \overline{u_l \theta} \quad (31)$$

という項を省略している。さらに

$$\nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\overline{u_i u_j}), \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right), \alpha u_i \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}, \alpha \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \quad (32)$$

という項も省略している。Mellor and Yamada (1974) ではこの項の省略については特に何も述べられていない。おそらく分子粘性の影響は乱流拡散の影響に比べて十分小さいためにこれらの項を無視したのだろうと考えられる。

(31) 式, (32) 式のコリオリ項, 分子粘性拡散項を省略すると (28) 式, (29) 式, (30) 式はそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\overline{u_i u_j}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_k}) \right\} \right] \\ &= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) \\ &\quad - \frac{q}{3l_1} (\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2) + Cq^2 \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\overline{u_i \theta}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i \theta}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_k \theta}) \right\} \right] \\ &= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta^2} - \frac{q}{3l_2} \overline{u_i \theta}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{D \overline{\theta^2}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q \lambda_3 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right) = -2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2}. \quad (35)$$

4.1 各項のオーダーの見積もり

(33) 式の等方成分の和をとると以下の乱流エネルギー方程式を得る。

$$\frac{Dq^2}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_1 \left\{ \frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i u_k}) \right\} \right]$$

$$= -2\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - 2\beta g_i \overline{u_i \theta} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1}. \quad (36)$$

また (33) 式から (36) 式に $\delta_{ij}/3$ をかけた式を辺々引くと以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_k}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_k u_l}) \right) \right\} \right] \\ & = -\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{U_l}}{\partial x_k} + C q^2 \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \\ & \quad - \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l \overline{u_l \theta} \right) - \frac{q}{3l_1} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right) \end{aligned} \quad (37)$$

以上のように (33) 式を (36) 式と (37) 式のふたつの方程式に分けたのはレイノルズ応力の異方成分は等方成分に比べて十分小さいという仮定をこれから導入するためである.

Mellor and Yamada (1974) は等方成分からのずれを表す量 a_{ij} , b_i を

$$\overline{u_i u_j} \equiv \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + a_{ij} \right) q^2; \quad a_{ii} = 0, \quad (38)$$

$$\overline{u_i \theta} \equiv b_i q \varphi \quad (39)$$

と定義した. ここで $\varphi \equiv \overline{\theta^2}$ である. ただし, 非等方成分は等方成分に比べて微小であると考え, $a_{ij} \ll 1$, $b_i \ll 1$ と仮定している. (38) 式, (39) 式を (34) 式–(37) 式に代入すると表 1 中の (40) 式–(43) 式で表される.

表1: 各項のオーダーの比較. それぞれの項の下にその項のオーダーを示した. ただし, α のオーダーを持つ項をまとめて $O(\alpha)$ とおいている.

	$\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \frac{5}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \{1 + O(\alpha)\} \right] = -2a_{ik}q^2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - 2b_{ik}g_k \beta q\varphi - 2 \frac{q^3}{\Lambda}$	(40)					
(I)	Uq^2/L	$q^3 \lambda / L^2 \{1 + O(\alpha)\}$	$aq^2 U_x$	$\beta b g q\varphi$	q^3/Λ		
(II)	Uq^2/L	$Uq^2/L \{1 + O(\alpha)\}$	q^3/Λ	q^3/Λ	q^3/Λ		
(I)	$\frac{D}{Dt} (a_{ij}q^2) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{q\lambda_1}{3} \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right\} \{1 + O(\alpha)\} \right]$	$q^3 \lambda / L^2 \{1 + O(\alpha)\}$	$q^3 \lambda U_x \{1 + O(\alpha)\}$				
(II)	aUq^2/L	aUq^2/L	$Uq^2L \{1 + O(\alpha)\}$				
(I)	$= -q^2 \left\{ \left(\frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ik} \right) \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \left(\frac{\delta_{jk}}{3} + a_{jk} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} a_{kl} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k} - C \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \beta g \varphi (g_j b_i + g_i b_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l b_l) - \frac{q^3}{3l_1} a_{ij}$	$q^2 U_x \{1 + O(\alpha)\}$	$b\beta q\varphi g$	aq^3/l	(41)		
(II)		$\alpha^{-1} q^3 \{1 + O(\alpha)\} / \Lambda$	q^3/Λ	$\alpha^{-1} q^3/\Lambda$			
(I)	$\frac{D}{Dt} (b_{iq}\varphi) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (b_{iq}\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_k q\varphi) \right\} \right] = -q^2 \left(\frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ik} \right) - q\varphi b_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - g_i \beta \bar{\theta}^2 - q^2 \varphi b_i / 3l_2$	$q^2 \lambda b\varphi / L^2$	$q^2 \Theta_x \{1 + O(\alpha)\}$	$q\varphi b U_x$	$g\beta\varphi^2$	$q^2 \varphi b/l$	(42)
(II)	$bUq\varphi/L$	$bUq\varphi/L$	$b^{-1} q^2 \varphi \{1 + O(\alpha)\} / \Lambda$	$q^2 \varphi / \Lambda$	$b^{-1} q^2 \varphi / \Lambda$	$b^{-1} q^2 \varphi / \Lambda$	
	$\frac{D\bar{\theta}^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_2 \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial x_k} \right] = -2q\varphi b_k \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2 \frac{q}{\Lambda} \bar{\theta}^2$					(43)	
(I)	$U\varphi^2/L$	$q^2 \lambda \varphi^2 / L^2$	$q\varphi b \Theta_x$	$q\varphi b \Theta_x$			
(II)	$U\varphi^2/L$	$U\varphi^2/L$	$q\varphi^2/\Lambda$	$q\varphi^2/\Lambda$			

ここで、各変数のオーダーを以下のように定義する³⁾。

$$l \equiv O(l_1) = O(l_2), \quad (44)$$

$$\lambda \equiv O(\lambda_1) = O(\lambda_2) = O(\lambda_3), \quad (45)$$

$$\Lambda \equiv O(\Lambda_1) = O(\Lambda_2), \quad (46)$$

$$a \equiv O(a_{ij}), \quad (47)$$

$$b \equiv O(b_i), \quad (48)$$

$$U_x \equiv O\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k}\right), \quad (49)$$

$$\Theta_x \equiv O\left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_k}\right), \quad (50)$$

$$g \equiv O(g_i), \quad (51)$$

$$L \equiv O(x_i), \quad (52)$$

$$\frac{U}{L} \equiv O\left(\frac{D}{Dt}\right). \quad (53)$$

(44) 式–(53) 式を用いると (40) 式–(43) 式のオーダーは表 1(I) のように表される。しかし、この形ではまだ各項のオーダーを比較することができない。Mellor and Yamada (1974) ではこの比較を可能にするために、いくつかの仮定を導入した。以下にその仮定を述べる。なお、これらの仮定は方程式の各項のオーダーを比較可能にするという都合のために導入されるのであり、これらの仮定の理論的根拠は存在しないということに注意されたい。計算した結果が現実の観測結果とよく一致しているかどうかを考察することでこれらの仮定の真偽が初めて明らかになる。

(40) 式左辺の第 1 項と第 2 項のオーダーが等しい、すなわち乱流エネルギーの時間変化と移流による変化のオーダーが等しいと仮定して

$$\frac{Uq^2}{L} = \frac{q^3\lambda}{L^2} \quad (54)$$

とおいた。

(40) 式右辺の第 1 項と第 3 項が支配的であると仮定して

$$aq^2U_x = \frac{q^3}{\Lambda} \quad (55)$$

とおいた。

³⁾このうち λ , L は Mellor and Yamada (1974) には定義されていない。それは左辺の時間変化項と移流項のオーダーが等しいという仮定については数式で表さず言葉で述べているだけであるからである。ただし本論文ではこの仮定も数式を用いて表わしたいために λ , L を明確に定義した。

(41) 式右辺の第 1 項と第 3 項が支配的であると仮定して

$$q^2 U_x = a \frac{q^3}{l} \quad (56)$$

とおいた.

(42) 式右辺の第 1 項と第 2 項が支配的であると仮定して

$$q^2 \Theta_x = \frac{q^2 \varphi b}{l} \quad (57)$$

とおいた.

(43) 式右辺の第 1 項と第 4 項が支配的であると仮定して

$$q \varphi b \Theta_x = \frac{q \varphi^2}{\Lambda} \quad (58)$$

とおいた.

(55) 式, (56) 式から

$$a^2 = \frac{l}{\Lambda}, \quad (59)$$

$$U_x = a^{-1} \frac{q}{\Lambda} \quad (60)$$

が成り立つ. また, (57) 式, (58) 式から

$$b^2 = \frac{l}{\Lambda}, \quad (61)$$

$$\Theta_x = b^{-1} \frac{\varphi}{\Lambda} \quad (62)$$

が成り立つ. (59) 式, (61) 式から

$$a = b \quad (63)$$

であることがわかる. さらに

(40) 式の右辺第 2 項の浮力項が他の項と同じオーダーであると仮定して

$$g \beta \varphi = b^{-1} \frac{q^2}{\Lambda} \quad (64)$$

とおく. 以上の仮定を導入することにより右辺の各項のオーダーは表 1 の (II) で示すように表される. これで左辺の項どうし, 右辺の項どうしのオーダーの比較が可能になった. しかし, まだ左辺の項と右辺の項のオーダーを比較することは不可能である. この比較を可能にするために Mellor and Yamada (1974) はもうひとつ仮定を導入した. ここで導入した仮定に応じてモデルはレベル 4 からレベル 1 までの 4 段階に分類される.

4.2 レベル4

全ての項をそのまま残す場合, 方程式は (33) 式, (34) 式, (35) 式となる. Mellor and Yamada (1974) はこのモデルをレベル4と名付けた. レベル4のモデルは全ての項が重要であるか, また各項の重要性の判断がつけられないような場合に用いられる (山田, 1999).

4.3 レベル3

(40) 式の移流項の大きさは散逸・生成項に比べて a だけ小さいと仮定して

$$\frac{Uq^2}{L} = a \frac{q^3}{\Lambda} \quad (65)$$

とおく. (65) 式を (40) 式-(43) 式に適用して各項のオーダーを比較し, a の2次以上の微小項を省略すると以下のように表される.

$$\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{5}{3} q \lambda_1 \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right] = -2 \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - 2 \beta g_k \overline{u_k \theta} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1}, \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 - \frac{3l_1}{q} \left[(\overline{u_i u_k} - Cq^2 \delta_{ik}) \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} \right. \\ & \left. + (\overline{u_j u_k} - Cq^2 \delta_{jk}) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k} \right] \\ & - 3 \frac{l_1}{q} \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k} \right) \\ & + 3 \frac{l_1}{q} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{q \lambda_1}{3} \left(\delta_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right) \right\}, \quad (67) \end{aligned}$$

$$\overline{u_i \theta} = -3 \frac{l_2}{q} \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \beta g_i \overline{\theta^2} \right), \quad (68)$$

$$\frac{D\overline{\theta^2}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q \lambda_3 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right) = -2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2}. \quad (69)$$

Mellor and Yamada (1974) はこのモデルをレベル3と名付けた. レベル3のモデルでは $\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_i \theta}$ についての式が時間発展方程式ではなく代数方程式になっている. レベル3のモデルでは乱流成分の時間発展方程式は2本に減る.

4.4 レベル2

レベル3の仮定 (65) 式の代わりに, (40) 式の移流項の大きさは散逸・生成項に比べて a^2 だけ小さいと仮定して

$$\frac{Uq^2}{L} = a^2 \frac{q^3}{\Lambda} \quad (70)$$

とおく. (70) 式を (40) 式–(43) 式に適用して各項のオーダーを比較し, a の 2 次以上の微小項を省略すると以下のように表される.

$$\frac{q^3}{\Lambda} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \beta g_k \overline{u_k \theta}, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 - \frac{3l_1}{q} \left[(\overline{u_i u_k} - Cq^2 \delta_{ik}) \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} \right. \\ & \left. + (\overline{u_j u_k} - Cq^2 \delta_{jk}) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k} \right] \\ & - 3 \frac{l_1}{q} \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l \overline{u_l \theta} \right), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\overline{u_i \theta} = -3 \frac{l_2}{q} \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} + \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \beta g_i \overline{\theta^2} \right), \quad (73)$$

$$\overline{\theta^2} = -\frac{\Lambda_2}{q} \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k}. \quad (74)$$

Mellor and Yamada (1974) はこのモデルをレベル 2 と名付けた. レベル 2 のモデルでは乱流成分についての時間発展方程式の数はゼロになり全て代数方程式で表される.

4.5 レベル 1

レベル 2 と同様に (70) 式とおく. (70) を (40) 式–(43) 式に適用して各項のオーダーを比較して a の 1 次以上の項を省略すると以下のように表される.

$$\frac{q^3}{\Lambda} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \beta g_k \overline{u_k \theta}, \quad (75)$$

$$\overline{u_i u_j} = \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 - ql_1 \left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right), \quad (76)$$

$$\overline{u_i \theta} = -ql_2 \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} - \frac{3\beta l_2}{q} g_i \overline{\theta^2}, \quad (77)$$

$$\overline{\theta^2} = -\frac{\Lambda_2}{q} \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k}. \quad (78)$$

Mellor and Yamada (1974) はこのモデルをレベル 1 と名付けた.

5 シミュレーション結果の比較

Mellor and Yamada (1974) はレベル 4, 3, 2 の 3 つのモデルで大気境界層のシミュレーション実験を行い, その結果を比較している. 本章ではこれを紹介する.

5.1 シミュレーションの概要

5.1.1 考える系およびモデル

大気境界層での 3 次元の流れを考える. ただし, 分子粘性拡散項, 熱拡散項を無視する. すなわち $\alpha = 0$, $\nu = 0$ とする.

数値モデルは 4 章で述べたレベル 4 からレベル 2 の乱流クロージャモデルに境界層近似を施したモデルを用いる. 境界層近似は鉛直スケールは水平スケールに比べて十分に小さいみならず近似ある. この近似により

$$\text{平均成分の場合は静水圧平衡, すなわち } \bar{U}, \bar{V} \gg \bar{W}$$

$$\partial/\partial x, \partial/\partial y \ll \partial/\partial z$$

となる. 数値モデルの離散化には陰解法を用いる.

数値モデルの計算領域は高度 0 m から 5200 m までとし鉛直方向の格子点の数は 0 m から 1000 m までの間に対数的に 20 個, 1000 m から 5200 m までの間に 60 個である. 水平方向の領域の幅と格子点の数についての記述は Mellor and Yamada (1974) にはない. 計算時間は 10 日間である. 時間ステップは 1 min である. レベル 3 およびレベル 2 のモデルでは時間ステップを 10 min にしても問題なく計算が行われた. 計算が安定するまでに約 3 日を要した.

5.1.2 境界条件

境界条件として必要なのは大気境界層上端および地表面での風速の平均成分, 温位の平均成分, 乱流統計量の値である.

大気境界層上空の内部領域では地衡風平衡が成立している. 従って, 大気境界層上端では水平風速の平均成分として一定の強さの地衡風を与える. 大気境界層上端での乱流統計量は全てゼロであるとする.

地表面での温位は図 1(a) に示すように陽に与える. 風速の平均成分, 乱流統計量は地表面での温位の値と, 図 1(b)–(d) に示される地表面熱フラックス, 摩擦速度, 地衡風ベクトルと地表面応力のなす角の値から計算した値を与える. 地表面熱フラックス, 摩擦速度, 地衡風ベクトルと地表面応力ベクトルのなす角の値は地表面に近

いある高度での速度および温位の平均成分の値を対数分布則に代入することにより計算される。対数分布則とは地表面付近での風速および温位の平均成分は高度に対して対数分布をとるという関係のことをいう。

5.1.3 初期値

温位の初期値は Clarke *et al.* (1971) の観測値を簡略化したものを与える。速度場の初期値は中立状態での定常状態の方程式から計算したものを与える。

5.2 シミュレーション結果

Mellor and Yamada (1974) のシミュレーション結果を図2-図4に示す。Mellor and Yamada (1974) では様々な量の計算結果を図示しているが本論文ではその中の代表的な図のみを示す。

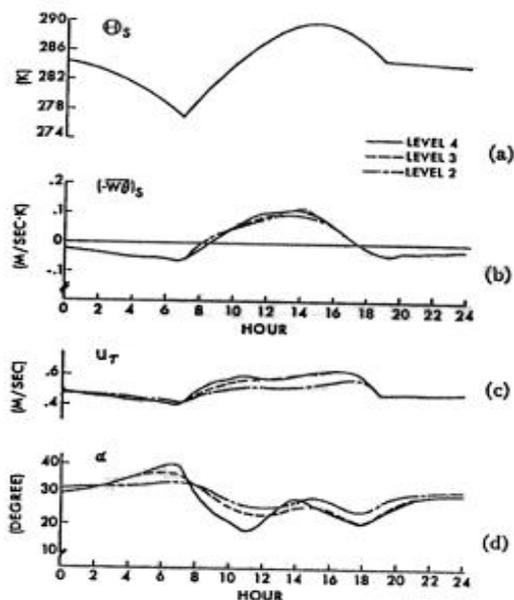


FIG. 2. Surface variables: (a) surface potential temperature, (b) heat flux, (c) friction velocity, and (d) angle included between geostrophic velocity vector and surface stress vector.

Fig.2 of Mellor and Yamada (1974), JAS. 31, p1797

図 1: 地表面での値. (a) 温位, (b) 熱フラックス, (c) 摩擦速度, (d) 地衡風ベクトルと地表面応力ベクトルのなす角. (a) は境界条件で与えられているものである。ただし, (a) の θ , (d) の α は本論分中ではそれぞれ $\bar{\theta}$, ξ に対応していることに注意. (Mellor and Yamada (1974) 図 2 より)

図2は風速の平均成分の分布を示している。どのレベルでも22時ごろに高度800 mで極大が現れている。この極大は夜間ジェットと呼ばれているものに対応している。朝方になるにつれジェットの高度は300 mまで下がる。レベル2ではレベル3, 4に比べて、朝方のジェットの強さが 2 m sec^{-1} ほど強くなっている。

図3は温位の平均成分の分布を示している。影をつけた領域はリチャードソン数が $R_i \geq 0.21$ の領域である。レベル3とレベル4は影をつけた部分が一致する。レベル2はレベル3, 4と一致しない。

図4は乱流運動エネルギーの分布を示している。全てのレベルで、地表面から高度2000 mでは12時から18時にかけて乱流運動エネルギーが発生している。

レベル2のモデルでは図3で影をつけた領域は図4の乱流運動エネルギーがゼロの領域とほぼ完全に一致するという単純な関係が現れている。しかし、レベル3とレベル4ではこのようにはなっていない。

Mellor and Yamada (1974) は、以上のシミュレーションの結果から、レベル4, 3, 2の3つのモデルはどのレベルもお互い類似した結果をもたらし、さらにレベル4とレベル3との計算結果の違いはレベル3とレベル2とそれよりも小さいと述べている。

レベル3はレベル4よりも乱流統計量についての時間発展方程式の数が少ない分、計算時間が短くて済み、かつ計算結果はレベル4と大差ない。レベル3は効率のよいモデルといえる。また、レベル2はレベル3, 4のモデルと比べて計算結果が若干異なるものの全体的な特徴は類似しており、かつ計算時間はレベル3よりも短い分効率がよい。

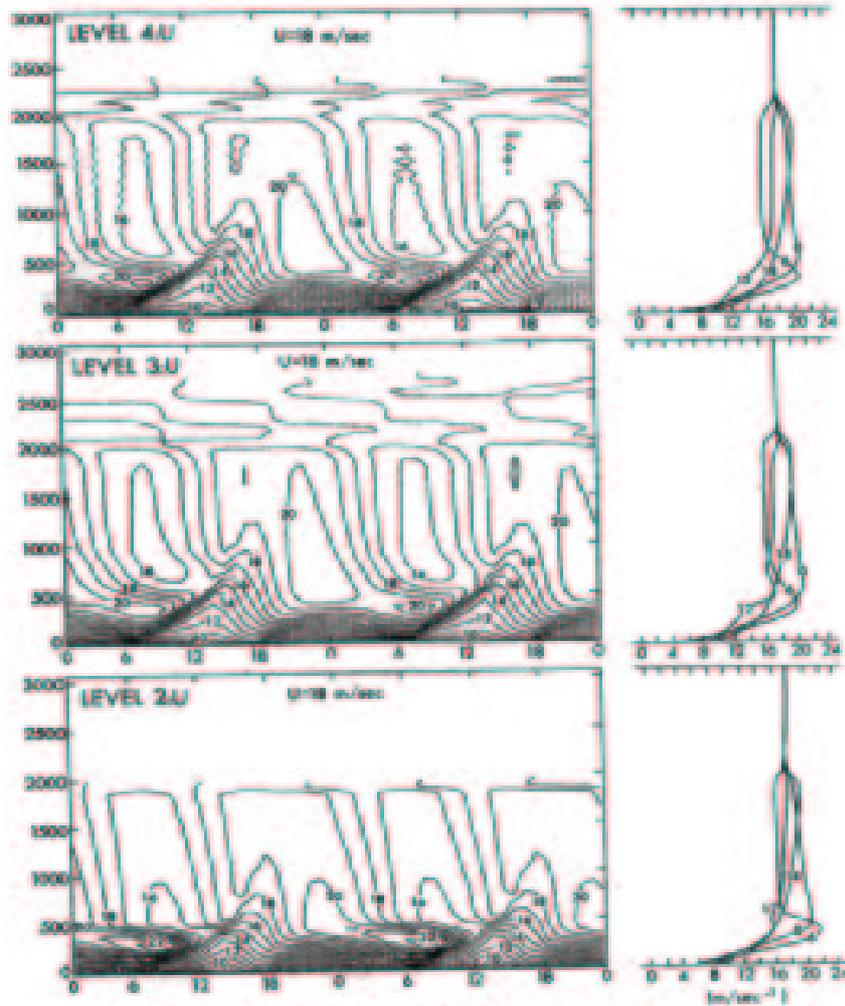


FIG. 3. Mean wind component parallel to the geostrophic velocity vector.

Fig.3 of Mellor and Yamada (1974), JAS, 31, p1798

図 2: 地衝風の吹く方向に平行な風速の平均成分. (Mellor and Yamada (1974) の図 3 より)

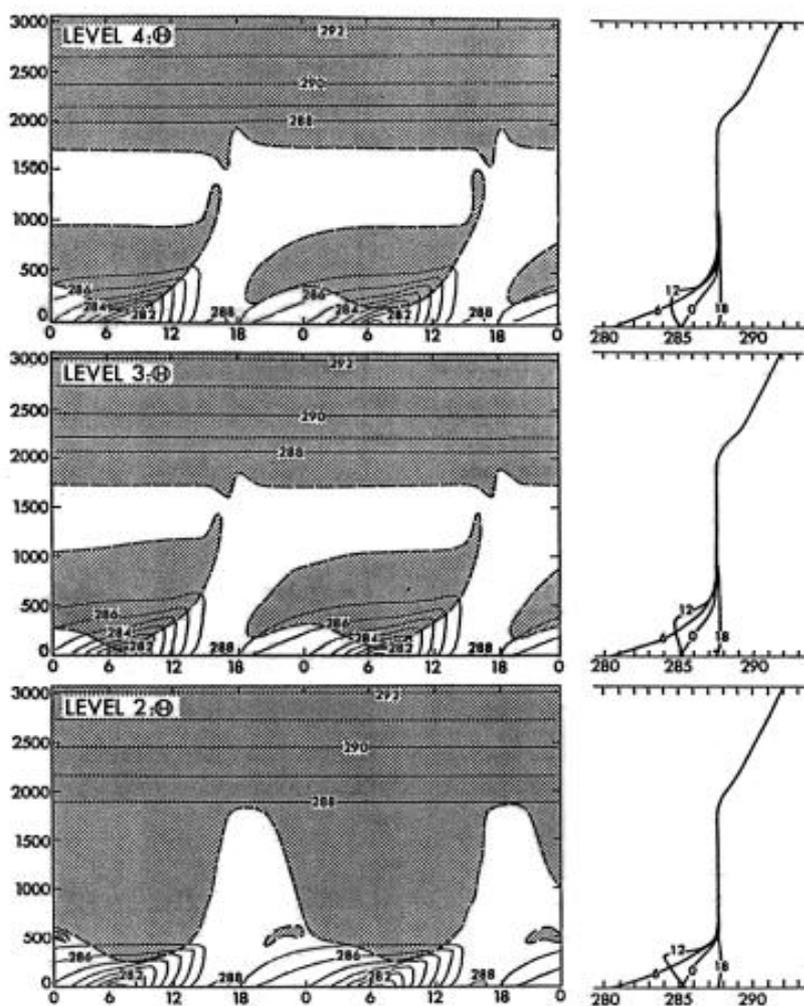


FIG. 5. Potential temperature: the shaded region corresponds to $Ri \geq 0.21$, this is identically a region of zero turbulence intensity.

Fig.5 of Mellor and Yamada (1974), JAS, 31, p1800

図 3: 温位の平均成分. 影をつけた領域はリチャードソン数が $Ri \geq 0.21$ である領域である. レベル 2 では影をつけた領域が乱流の強さがゼロの領域と一致する. (Mellor and Yamada (1974) の図 5 より)

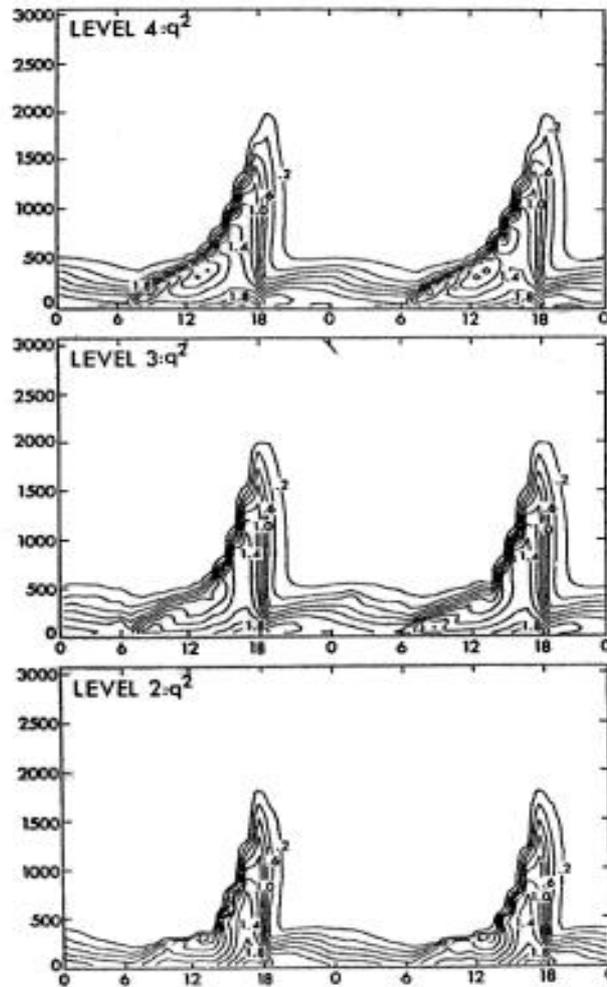


FIG. 6. Turbulent kinetic energy.

Fig.6 of Mellor and Yamada (1974), JAS. 31, p1801

図 4: 乱流運動エネルギー. (Mellor and Yamada(1974) の図 6 より)

6 まとめ

本論文では Mellor (1973) および Mellor and Yamada (1974) の議論を理解することを目的としていた.

まず, 乱流を取り扱うために物理量を平均成分と変動成分に分け, 方程式全体のレイノルズ平均をとることにより, 平均成分の方程式と乱流統計量の方程式を導いた. この方程式は閉じていないので, Mellor (1973) は方程式を閉じるためにいくつかの仮定を導入して方程式を閉じた.

Mellor and Yamada (1974) は異方性を支配するパラメータは微小であるという仮定を導入して微小項を省略することにより Mellor (1973) のクロージャモデルを簡略化した. 簡略化された方程式は その簡略化の度合によりレベル 4 からレベル 1 までの 4 段階に分類された.

Mellor and Yamada (1974) はレベル 4 からレベル 2 までのモデルを用いて大気境界層の日変化のシミュレーションを行い, レベル 4 からレベル 2 までのモデルの比較を行った. この結果から得られた Mellor and Yamada (1974) のモデルの特徴を以下にまとめる.

レベル 4 のモデルの計算結果は厳密解に最も近いが, レベル 3, レベル 2 の計算結果との違いは小さい. Mellor and Yamada (1974) はレベル 4 のモデルは 10 本の乱流統計量の時間発展方程式を計算しなくてはならないので, 計算時間が長くなることを考えると, レベル 4 モデルを用いる利点はあまりないと結論づけている.

レベル 3 の計算結果はレベル 4 のそれとほとんど異ならないが乱流統計量についての時間発展方程式が 2 本とレベル 4 と比べて少ないので計算時間が短くてすむ. Mellor and Yamada (1974) はレベル 3 のモデルは効率がよく, 注目に値するモデルであると結論づけている.

レベル 2 は乱流統計量はすべて代数方程式で記述された非常に単純化されたモデルである. 計算時間はレベル 3 よりも短い. 計算結果はレベル 3 と若干異なるものの, 全体的な特徴は類似している. Mellor and Yamada (1974) はレベル 2 のモデルは十分実用に耐えうるモデルであると結論づけている.

レベル 1 のモデルについて Mellor and Yamada (1974) は歴史的な経緯のもとに分類されていると述べているだけで特徴については述べていない. レベル 1 は最も簡単なモデルであるので計算時間は最も短い, レベル 1 とレベル 2 では同じ数の代数方程式を計算するという点から計算時間はそれほど変わらない.

シミュレーションの目的に応じて適切なレベルのモデルを選択することが可能になったという点で Mellor and Yamada (1974) の功績は大きい. 目的に応じたレベ

ルのモデルを選択するためには各レベルのモデルの特徴をよく把握することが重要である。厳密な計算結果が必要とされる場合はレベル4が用いられるべきであり、計算効率が必要とされる場合はレベル3あるいはレベル2が用いられるべきであろう。

クロージャモデルを簡略化する際、オーダーの比較のためにいくつかの仮定を導入した。Mellor and Yamada (1974) はレベル4, 3, 2の計算結果が類似していることから、これらの仮定が現実的に妥当であったと結論づけている。

これまで解説してきた内容についての今後の課題として、Mellor and Yamada (1974) と渦粘性モデルといった他のモデルとの関連性を把握し乱流クロージャモデルの知識をさらに深めること、得た知識を実際に活用するために乱流クロージャモデルを実装した大気モデルを構築することが挙げられる。

謝辞

本論文を書く上で多くの方のご指導および御協力を頂きました。

指導教官である林祥介教授には本論文を書くための指針を示して頂き、本論文の内容に対する深い考察に基づいたコメントを頂きました。小高正嗣助手、杉山耕一郎さんには本論文の内容や論文の構成についての貴重なご指導、助言を幅広く頂きました。森川靖大さん、塚原大輔さんにはお忙しい中にも関わらず、時間を割いて論文のチェックをして頂き、多くの助言を頂きました。この他にも多くの方々の助言、叱咤激励を頂きました。

なお、本論文は p^LA^TE^X 用いて整形され、スタイルファイルに dennou style 6 を使用させて頂きました。

付録 A 数式の導出

本文中に登場した数式のうち導出が大変な式の導出過程について述べる。

A.1 平均成分の方程式の導出

(10) 式の導出 物理量を (4) 式のように平均成分と変動成分に分け、(2) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_i + u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U}_i \bar{U}_k + \bar{U}_i u_k + \bar{U}_k u_i + u_i u_k) + \varepsilon_{ikl} f_k (\bar{U}_l + u_l) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{P} + p) - g_i \beta (\bar{\Theta} + \theta) + \nu \nabla^2 (\bar{U}_i + u_i) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで両辺全体にレイノルズ平均とり、(5) 式を用いると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_i + u_i)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U}_i \bar{U}_k + \bar{U}_i u_k + \bar{U}_k u_i + u_i u_k)} + \overline{\varepsilon_{ikl} f_k (\bar{U}_l + u_l)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\bar{U}}_i + \bar{\bar{u}}_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\bar{U}}_i \bar{\bar{U}}_k + \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{U}}_k + \bar{\bar{U}}_i \bar{\bar{u}}_k + \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_k) + \varepsilon_{ikl} f_k (\bar{\bar{U}}_l + \bar{\bar{u}}_l) \\ &= \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U}_i \bar{U}_k + \bar{u}_i \bar{u}_k) + \varepsilon_{ikl} f_k \bar{U}_l, \quad (\text{A.2}) \\ (\text{右辺}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\bar{P}} + \bar{\bar{p}}) - g_i \beta (\bar{\bar{\Theta}} + \bar{\bar{\theta}}) + \nu \nabla^2 (\bar{\bar{U}}_i + \bar{\bar{u}}_i), \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\bar{P}} + \bar{\bar{p}}) - g_i \beta (\bar{\bar{\Theta}} + \bar{\bar{\theta}}) + \nu \nabla^2 (\bar{\bar{U}}_i + \bar{\bar{u}}_i) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - g_i \beta \bar{\Theta} + \nu \nabla^2 \bar{U}_i. \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

(A.2) 式, (A.3) 式より (10) 式となる。

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U}_i \bar{U}_k + \bar{u}_i \bar{u}_k) + \varepsilon_{ikl} f_k \bar{U}_l = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - g_i \beta \bar{\Theta} + \nu \nabla^2 \bar{U}_i.$$

(11) 式の導出 物理量を (4) 式のように平均成分と変動成分に分けて、(3) 式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Theta} + \theta) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U}_k \bar{\Theta} + \bar{U}_k \theta + \bar{\Theta} u_k + u_k \theta) = \alpha \nabla^2 (\bar{\Theta} + \theta) \quad (\text{A.4})$$

となる。ここで両辺全体にレイノルズ平均をとり、(5) 式を用いると

$$(\text{左辺}) = \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Theta} + \theta)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{U}_k \bar{\Theta} + \bar{U}_k \theta + \bar{\Theta} u_k + u_k \theta)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Theta} + \bar{\theta}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_k \Theta} + \overline{U_k \theta} + \overline{\Theta u_k} + \overline{u_k \theta}) \\
&= \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_k \Theta} + \overline{u_k \theta}) \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \alpha \nabla^2(\bar{\Theta} + \bar{\theta}) \\
&= \alpha \nabla^2(\bar{\Theta} + \bar{\theta}) \\
&= \alpha \nabla^2 \bar{\Theta}. \tag{A.6}
\end{aligned}$$

(A.5) 式, (A.6) 式より (11) 式となる.

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_k \Theta} + \overline{u_k \theta}) = \alpha \nabla^2 \bar{\Theta}.$$

A.2 レイノルズ応力方程式の導出

(15) 式の導出 (13) 式に u_j をかけた式と (13) 式の j 成分の式に u_i をかけたものを辺々足し合わせると

$$\begin{aligned}
&u_j \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_i u_k} + \overline{U_k u_i} + u_i u_k - \overline{u_i u_k}) + \varepsilon_{ikl} f_k u_l \right\} \\
&+ u_i \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_j u_k} + \overline{U_k u_j} + u_j u_k - \overline{u_j u_k}) + \varepsilon_{jkl} f_k u_l \right\} \\
&= u_j \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \beta \theta + \nu \nabla^2 u_i \right) + u_i \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + g_j \beta \theta + \nu \nabla^2 u_j \right) \tag{A.7}
\end{aligned}$$

となる. この式を展開して整理すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(u_i u_j) + u_j \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_i u_k}) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_j u_k}) \\
&+ u_j \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_k u_i}) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{U_k u_j}) + u_j \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k}(u_j u_k) \\
&- u_j \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_i u_k}) - u_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_j u_k}) + f_k (\varepsilon_{jkl} u_i u_l + \varepsilon_{ikl} u_j u_l) \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j}(p u_i) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_j) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\
&+ \beta (g_j u_i \theta + g_i u_j \theta) + \nu u_j \nabla^2 u_i + \nu u_i \nabla^2 u_j \tag{A.8}
\end{aligned}$$

となる. (9) 式, (12) 式を用いると

$$((\text{A.8}) \text{ 式左辺}) = \frac{\partial}{\partial t}(u_i u_j) + u_j u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{U_k} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \overline{U_k} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

$$\begin{aligned}
 & +u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_j u_k}) \\
 & + f_k (\varepsilon_{jkl} u_i u_l + \varepsilon_{ikl} u_j u_l) \\
 = & \frac{\partial}{\partial t} (u_i u_j) + u_j u_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j) \\
 & + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j) - u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_j u_k}) \\
 & + f_k (\varepsilon_{jkl} u_i u_l + \varepsilon_{ikl} u_j u_l) \\
 = & \frac{\partial}{\partial t} (u_i u_j) + u_j u_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U}_k u_i u_j) \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j u_k) - u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_j u_k}) \\
 & + f_k (\varepsilon_{jkl} u_i u_l + \varepsilon_{ikl} u_j u_l) \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

となる。また

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \tag{A.10}$$

と表し、 ρ は一定であることを用いると右辺は

$$\begin{aligned}
 ((A.8) \text{ 式右辺}) = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} p u_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} p u_j \right) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \beta (g_j u_i \theta + g_i u_j \theta) \\
 & - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j) \right\} \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

となる。ここで両辺全体のレイノルズ平均をとり、(5) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) = & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_j}) + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U}_k \overline{u_i u_j}) \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k}) + (\varepsilon_{jkl} \overline{u_i u_l} + \varepsilon_{ikl} \overline{u_j u_l}) f_k, \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \overline{p u_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \overline{p u_j} \right) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
 & + \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) \right\}. \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

(A.12) 式, (A.13) 式より (15) 式になる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{U}_k \overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} \right) \\
 + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} \overline{p u_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \overline{p u_j} + f_k (\varepsilon_{jkl} \overline{u_i u_l} + \varepsilon_{ikl} \overline{u_j u_l})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{\overline{u_i u_k} \partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \frac{\overline{u_j u_k} \partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \beta(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) \\
 &\quad + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.
 \end{aligned}$$

(16) 式の導出 (13) 式に θ をかけた式と, (14) 式に u_i をかけた式を辺々足し合わせると,

$$\begin{aligned}
 &\theta \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i u_k} + \overline{U_k u_i} + u_i u_k - \overline{u_i u_k}) + \varepsilon_{ikl} f_k u_l \right\} \\
 &\quad + u_i \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\Theta u_k} + \overline{U_k u_i} + u_i u_k - \overline{u_i u_k}) \right\} \\
 &= \theta \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i \beta \theta + \nu \nabla^2 u_i \right) + u_i \alpha \nabla^2 \theta \quad (\text{A.14})
 \end{aligned}$$

となる. この式を展開して整理すると

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t} (u_i \theta) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\Theta u_k}) + \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i u_k}) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_k \theta}) + \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_k u_i}) \\
 &\quad + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \theta) + \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k) - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \theta}) - \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) + \varepsilon_{ikl} f_k u_l \theta \\
 &= -\frac{\theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i \beta \theta^2 + \nu \theta \nabla^2 u_i + \alpha u_i \nabla^2 \theta \quad (\text{A.15})
 \end{aligned}$$

となる. (9) 式, (12) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 ((\text{A.15}) \text{ 式左辺}) &= \frac{\partial}{\partial t} (u_i \theta) + u_i u_k \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} + u_k \theta \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{U_k u_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \overline{U_k \theta} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
 &\quad + u_i u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + u_k \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \theta}) - \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) + \varepsilon_{ikl} f_k u_l \theta \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (u_i \theta) + u_i u_k \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} + u_k \theta \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{U_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i \theta) \\
 &\quad + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i \theta) - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \theta}) - \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) + \varepsilon_{ikl} f_k u_l \theta \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (u_i \theta) + u_i u_k \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} + u_k \theta \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_k u_i \theta}) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k \theta) - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \theta}) - \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) + \varepsilon_{ikl} f_k u_l \theta \quad (\text{A.16})
 \end{aligned}$$

となる. また (A.10) 式と ρ が一定であることを用いると

$$((\text{A.15}) \text{ 式右辺}) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} p \theta \right) + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + g_i \beta \theta^2$$

$$\begin{aligned}
 & +\nu\theta\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)+\alpha u_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) \\
 = & -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho}p\theta\right)+\frac{p}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}-g_i\beta\theta^2+\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\theta\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \\
 & +\alpha\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right)-(\alpha+\nu)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

ここで両辺全体のレイノルズ平均をとり, (5) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 \text{(左辺)} & = \overline{\frac{\partial}{\partial t}(u_i\theta)}+\overline{u_k u_i\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_k}}+\overline{u_k\theta\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_k}}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k u_i\theta)}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k\theta)} \\
 & -\overline{\theta\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i\bar{u}_k)}-\overline{u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k\bar{\theta})}+\overline{\varepsilon_{ikl}f_k u_l\theta}, \\
 = & \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_i\bar{\theta})}+\overline{u_k u_i\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_k}}+\overline{u_k\theta\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_k}}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k \bar{u}_i\bar{\theta})}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i u_k\bar{\theta})} \\
 & -\overline{\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i\bar{u}_k)}-\overline{\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k\bar{\theta})}+\overline{\varepsilon_{ikl}f_k \bar{u}_l\bar{\theta}}, \\
 = & \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_i\bar{\theta})}+\overline{\bar{u}_k \bar{u}_i\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_k}}+\overline{u_k\theta\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_k}} \\
 & +\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k \bar{u}_i\bar{\theta})}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i u_k\bar{\theta})}+\overline{\varepsilon_{ikl}f_k \bar{u}_l\bar{\theta}},
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(右辺)} & = -\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho}p\theta\right)}+\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}}-\overline{g_i\beta\theta^2} \\
 & +\nu\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\theta\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}+\alpha\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right)}-(\alpha+\nu)\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}}. \\
 = & -\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho}p\bar{\theta}\right)}+\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_i}}-\overline{g_i\beta\bar{\theta}^2} \\
 & +\nu\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{\theta}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}+\alpha\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_k}\right)}-(\alpha+\nu)\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_k}}.
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

(A.18) 式, (A.19) 式より (16) 式になる.

$$\begin{aligned}
 & \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_i\bar{\theta})}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(U_k \bar{u}_i\bar{\theta}+\bar{u}_i u_k\bar{\theta}-\alpha u_i\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_k}-\nu\theta\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)} \\
 & +\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho}p\bar{\theta}\right)}+\overline{\varepsilon_{ikl}f_k \bar{u}_l\bar{\theta}} \\
 = & -\overline{\bar{u}_i u_k\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial x_k}}-\overline{u_k\theta\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_k}}-\overline{\beta g_i\bar{\theta}^2}+\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_i}}-(\alpha+\nu)\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_k}}.
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

(17) 式の導出 (14) 式に θ をかけると

$$\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\Theta} u_k + \overline{U}_k \theta + u_k \theta - \overline{u_k \theta}) = \alpha \theta \nabla^2 \theta \quad (\text{A.21})$$

(9) 式, (12) 式を用いると

$$\begin{aligned} ((\text{A.21}) \text{ 式左辺}) &= \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_k \theta \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} + \overline{U}_k \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + u_k \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \theta}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta^2}{\partial t} + u_k \theta \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \overline{U}_k \frac{\partial \theta^2}{\partial x_k} + \frac{1}{2} u_k \frac{\partial \theta^2}{\partial x_k} - \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \theta}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta^2}{\partial t} + u_k \theta \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U}_k \theta^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \theta^2) - \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \theta}), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

となる. また, (A.10) 式を用いると

$$\begin{aligned} ((\text{A.21}) \text{ 式右辺}) &= \alpha \theta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \theta^2}{\partial x_k} \right) - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

となる. (A.22) 式, (A.23) 式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \theta^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U}_k \theta^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \theta^2) - \theta \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \theta}) - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \theta^2}{\partial x_k} \\ = -u_k \theta \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

となる. (A.24) 式の両辺を 2 倍して, レイノルズ平均をとり, (5) 式を用いると (17) 式になる.

$$\frac{\partial \theta^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{U}_k \theta^2 + \overline{u_k \theta^2} - \alpha \frac{\partial \theta^2}{\partial x_k} \right) = -2 \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} - 2 \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}. \quad (\text{A.25})$$

A.3 乱流エネルギー方程式の導出

(36) 式の導出 (33) 式で等方成分, すなわち $i = j$ とした式を足し合わせ, (9) 式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u_i^2}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_1 \left\{ \frac{\partial \overline{u_i^2}}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i u_k}) \right\} \right] \\ = -2 \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - 2 \beta g_i \overline{u_i \theta} - \frac{q}{3 l_1} (\overline{u_i^2} - 3 \frac{1}{3} q^2) - 3 \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

となる. $q^2 = \overline{u_i^2}$ を代入すると (36) 式となる.

$$\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ q\lambda_1 \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_i} \right) \right\} = -2\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - 2\beta g_i \overline{u_i \theta} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad (\text{A.27})$$

(37) 式の導出 (33) 式から (36) 式に $\delta_{ij}/3$ をかけた式⁴⁾ を辺々引いて, 式を整理する.

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{D}{Dt} (\overline{u_i u_j}) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ q\lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_k}) \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\delta_{ij}}{3} \left[\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ q\lambda_1 \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_k u_l}) \right) \right\} \right] \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_k}) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_k u_l}) \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) \\ &\quad - \frac{q}{3\Lambda_1} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right) + Cq^2 \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{q^3}{\Lambda_1} \delta_{ij} \\ &\quad - \frac{\delta_{ij}}{3} \left(-2\overline{u_l u_k} \frac{\partial \overline{U_l}}{\partial x_k} - 2\beta g_l \overline{u_l \theta} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \right) \\ &= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{U_l}}{\partial x_k} + Cq^2 \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l \overline{u_l \theta} \right) - \frac{q}{3\Lambda_1} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

(A.28) 式, (A.29) 式より (37) 式となる.

$$\begin{aligned} &\frac{D}{Dt} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_j u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_k}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_k u_l}) \right) \right\} \right] \\ &= -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{U_l}}{\partial x_k} + Cq^2 \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l \overline{u_l \theta} \right) - \frac{q}{3\Lambda_1} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right). \end{aligned}$$

⁴⁾(36) の添字は i を l に置き換えることに注意する.

(40) 式の導出 (38) 式, (39) 式を (36) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \left\{ \frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\delta_{il}}{3} + a_{il} \right) q^2 \right] \right\} \right] \\
 &= \frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} q\lambda_1 \left\{ \frac{5}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ik} q^2) \right\} \quad (\text{A.30})
 \end{aligned}$$

となる. ここで移流項の中の a_{ik} を含む項を $O(a)$ と表すと

$$(\text{左辺}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} q\lambda_1 \left\{ \frac{5}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} (1 + O(a)) \right\} \quad (\text{A.31})$$

となる. ただし, $O(a)$ の項はオーダーさえ正しく表現されていればよいものとする. また

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) &= -2 \left(\frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ik} \right) q^2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - 2\beta g_i b_i q \varphi - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \\
 &= -\frac{2}{3} q^2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} - 2a_{ik} q^2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - 2\beta g_i b_i q \varphi - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad (\text{A.32})
 \end{aligned}$$

となる. ここで (9) 式を用いると

$$(\text{右辺}) = -2a_{ik} q^2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - 2\beta g_i b_i q \varphi - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad (\text{A.33})$$

となる. (A.31) 式, (A.33) 式より (40) 式となる.

$$\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ q\lambda_1 \frac{5}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} (1 + O(a)) \right\} = -2a_{ik} q^2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - 2b_k g_k \beta q \varphi - 2 \frac{q^3}{\Lambda}.$$

(41) 式の導出 (38) 式, (39) 式を (37) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \frac{D}{Dt} \left\{ \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + a_{ij} \right) q^2 - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\delta_{ij}}{3} + a_{ij} \right) q^2 \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\delta_{jk}}{3} + a_{jk} \right) q^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ik} \right) q^2 \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\left(\frac{\delta_{kl}}{3} + a_{kl} \right) q^2 \right] \right) \right\} \right] \\
 &= \frac{D}{Dt} (a_{ij} q^2) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \left\{ \frac{\delta_{ij}}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij} q^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\delta_{jk}}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{jk} q^2) + \frac{\delta_{ik}}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ik} q^2) \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. -\frac{\delta_{ij}}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\delta_{kl}}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} (a_{kl} q^2) \right) \right\} \\
 = & \frac{D}{Dt} (a_{ij} q^2) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{q \lambda_1}{3} \left\{ \left(\delta_{jk} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_k} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(a_{ij} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} + a_{jk} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} + a_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} a_{kl} \frac{\partial q^2}{\partial x_l} \right) \right\} \right] \quad (\text{A.34})
 \end{aligned}$$

ここで移流項の中で a_{ij} を含む項をまとめて $O(a)$ と表すことにすると

$$(\text{左辺}) = \frac{D}{Dt} (a_{ij} q^2) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{q \lambda_1}{3} \left(\delta_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right) (1 + O(a)) \right\} \quad (\text{A.35})$$

となる. また右辺は

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) & = -\left(\frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ik} \right) q^2 \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} - \left(\frac{\delta_{jk}}{3} + a_{jk} \right) q^2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\delta_{kl}}{3} + a_{kl} \right) \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k} \\
 & \quad + C q^2 \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \beta \left(g_j b_i q \varphi + g_i b_j q \varphi - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l b_l q \varphi \right) \\
 & \quad - \frac{q}{3l_1} \left\{ \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + a_{ij} \right) q^2 - \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 \right\} \\
 & = -q^2 \left\{ \left(\frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ik} \right) \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \left(\frac{\delta_{jk}}{3} + a_{jk} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{3} \delta_{ij} a_{kl} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} - C \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\
 & \quad - \beta q \varphi (g_j b_i + g_i b_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l b_l) - \frac{q^3}{3l_1} a_{ij} \quad (\text{A.36})
 \end{aligned}$$

ここで (9) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) & = -q^2 \left\{ \left(\frac{\delta_{ki}}{3} + a_{ki} \right) \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \left(\frac{\delta_{kj}}{3} + a_{kj} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{3} \delta_{ij} a_{kl} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k} - C \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\
 & \quad - \beta q \varphi (g_j b_i + g_i b_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l b_l) - \frac{q^3}{3l_1} a_{ij} \quad (\text{A.37})
 \end{aligned}$$

となる. (A.35) 式, (A.37) 式より (41) となる.

$$\frac{D}{Dt} (a_{ij} q^2) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{q \lambda_1}{3} \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right\} \{1 + O(a)\} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -q^2 \left\{ \left(\frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ik} \right) \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \left(\frac{\delta_{jk}}{3} + a_{jk} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} a_{kl} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k} - C \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\
&\quad - \beta q \varphi (g_j b_i + g_i b_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l b_l) - \frac{q^3}{3l_1} a_{ij} \tag{A.38}
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] Boussinesq, J., 1877: Theorie de l'écoulement tourbillant. *Mem. Presentes par divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.*, **23**, 46–50.
- [2] Clarke, R. H., A. J. Dyer, R. R. Brook, D. G. Reid and A. J. Troup, 1971: The Wangara experiment: Boundary layer data. Tech. Paper. 19, Div. Meteor. Phys., CSIRO, Australia.
- [3] Donaldson, C. duP., 1973: Construction of a dynamic model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants. *Workshop on Micrometeorology*, Boston, Amer. Meteor. Soc., 313–390.
- [4] Hanjamic, K., and B. E. Launder, 1972: Fully developed asymmetric flow in a plane channel. *J. Fluid. Mech.*, **52** 609–638.
- [5] Kolmogorov, A. N., 1941: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**, 301–305.
- [6] Mellor, G. L., 1973: Analytic Prediction of the Properties of Stratified Planetary Surface Layers. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1061–1069.
- [7] Mellor, G. L., and T. Yamada, 1974: A Hierarchy of Turbulence Closure Models for Planetary Boundary Layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791–1806.
- [8] 小高正嗣, 1997: Mellor, Yamada による境界層モデル.
地球流体電脳倶楽部,
<http://dennou-h.gfd-dennou.org/arch/review/zz1974/my/pub/index.htm>.
- [9] 小高正嗣, 1998: Klemp and Wilhelmson (1978) による乱流モデル.
地球流体電脳倶楽部,
<http://dennou-h.gfd-dennou.org/arch/review/zz1978/kw/pub/index.htm>.
- [10] Rotta, J. C., 1951: Statische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Z. Phys.*, **129**, 547–572; **131**, 51–77.
- [11] 山田哲司, 1999: 乱流クロージャモデル, 気象研究ノート, 第 196 号, 103–112.
- [12] 山田哲司, 1992: 第 3 章 3 次元大気乱流拡散モデル. 大気環境シミュレーション-大気の流れと拡散-, 総合編集横山長之, 白亜書房, 134–202.

- [13] 吉澤徹, 村上周三, 小林敏雄, 谷口伸行, 戴穀, 黒田明慈 他, 1995: 乱流解析 数値流体力学シリーズ 3. 東京大学出版会, 314pp.