1 湿潤断熱減率の計算

Weidenschilling and Lewis (1973) の湿潤断熱減率の定式化をフォローする．熱力学の第 1 法則は,

$$dU = \delta Q + \delta W + \delta Z, \tag{1}$$

である．ここで dU は内部エネルギー，δQ は系に加えられる熱量，δW は系に加える仕事，δZ は化学エネルギーである．考えている系において気体は理想気体として取り扱うことができ，その変化は断熱的にであるとすると，(3) 式の各項は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
dU &= \bar{c_v} dT. & (2)\\
\delta Q &= 0. & (3)\\
\delta W &= -pdV, &\\
&= -d(pV) + Vdp, &\\
&= -RdT + Vdp, &\\
&= -RdT + V\left(\frac{-\bar{M}pg}{RT}\right)dz,\ (\because \text{静水圧平衡の式}) &\\
&= -RdT - \bar{M}gdz. & (4)\\
\delta Z &= -\sum \lambda_k dX_k. & (5)
\end{aligned}$$

ここで $\bar{c_v}$ は大気の定積モル比熱の平均値，T は温度, p は圧力, V は 気体分子の 1 モル当たりの体積，R は気体定数, $\bar{M}$ は平均分子量, g は重力加速度, λ_k は k 番目の凝縮成分気体のモル当たりの凝縮のエンタルピー，dX_k は気体 k のモル比の変化である．(1) 式に (2) – (5) 式を代入することで,

$$\begin{aligned}
&\bar{c_v} dT + RdT + \bar{M}gdz + \sum \lambda_k dX_k = 0,\\
&\bar{c_p} dT + \bar{M}gdz + \sum \lambda_k dX_k = 0, \qquad (6)
\end{aligned}$$

となる．但し $\bar{c_p}$ は大気の定圧モル比熱の平均値で，理想気体の場合 $\bar{c_p} = \bar{c_v} + R$ である．

1.1 乾燥断熱温度減率

(6) 式の潜熱による項を無視することで乾燥断熱温度減率が求まる．

$$\begin{aligned}
&\bar{c_p} dT + \bar{M}gdz = 0,\\
&\frac{dT}{dz} = -\frac{\bar{M}g}{\bar{c_p}}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

1.2 湿潤断熱温度減率

(6) 式中の dX_k をモル分率と分圧の関係

$$dX_k = \frac{1}{p}dp_k - \left(\frac{p_k}{p^2}\right)dp. \tag{8}$$

とクラウジウス・クラペイロンの式

$$dp_k = \frac{p_k \lambda_k dT}{RT^2}, \tag{9}$$

を用いて変形すると,

$$\begin{aligned}
dX_k &= \frac{1}{p}dp_k - \frac{p_k}{p^2}dp, \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{p_k \lambda_k dT}{RT^2}\right) - \frac{p_k}{p^2}\left(-\frac{\bar{M}pg}{RT}dz\right), \\
&= \frac{p_k}{p}\frac{\lambda_k}{R_v T^2}dT + \frac{p_k}{p}\frac{\bar{M}g}{RT}dz, \\
&= \frac{\lambda_k X_k}{RT^2}dT + \frac{\bar{M}gX_k}{RT}dz.
\end{aligned} \tag{10}$$

である.

(6) 式に (10) 式を代入することで湿潤断熱温度減率が求まる.

$$\begin{aligned}
&\bar{c_p}dT + \bar{M}gdz + \sum \lambda_k dX_k = 0, \\
&\bar{c_p}dT + \bar{M}gdz + \sum \lambda_k \left(\frac{\lambda_k X_k}{RT^2}dT + \frac{\bar{M}gX_k}{RT}dz\right) = 0, \\
&\bar{c_p}\left(1 + \frac{\sum \lambda_k^2 X_k}{\bar{c_p}RT^2}\right)dT + \bar{M}g\left(1 + \frac{\sum \lambda_k X_k}{RT}\right)dz = 0, \\
&\frac{dT}{dz} = -\frac{\bar{M}g}{\bar{c_p}}\left(\frac{1 + \frac{\lambda_k X_k}{RT}}{1 + \frac{\lambda_k^2 X_k}{\bar{c_p}RT^2}}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

但し和の規約を用いている.

(11) において十分に凝縮性成分の少ない場合, つまり $\lambda_k^2 X_k / \bar{c_p}RT^2 \ll 1$ の場合には,

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dz} &\approx -\frac{\bar{M}g}{\bar{c_p}}\left(1 + \frac{\lambda_k X_k}{RT}\right)\left(1 - \frac{\lambda_k^2 X_k}{\bar{c_p}RT^2}\right), \\
&\approx -\frac{\bar{M}g}{\bar{c_p}}\left\{1 - \frac{\lambda_k X_k}{\bar{c_p}T}\left(\frac{\lambda_k}{RT} - \frac{\bar{c_p}}{R}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

と近似できる. 但し $\lambda_k/\bar{c_p}T \approx 10$ なので, $\lambda_k^2 X_k/\bar{c_p}RT^2 \ll 1$ ならば必ず $\lambda_k X_k/RT \ll 1$ となる. 変形において 2 次の微小量は十分に小さいものとみなし無視した.

(11) において十分に凝縮性成分の多い場合, すなわち $\lambda_k X_k/RT \gg 1$ の場合には,

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{dz} &\approx -\frac{\bar{M}g}{\bar{c_p}} \frac{\frac{\lambda_k X_k}{RT}}{\frac{\lambda_k^2 X_k}{\bar{c_p}RT^2}}, \\
&\approx -\frac{\bar{M}gT}{\lambda_k} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

と近似できる. 但し $\lambda_k/\bar{c_p}T \approx 10$ なので, $\lambda_k X_k/RT \gg 1$ ならば必ず $\lambda_k^2 X_k/\bar{c_p}RT^2 \gg 1$ となる.

2 仮温度減率の計算

断熱温度減率から仮温度減率を計算する.

$$
\begin{aligned}
\frac{dT_v}{dz} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{M_d}{\bar{M}}T\right) \\
&= \frac{M_d}{\bar{M}}\frac{dT}{dz} - \frac{M_d T}{\bar{M}^2}\frac{d\bar{M}}{dz} \\
&= \frac{M_d}{\bar{M}}\frac{dT}{dz} - \frac{M_d T}{\bar{M}^2}\frac{d}{dz}(M_d(1-X) + M_v X) \\
&= \frac{M_d}{\bar{M}}\frac{dT}{dz} - \frac{M_d T}{\bar{M}^2}\frac{d}{dz}\{(M_v - M_d)X\} \\
&= \frac{M_d}{\bar{M}}\frac{dT}{dz} - \frac{M_d(M_v - M_d)T}{\bar{M}^2}\frac{dX}{dz}
\end{aligned}
$$

ただし, M_d は乾燥気塊の分子量, M_v は凝縮成分の分子量, $T_v = M_d T/\bar{M}$ は仮温度である. ここで (10) 式を代入すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{dT_v}{dz} &= \frac{M_d}{\bar{M}}\frac{dT}{dz} - \frac{M_d(M_v - M_d)T}{\bar{M}^2}\left\{\frac{\lambda_k X_k}{RT^2}\frac{dT}{dz} + \frac{\bar{M}gX_k}{RT}\right\} \\
&= \frac{M_d}{\bar{M}}\frac{dT}{dz} - \frac{M_d(M_v - M_d)}{\bar{M}^2}\frac{\lambda_k X_k}{RT}\frac{dT}{dz} - \frac{M_d(M_v - M_d)}{\bar{M}}\frac{gX_k}{R} \\
&= \frac{M_d}{\bar{M}}\left(1 - \frac{(M_v - M_d)}{\bar{M}}\frac{\lambda_k X_k}{RT}\right)\frac{dT}{dz} - \frac{M_d(M_v - M_d)}{\bar{M}}\frac{gX_k}{R} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

さらに (11) 式を代入すると,

$$
\frac{dT_v}{dz} = -\frac{M_d(M_v - M_d)}{\bar{M}}\frac{gX_k}{R} - \frac{M_d g}{\bar{c_p}}\left(1 - \frac{M_v - M_d}{\bar{M}}\frac{\lambda_k X_k}{RT}\right)\frac{1 + \frac{\lambda_k X_k}{RT}}{1 + \frac{\lambda_k^2 X_k}{\bar{c_p}RT^2}} \qquad (15)
$$

ここで凝縮成分が十分に少ないと仮定すると, $\lambda_k^2 X_k/\bar{c_p}RT^2 \ll 1$ かつ $\lambda_k X_k/RT \ll 1$ なので,

$$\frac{dT_v}{dz} = -\frac{M_d(M_v - M_d)}{\bar{M}}\frac{gX_k}{R} - \frac{M_d g}{\bar{c_p}}\left(1 + \frac{\lambda_k X_k}{RT} - \frac{\lambda_k^2 X_k}{\bar{c_p}RT^2} - \frac{M_v - M_d}{\bar{M}}\frac{\lambda_k X_k}{RT}\right) \tag{16}$$

と近似できる.

3 静的安定度の計算

(15) 式を用いると, 静的安定度 N^2 は,

$$N^2 = \frac{g}{T_v}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{M_d g}{c_p}\right) \tag{17}$$

となる. ここで c_p は乾燥気塊の比熱である. この式を凝結物が少ないものとして近似すると,

$$\begin{aligned}
N^2 &= \frac{\bar{M}g}{M_d T}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{M_d g}{c_p}\right) \\
&= \frac{\bar{M}g}{M_d T}\left\{-\frac{M_d(M_v - M_d)}{\bar{M}}\frac{gX_k}{R} - \frac{M_d g}{c_p}\left(\frac{\lambda_k X_k}{RT} - \frac{\lambda_k^2 X_k}{c_p RT^2} - \frac{M_v - M_d}{\bar{M}}\frac{\lambda_k X_k}{RT}\right)\right\} \\
&= \frac{\bar{M}g^2}{c_p T}\left\{-\frac{M_v - M_d}{\bar{M}}\frac{c_p}{R} - \frac{\lambda_k}{RT} + \frac{\lambda_k^2}{c_p RT^2} + \frac{M_v - M_d}{\bar{M}}\frac{\lambda_k}{RT}\right\} X_k \\
&= \frac{\bar{M}g^2}{c_p T}\left\{\frac{M_v - M_d}{\bar{M}}\left(\frac{\lambda_k}{RT} - \frac{c_p}{R}\right) + \frac{\lambda_k}{c_p T}\left(\frac{\lambda_k}{RT} - \frac{c_p}{R}\right)\right\} X_k \\
&= \frac{M_d g^2}{c_p T}\left\{\left(\frac{\lambda_k}{RT} - \frac{c_p}{R}\right)\left(\frac{\lambda_k}{c_p T} + \frac{M_v - M_d}{M_d}\right)\right\} X_k
\end{aligned} \tag{18}$$

ただし, 凝縮物の量が少ないとして $\bar{c_p} = c_p$, $\bar{M} = M_d$ とみなしている.

4 参考文献

Atreya, S. K., Romani, P. N., 1985 : Photochemistry and clouds of Jupiter, Saturn and Uranus. in *Recent advances in planetary meteorology*, edited by Hunt, G. E., Cambridge University Press, 17-68.

久保亮吾 編, 1961 : 大学演習 熱学・統計力学 修正版. 裳華房.

Lewis, J. S., 1969a : The clouds of Jupiter and the NH_3–H_2O and NH_3–H_2S systems. *Icarus*, **10**, 365.

化学工学協会 編, 1988 : 化学工学便覧 改訂第 5 版. 丸善株式会社

小倉義光 著, 1984 : 一般気象学. 東京大学出版会

Weidenschilling, S. J., Lewis, J. S., 1973 : Atmospheric and Cloud Structures of the Jovian Planets. *Icarus*, **20**, 465-476.