非静力学モデル deepconv の定式化

地球流体電脳倶楽部

2012 年 12 月 5 日

目 次

第 1 章　基礎方程式系

水平方向の座標変数を x, y, 鉛直方向の座標変数を z と表し, 時間方向の変数は t と表す.

1.1　運動方程式・圧力方程式・熱の式・混合比の保存式

力学的な枠組みは, 準圧縮方程式系 (Klemp and Wilhelmson,1978) を用いる. この方程式系では, 予報変数を水平一様な基本場とそこからのずれに分離し, 方程式の線形化を行っている. 方程式中の変数は付録 D に示す.

以下に準圧縮方程式系の時間発展方程式を一覧する. 密度の式では乾燥成分と湿潤成分の分子量の差を考慮するが, 熱の式では考慮しない. また圧力方程式では非断熱加熱による大気の膨張と, 凝縮に伴う圧力変化を無視している.

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta}_v\frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.u \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta}_v\frac{\partial \pi}{\partial y} + Turb.v \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta}_v\frac{\partial \pi}{\partial z} + Turb.w \\ &\quad + \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q_v}/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1 + \sum \bar{q_v}}\right) g \quad (1.3)\end{aligned}$$

圧力方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial t} &= -\frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}\bar{\rho}\bar{\theta_v}^2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{\theta_v}u_j) \\
&+\frac{\overline{C_s^2}}{c_{p_d}\overline{\theta_v}}\left\{\frac{\dot{\theta}}{\bar{\bar{\theta}}}-\left(\frac{\sum\dot{q_v}+\sum\dot{q_c}+\sum\dot{q_r}}{1+\sum\overline{q_v}}.-\frac{\sum\dot{q_v}/M_v}{1/M_d+\sum\overline{q_v}/M_v}\right)\right\} \quad (1.4)
\end{aligned}
$$

熱の式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial v}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)-w\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\pi}}\left(Q_{cnd}+Q_{rad}+Q_{dis}\right) \\
&+Turb.\bar{\theta}+Turb.\theta \quad (1.5)
\end{aligned}
$$

混合比の保存式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q_v}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_v}{\partial x}+v\frac{\partial q_v}{\partial y}+w\frac{\partial q_v}{\partial z}\right)-w\frac{\partial \bar{q_v}}{\partial x} \\
&+Src.q_v+Turb.q_v+Turb.\bar{q_v}, \quad (1.6) \\
\frac{\partial q_c}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x}+v\frac{\partial q_c}{\partial y}+w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right)+Src.q_c+Turb.q_c \quad (1.7) \\
\frac{\partial q_r}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x}+v\frac{\partial q_r}{\partial y}+w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right)+Src.q_r+Fall.q_r+Turb.q_r \quad (1.8)
\end{aligned}
$$

ただし, $^-$ の付いた変数は水平一様な基本場であることを示し, 上付き添え字 c は個々の凝縮成分を示す.

エクスナー関数 π

$$
\pi \equiv \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R_d/c_{p_d}} \quad (1.9)
$$

温位 θ

$$
\theta \equiv T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R_d/c_{p_d}} = \frac{T}{\pi} \quad (1.10)
$$

密度 ρ

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{p}{R_dT}\left(\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}\right)\left(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r\right) \\
&= \frac{p}{R_dT_v}=\frac{p_0\pi^{c_{v_d}/R_d}}{R_d\theta_v} \quad (1.11)
\end{aligned}
$$

仮温位 θ_v

$$\theta_v = \frac{\theta}{\left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right)(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)} \tag{1.12}$$

音波速度 ${C_s}^2$

$${C_s}^2 = \frac{c_{pd}}{c_{vd}} R_d \pi \theta_v \tag{1.13}$$

1.2 雲微物理過程のパラメタリゼーション

方程式系に含まれる凝縮による加熱項 Q_{cnd}, 生成項 Src, 落下項 $Fall$ の評価は, 中島 (1998) で用いられた Kessler (1969) のパラメタリゼーションに従う.

暖かい雨のバルク法のパラメタリゼーションでは, 気相と凝縮相を表 1.1 に記載した 3 つのカテゴリーに分ける. 3 つのカテゴリー間で生じる微物理素過程を表 1.2 に示す. これらの量は全て正の値として定義される. なお, 水蒸気が直接雨水に凝結する過程は無視する.

記号	意味	内容
q_v	気相の混合比	気体の状態で大気中に存在する水.
q_c	雲水混合比	落下速度がゼロな液体の粒子.
		実際の大気中の雲粒に対応する.
		通常 100 μm 以下の微小な流体粒子である.
q_r	雨水混合比	有意な落下速度を持つ液体の粒子.
		実際の大気中の雨粒に対応する.

表 1.1: Kessler (1969) のパラメタリゼーションにおけるカテゴリー.

記号	内容
CN_{vc}	凝結による水蒸気から雲水への変換 (condensation).
EV_{cv}	蒸発による雲水から水蒸気への変換 (evaporation).
EV_{rv}	蒸発による雨水から水蒸気への変換 (evaporation).
CN_{cr}	併合成長による雲水から雨水への変換 (autocondensation). 併合や水蒸気拡散により, 雲粒子が雨粒の大きさにまで成長する
CL_{cr}	衝突併合による雲水から雨水への変換 (collection). 大水滴が小水滴を衝突併合する.
PR_r	雨水の重力落下に伴う雨水混合比の変化率 (Precipitation).

表 1.2: Kessler (1969) のパラメタリゼーションにおける雲微物理素過程

この微物理素過程を用いて (1.6) – (1.8) 式を書き直すと, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x} + w\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - w\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{L}{c_{p_d}\bar{\pi}}\left(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\pi}}\left(Q_{rad} + Q_{dis}\right) + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta \qquad (1.14) \\
\frac{\partial q_v}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_v}{\partial x} + w\frac{\partial q_v}{\partial z}\right) - w\frac{\partial \bar{q_v}}{\partial x} - \left(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}\right) \\
&\quad + Turb.q_v + Turb.\bar{q_v}, \qquad (1.15) \\
\frac{\partial q_c}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x} + w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right) + \left(CN_{vc} - EV_{cv} - CN_{cr} - CL_{cr}\right) \\
&\quad + Turb.q_c, \qquad (1.16) \\
\frac{\partial q_r}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x} + w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right) + \left(CN_{cr} + CL_{cr} - EV_{rv}\right) + PR_r \\
&\quad + Turb.q_r \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

ここで, $\gamma = L_v/(c_{p_d}\pi)$ であり, L_v は水の蒸発の潜熱 [J K^{-1} kg^{-1}], c_{p_d} は乾燥大気の定圧比熱 [J K kg^{-1}], π はエクスナー関数である.

微物理素過程は以下のように定式化する.

水蒸気と雲水の間の変換: $-CN_{vc} + EV_{cv}$

雲水は粒が小さく, 水蒸気との間で瞬間的に飽和調節が起こるものとする. すなわち, 移流などの項を計算した後の温度と水蒸気量が過飽和状態となっている場合には, ちょうど飽和になる量の水蒸気を凝縮させる. 一方, 移流などの項を計算した後に, 雲水が存在するにも拘わらず未飽和になっている場所では, ちょうど飽和になる量の雲水を蒸発させる.

雲水の併合成長: CN_{cr}

Kessler (1969) に従って, 以下のように与える.

$$CN_{cr} = (q_c - q_{c0})/\tau_{ac} \tag{1.18}$$

雲水の衝突併合: CL_{cr}

Kessler (1969) に従って, 以下で定式化する.

$$CL_{cr} = 2.2 q_c (\bar{\rho} q_r)^{0.875}. \tag{1.19}$$

雨水の蒸発: EV_{rv}

$$EV_{rv} = 4.85 \times 10^{-2} (q_{vsw} - q_v)(\bar{\rho} q_r)^{0.65} \tag{1.20}$$

雨水のフラックス: PR_r

雨水の重力落下による混合比の変化率は,

$$PR_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} U_r q_r). \tag{1.21}$$

であり, 雨水の終端落下速度 U_r [m s^{-1}] は

$$U_r = 12.2 (q_r)^{0.125} \tag{1.22}$$

で与える.

1.3 放射加熱項の表現

放射加熱項 Q_{rad} は正味の上向き放射フラックス F_{net} を用いて以下のように表される.

$$Q_{rad} = -\frac{1}{\bar{\rho} c_{p_d}} \frac{dF_{net}}{dz}$$

本モデルでは F_{net} は陽に計算せず, Q_{rad} は高度のみに依存するパラメタとして与える. 与えることができる Q_{rad} の一例として, 中島 (1994) の表式を以下に示す.

Q_{rad} を

$$Q_{rad} \equiv \frac{1}{\pi} Q_R + Q_N \tag{1.23}$$

と表現する. ここで Q_R は,

$$Q_R(z) = \begin{cases} 0 & [\mathrm{K/day}] \quad z > 15000\ [\mathrm{m}] \\ 2(15000 - z)/5000 & [\mathrm{K/day}] \quad 10000\ [\mathrm{m}] < z < 15000\ [\mathrm{m}] \\ 2 & [\mathrm{K/day}] \quad z < 10000\ [\mathrm{m}] \end{cases} \tag{1.24}$$

であり, 高度によって変化する水平一様な冷却を表している. また, Q_N はニュートン冷却であり,

$$Q_N = \frac{\theta'_{MeanX}}{D_N} \tag{1.25}$$

である. ここで θ'_{MeanX} は温位の擾乱成分を x 方向に平均した値で, $D_N = 1/5\ [1/\mathrm{day}]$ は Q_N の強度である. この項は, モデル全体の温度が基本場から大きく離れないようにする項である.

1.4　乱流混合のパラメタリゼーション

1.4.1　運動方程式中の拡散項

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで粘性拡散項は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} Turb.u_i &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(u'_i u'_j)} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{3}\delta_{ij}E\right]. \end{aligned} \tag{1.26}$$

ここで K_m は運動量に対する乱流拡散係数であり, E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー

$$E = \frac{1}{2}\overline{(u')^2 + v')^2 + (w')^2} = \frac{{K_m}^2}{C_m^2 l^2} \tag{1.27}$$

である.

1.4.2 熱力学の式の拡散項

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで温位の粘性拡散項は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
Turb.\theta &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i'\theta'} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right). \qquad (1.28)
\end{aligned}
$$

ここで K_h は温位に対する乱流拡散係数である.

1.4.3 乱流拡散係数の式

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで, 乱流拡散係数の時間発展方程式は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K_m}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial K_m}{\partial x} + v\frac{\partial K_m}{\partial y} + w\frac{\partial K_m}{\partial z}\right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\overline{\theta_v}}\left(\frac{\partial \theta_{el}}{\partial z}\right) \\
&+ (C_m^2 l^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&+ \frac{C_m^2 l^2}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} \\
&- \frac{K_m}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right) \\
&+ \left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{2l^2}K_m^2 \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

ここで $C_\varepsilon = C_m = 0.2$, 混合距離 $l = \mathrm{Min}(\Delta z, \mathrm{Min}(\Delta x, \Delta y))$ とする. ただし $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ はそれぞれ x, y, z 方向の格子間隔である. θ_{el} は以下のように定義する

$$
\theta_{el} = \overline{\theta_v} + \theta_v' \quad (for \;\; q_c = 0) \qquad (1.30)
$$

$$
\theta_{el} = \overline{\theta_v} + \theta_v' + \frac{\sum L q_v}{c_{p_d}\bar{\pi}} \quad (for \;\; q_c > 0) \qquad (1.31)
$$

ただし,

$$
\overline{\theta_v} + \theta_v' = \bar{\theta_v}\left\{1 + \frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q_v}/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1 + \sum \bar{q_v}}\right\} \qquad (1.32)
$$

である.

1.4.4 散逸加熱項の表現

散逸加熱項 Q_{dis} は, 乱流運動エネルギーの散逸項をもとに, 以下のように与える.

$$Q_{dis} = \frac{1}{\overline{c_p}} \frac{C_\varepsilon}{l} \frac{K_m^3}{(C_m l)^3}. \tag{1.33}$$

ここで $l = \mathrm{Min}(\Delta z, \mathrm{Min}(\Delta x, \Delta y))$ である.

1.4.5 地表面フラックスの表現

本モデルでは, 地表面からの運動量, 熱, 水蒸気のフラックスの表現として, 中島 (1994) による単純なバルク法の定式化を採用している. 以下では, 地球大気に対する単純なバルク法の表式を示す.

地表面からの運動量, 熱, 水蒸気のフラックスをそれぞれ F_u, F_θ, F_{q_v} とすると,

$$F_u = -C_D V_{sfc} \rho u_{z=0}, \tag{1.34}$$

$$F_v = -C_D V_{sfc} \rho v_{z=0}, \tag{1.35}$$

$$F_\theta = -C_D V_{sfc} \rho (T_{z=0} - T_{sfc}), \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} F_{q_v} &= -C_D V_{sfc} \rho (q_{vz=0} - q_{sfc}) \\ &= -C_D V_{sfc} \rho \left(q_{vz=0} - \frac{M_v}{M_d} \frac{e_{sfc}}{p_{sfc}} \right). \end{aligned} \tag{1.37}$$

ここで, $C_D = 0.0015$ はバルク係数, e は飽和蒸気圧であり, 下付き添え字 “$_{z=0}$” は大気最下層の値を意味し, 下付き添え字 “$_{sfc}$” で地表面の値を表す. また, 地表面風速 V_{sfc} は

$$V_{sfc} = \sqrt{u^2 + (v + v_0)^2}$$

で表される. ここで $v_0 3$ [m/s] は風速の最低値であり, 風が吹いていなくても日射による加熱や蒸発といった現実的な現象が起きることを保証するためのものである.

第2章 参考文献

浅井 富雄, 1983: 大気対流の科学, 気象学のプロムナード 14, 東京堂出版.

Browning, K. A., 1964: Airflow and percipitation within severe local storms which travel to the right of the winds. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 634-639

Curic, M., Janc, D., Vujovic, D., Vuckovic, V., 2003: The effects fo a river valley on an isolated cumulonimbus cloud development. *Atmos. Res.*, **66**, 123-139.

Das, P., 1969: The thermodynamic equation in cumulus dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 399-409.

Deardorff, J. W., 1975: The development of boundary-layer turbulence models for use in studying the severe storm environment. *Proc. SESAME Meeting*, Boulder, NOAA-ERL, 251-261.

Houze, R. A., 1993: Cloud dynamics. Academic Press.

Kessler, E., 1969: On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circuration. Meteor. Monogr., *Amer. Meteor.Soc.*, **32**, 84 pp.

Klemp J. B. and Robert B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.

Klemp J. B., 1978: A splitting procedure for numerical solution of the compressible equations of motion. ???, ???.

Marshall, J. and W. Palmer, 1948: The distribution of raindrops with size. *J. Meteorol.*, **5**, 165–166.

Mellor, G. L., 1973: Analytic prediction of the properties of stratified planetary surface layers. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1061-1069.

Mellor, G., and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for atmospheric boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791-1806.

中野満寿男, 2003: 鉛直シアーが台風初期渦形成に及ぼす影響. 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 修士論文.

Ogura, Y. and M. Yoshizaki, 1988: Numerical study of orographic-convective precipitation over the eastern Arabic Sea and the Ghats Mountains during the summer monsoon. *J. Atoms. Sci.*, **45**, 2097-2122.

Ogura, Y., and T. Takahashi, 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.

大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徴, 1998: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法. 東京大学出版会, 652.

斉藤和雄 編, 1999: 非静力学モデル. 気象研究ノート 第 196 号, 日本気象学会.

Saunders, P. M., 1957: The thermodynamics of saturated air: A contribution to the classical theory. *Ouart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **83**, 342-350.

Schemm, C. E., and F. Lipps, 1976: Some results from a simplified three-dimensional numerical model of atmospheric turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1021-1041.

Skamarock, Wiliam C. and Joseph B. Klemp, 1992: The stability of time-split methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equation. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.

Soong, S-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axi-symmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893

Tapp, M. C., and P. W. White, 1976: A nonhydrostatic mesoscale model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 277-296.

坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版. http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html

Wilhelmson, R. B., 1977: On the thermodyanmics equation for deep convetion. *Mon. Wea. Rev.*, **105**, 545-547.

Wilhelmson, R. B., and Y. Ogura, 1977: The pressure perturbation and the numerical modleing of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.

付 録A　準圧縮方程式系の導出

A.1　基礎方程式

地球大気における湿潤対流の定式化同様, 大気の乾燥成分と湿潤成分の分子量の差は密度の式には考慮するが, 熱の式には考慮しないような系を考える. この系では大気の熱エネルギーは乾燥大気の熱エネルギーで決まることになる. このような系では温位 θ を保存量として用いることができる.

A.1.1　気温 T, 密度 ρ, 風速 u, v, w を予報変数とする場合

水平鉛直 3 次元大気の状態を, 気温 T, 圧力 p, 風速 u, v, w, 密度 ρ で表現する場合, 基礎方程式系は以下のようになる.

運動方程式

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = Turb.u \tag{A.1}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Turb.v \tag{A.2}$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g + Turb.w \tag{A.3}$$

連続の式

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{A.4}$$

密度の式 (状態方程式)

$$\rho = \frac{p}{R_d T_v} \tag{A.5}$$

熱の式

$$c_{p_d}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho_d}\frac{dp}{dt} = Q + Turb.T \tag{A.6}$$

凝縮成分の混合比保存式

$$\frac{dq_v}{dt} = Src.q_v + Turb.q_v \tag{A.7}$$
$$\frac{dq_c}{dt} = Src.q_c + Turb.q_c \tag{A.8}$$
$$\frac{dq_r}{dt} = Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r \tag{A.9}$$

ここで R_d, c_{p_d}, ρ_d は単位質量当たりの乾燥成分の気体定数, 定圧比熱, 密度であり, Q は非断熱加熱, q_v は気体成分の混合比, q_c は雲水混合比, q_r は雨水混合比である. q_v, q_r, q_c は, 凝縮成分の数だけ存在する. $Turb$, Src, $Fall$ を付けた項はそれぞれ拡散項, 生成消滅項, 落下項を意味する.

密度の式には凝縮成分の混合比が考慮されている.

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_d + \sum\rho_v + \sum\rho_c + \sum\rho_r \\ &= \rho_d(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r).\end{aligned} \tag{A.10}$$

ただし, $q_v = \rho_v/\rho_d$, q_c, q_r はそれぞれ凝縮性気体, 雲水, 雨水の混合比を意味する. ここで乾燥成分の分圧 p_d は.

$$\begin{aligned}p_d &= p\left(1 - \frac{\sum p_v}{p}\right) \\ &= p\left(1 - \frac{\sum p_v}{p_d + \sum p_v}\right) \\ &= p\left(1 - \frac{\sum \rho_v R_v T}{\rho_d R_d T + \sum \rho_v R_v T}\right) \\ &= p\left(1 - \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right)\end{aligned}$$

となるので,

$$\rho_d = \frac{p_d}{R_d T} = \frac{p}{R_d T}\left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right) \tag{A.11}$$

である. 但し M は分子量を表し, 凝縮成分の体積は無視できるものと見なした. (A.10), (A.11) 式より,

$$\rho = \frac{p}{R_d T}\left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right)(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r) \tag{A.12}$$

となる.

$$f \equiv \left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} \right) (1 + \sum q_v + \sum q_x)$$

と定義すると, (A.12) 式は以下のように書ける.

$$\rho = \frac{p}{R_d(T/f)} \quad \text{(A.13)}$$

また, 温位とエクスナー関数を用いて表現すると,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{R_d \pi(\theta/f)} \\ &= \frac{p_0 \pi^{c_{v_d}/R_d}}{R_d(\theta/f)} \end{aligned} \quad \text{(A.14)}$$

である. 但しエクスナー関数 π は $\pi = T/\theta$ の関係を満たす.

温位は乾燥断熱状態における保存量である. 乾燥断熱状態を表す熱力学の式は

$$c_p dT - \alpha dp = 0 \quad \text{(A.15)}$$

である. ここで T は温度, p は圧力, c_p は単位質量当たりの比熱, α は比容である. (A.15) 式の α は, 理想気体の状態方程式を用いると,

$$\alpha = \frac{RT}{p} \quad \text{(A.16)}$$

と書ける. ここで M は分子量, R は気体定数である. (A.15) 式に (A.16) 式を代入し整理すると,

$$\frac{c_p}{T} dT - \frac{R}{p} dp = 0 \quad \text{(A.17)}$$

となる. 凝縮を生じない場合には気塊の組成は変化しないので c_p と R は共に p に依存しない. 一般に c_p は T の関数であるが, **c_p を定数とみなすと**,

$$\begin{aligned} \int_T^{T_0} \frac{1}{T} dT &= \frac{R}{c_p} \int_p^{p_0} \frac{1}{p} dp \\ \ln(T_0/T) &= \frac{R}{c_p} \ln(p_0/p) \\ \theta &= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \end{aligned} \quad \text{(A.18)}$$

となり, 温位が得られる.

A.1.2 温位 θ, 圧力 p, 風速 u, v, w を予報変数とする場合

水平鉛直 3 次元大気の状態を温位 θ, 圧力 p, 風速 u, v, w, 密度 ρ で表現する場合, 基礎方程式系は以下のようになる. CReSS(坪木と榊原, 2001) では, この基礎方程式を用いている.

運動方程式

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = Turb.u \tag{A.19}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Turb.v \tag{A.20}$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g + Turb.w \tag{A.21}$$

圧力方程式

$$\frac{dp}{dt} = \rho {C_s}^2 \left\{ -\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v}\frac{dq_v}{dt} + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c}\frac{dq_c}{dt} + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r}\frac{dq_r}{dt} \right) \right\} \tag{A.22}$$

密度の式 (状態方程式)

$$\rho = \frac{p_0}{R_d \theta_v} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{c_{v_d}/c_{p_d}} \tag{A.23}$$

熱の式

$$\frac{d\theta}{dt} = Q + Turb.\theta \tag{A.24}$$

凝縮成分の混合比の保存式

$$\frac{dq_v}{dt} = Src.q_v + Turb.q_v \tag{A.25}$$

$$\frac{dq_c}{dt} = Src.q_c + Turb.q_c \tag{A.26}$$

$$\frac{dq_r}{dt} = Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r \tag{A.27}$$

ただし温位 θ は

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/c_{p_d}} \tag{A.28}$$

であり, 仮温位 θ_v は,

$$\theta_v \equiv \frac{\theta}{f} \tag{A.29}$$

である. 音速 C_s は

$${C_s}^2 \equiv \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d T_v = \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d \frac{T}{f} \tag{A.30}$$

である. c_{p_d} と c_{vd} はそれぞれ単位質量当たりの乾燥成分の定圧比熱と定積比熱であり, $c_{vd} + R_d = c_{p_d}$ という関係にある.

圧力方程式は密度の式と連続の式を組み合わせることで得られる. まず密度を $\rho = \rho(\theta, p, q_v, q_x)$ として ρ の全微分を求める.

$$\begin{aligned}
d\rho &= d\left[\frac{p_0}{R_d\theta_v}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}}\right] \\
&= d\left[\frac{p_0}{R_d(\theta/f)}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}}\right] \\
&= \frac{p_0}{R_d(\theta/f)}\frac{c_{vd}}{c_{p_d}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-R_d/c_{p_d}}\frac{1}{p_0}dp - \frac{p_0 f}{R_d}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}}\frac{d\theta}{\theta^2} \\
&\quad + \frac{p_0}{R_d\theta}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}}\left\{\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right\} \\
&= \frac{1}{{C_s}^2}dp - \frac{\rho}{\theta}d\theta + \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r
\end{aligned} \tag{A.31}$$

となる. (A.31) 式を圧力の式として整理すると,

$$\frac{dp}{dt} = {C_s}^2\left(\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v - \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c - \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right)$$

であり, 連続の式を用いると,

$$\frac{dp}{dt} = \rho{C_s}^2\left(-\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right)$$

となり, 圧力方程式が得られる.

A.1.3　温位 θ, 無次元圧力 π, 風速 u, v, w を予報変数とする場合

水平鉛直 2 次元大気の状態を温位 θ, 無次元圧力 π, 風速 u, v, w, 密度 ρ で表現する場合, 基礎方程式系は以下のようになる. 連続の式 (A.4) と状態方程式 (A.23) を用いることで得られる圧力方程式を利用する. Klemp and Willhelmson (1978) では, この基礎方程式を用いている.

運動方程式

$$\frac{du}{dt} + c_{p_d}\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial x} = Turb.u \tag{A.32}$$

$$\frac{dv}{dt} + c_{p_d}\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial y} = Turb.v \tag{A.33}$$

$$\frac{dw}{dt} + c_{p_d}\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial z} = -g + Turb.w \tag{A.34}$$

圧力方程式

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{{C_s}^2}{c_{p_d}\rho\theta_v}\left\{-\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}\frac{dq_v}{dt} + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}\frac{dq_c}{dt} + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}\frac{dq_r}{dt}\right)\right\} \tag{A.35}$$

状態方程式

$$\rho = \frac{p_0 \pi^{c_{vd}/R_d}}{R_d\theta_v} \tag{A.36}$$

熱の式

$$\frac{d\theta}{dt} = Q + Turb.\theta \tag{A.37}$$

水蒸気および水物質混合比の式

$$\frac{dq_v}{dt} = Src.q_v + Turb.q_v \tag{A.38}$$

$$\frac{dq_x}{dt} = Src.q_c + Turb.q_c \tag{A.39}$$

$$\frac{dq_x}{dt} = Src.q_r + Fall.q_x + Turb.q_r \tag{A.40}$$

ただし, エクスナー関数 π は,

$$\pi \equiv \frac{T}{\theta} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R_d/c_{p_d}} \tag{A.41}$$

であり, 音速 C_s は

$${C_s}^2 \equiv \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d \pi \theta_v = \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d \pi \left(\frac{\theta}{f}\right) \tag{A.42}$$

である.

運動方程式の圧力勾配は, 温位とエクスナー関数を用いることで得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}dp &= \frac{R_d\pi(\theta/f)}{p} d\left(p_0\pi^{c_{p_d}/R_d}\right) \\
&= \frac{R_d\pi(\theta/f)}{p}\left(\frac{p_0 c_{p_d}}{R_d}\pi^{c_{p_d}/R-1}\right)d\pi \\
&= \frac{R_d\pi(\theta/f)}{p}\left(\frac{c_{p_d}}{R_d}p\pi^{-1}\right)d\pi \\
&= c_{p_d}(\theta/f)d\pi \\
&= c_{p_d}\theta_v d\pi
\end{aligned} \tag{A.43}
$$

圧力方程式は密度の式と連続の式を組み合わせることで得られる. まず密度を $\rho=\rho(\theta,\pi,q_v,q_x)$ として ρ の全微分を計算する.

$$
\begin{aligned}
d\rho &= d\left[\frac{p_0\pi^{c_v/R_d}}{R_d\theta_v}\right] \\
&= d\left[\frac{p_0\pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)}\right] \\
&= \frac{p_0}{R_d(\theta/f)}\pi^{(c_v/R_d-1)}\frac{c_{vd}}{R_d}d\pi - \frac{p_0\pi^{c_v/R_d}f}{R_d}\frac{d\theta}{\theta^2} \\
&\quad + \frac{p_0\pi^{c_v/R_d}}{R_d\theta}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right) \\
&= c_{p_d}(\theta/f)\left(\frac{c_{vd}}{c_{p_d}R_d\pi(\theta/f)}\right)\left(\frac{p_0\pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)}\right)d\pi - \frac{p_0\pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)}\frac{d\theta}{\theta} \\
&\quad + \frac{1}{f}\left(\frac{p_0\pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)}\right)\left(\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right) \\
&= \frac{c_{p_d}\rho(\theta/f)}{{C_s}^2}d\pi - \frac{\rho}{\theta}d\theta + \rho\frac{1}{f}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right) \\
&= \frac{c_{p_d}\rho\theta_v}{{C_s}^2}d\pi - \frac{\rho}{\theta}d\theta + \rho\frac{1}{f}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right)
\end{aligned} \tag{A.44}
$$

となる. (A.44) 式を圧力の式として整理すると,

$$
\frac{d\pi}{dt} = \frac{{C_s}^2}{c_{p_d}\rho\theta_v}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right)\right\} \tag{A.45}
$$

となり, 連続の式を用いると,

$$
\frac{d\pi}{dt} = \frac{{C_s}^2}{c_{p_d}\rho\theta_v}\left\{-\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right)\right\} \tag{A.46}
$$

となり, 圧力方程式が得られる.

A.2 準圧縮方程式系の導出

準圧縮方程式系では, 変数を基本場と擾乱場に分離し, 線形化を行う.

A.2.1 基本場と擾乱場の分離

変数を基本場と擾乱場に分離し, 基本場は静水圧平衡にあると仮定する. この時, 変数は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
u &= u^{'}(x,z,t) \\
v &= v^{'}(x,z,t) \\
w &= w^{'}(x,z,t) \\
\pi &= \bar{\pi}(z) + \pi^{'}(x,z,t) \\
\theta_v &= \bar{\theta_v}(z) + {\theta_v}^{'}(x,z,t) \\
\rho &= \bar{\rho}(z) + \rho^{'}(x,z,t) \\
q_v &= \bar{q_v}(z) + q_v^{'}(x,z,t) \\
q_r &= q_r^{'}(x,z,t) \\
q_c &= q_c^{'}(x,z,t)
\end{aligned}
$$

但し, $\theta_v = \theta/f$ とし, 基本場の風速 u, w と雲粒混合比と雨粒混合はゼロと見なした. そして基本場には静水圧平衡,

$$
\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_{p_d}\bar{\theta}_v} = -\frac{g}{c_{p_d}(\bar{\theta}/\bar{f})} \tag{A.47}
$$

の関係が成り立つものとする.

A.2.2 水平方向の運動方程式の線形化

水平方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} + w'\frac{\partial u'}{\partial z}\right) \\
&\quad -c_{p_d}\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \pi'}{\partial x} + \theta_v{}'\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} + \theta_v{}'\frac{\partial \pi'}{\partial x}\right) + Turb.u \\
\frac{\partial v'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial y} + w'\frac{\partial v'}{\partial z}\right) \\
&\quad -c_{p_d}\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \pi'}{\partial y} + \theta_v{}'\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial y} + \theta_v{}'\frac{\partial \pi'}{\partial y}\right) + Turb.v
\end{aligned}
$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去し, さらに基本場は水平方向には変化しないことを利用すると, 以下の擾乱成分の式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial x} + w'\frac{\partial u'}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi'}{\partial x} + Turb.u \\
&= -\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} + w'\frac{\partial u'}{\partial z}\right) - c_{p_d}\left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\right)\frac{\partial \pi'}{\partial x} + Turb.u \qquad (A.48) \\
\frac{\partial v'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial y} + w'\frac{\partial v'}{\partial z}\right) - c_{p_d}\left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\right)\frac{\partial \pi'}{\partial y} + Turb.v \qquad (A.49)
\end{aligned}
$$

ここで $\bar{f}$ は,

$$
\bar{f} = \left(1 - \frac{\sum \bar{q_v}/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q_v}/M_v}\right)(1 + \sum \bar{q_v}) \qquad (A.50)
$$

である.

A.2.3 鉛直方向の運動方程式の線形化

鉛直方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x} + v'\frac{\partial w'}{\partial y} + w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right) \\
&\quad -c_{p_d}\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \pi'}{\partial z} + \theta_v{}'\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \theta_v{}'\frac{\partial \pi'}{\partial z}\right) - g + Turb.w
\end{aligned}
$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去すると以下となる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x}+v'\frac{\partial w'}{\partial y}+w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\\ &\quad -c_{p_d}\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial\bar{\pi}}{\partial z}+\bar{\theta_v}\frac{\partial\pi'}{\partial z}+\theta_v{}'\frac{\partial\bar{\pi}}{\partial z}\right)-g+Turb.w.\end{aligned}$$

さらに静水圧の式を利用すると以下となる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x}+v'\frac{\partial w'}{\partial y}+w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right)\\ &\quad +c_{p_d}\bar{\theta_v}\left(\frac{g}{c_{p_d}\bar{\theta_v}}\right)-c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial\pi'}{\partial z}+c_{p_d}\theta_v{}'\left(\frac{g}{c_{p_d}\bar{\theta_v}}\right)-g+Turb.w\\ &= -\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x}+v'\frac{\partial w'}{\partial y}+w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right)-c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial\pi'}{\partial z}+\frac{\theta_v{}'}{\bar{\theta_v}}g+Turb.w\end{aligned}$$

ここで $\theta_v{}'$ は,

$$\begin{aligned}\theta_v{}' &= \frac{1}{f}\left\{\theta'-\sum\frac{\theta}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}q_v'-\sum\frac{\theta}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}q_c'-\sum\frac{\theta}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}q_r'\right\}\\ &= \frac{1}{f}\left\{\frac{\theta'}{\theta}-\sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}q_v'-\sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}q_c'-\sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}q_r'\right\} \qquad \text{(A.51)}\end{aligned}$$

であり, (A.51) 式の第 2 項を計算すると,

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}\frac{\partial\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}{\partial q_v}\\ &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}\\ &\quad\left[\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}-\left\{\frac{\sum 1/M_dM_v}{(1/M_d+\sum q_v/M_v)^2}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)\right\}\right]\\ &= \frac{1}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r}-\frac{\sum 1/M_v}{1/M_d+\sum q_v/M_v}\end{aligned}$$

であり, (A.51) 式の第 3 項を計算すると,

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}\frac{\partial\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}{\partial q_c}\\ &= \frac{1}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r}\end{aligned}$$

であり, (A.51) 式の第 4 項を計算すると,

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}\frac{\partial\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}{\partial q_r}\\ &= \frac{1}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r}\end{aligned}$$

となるので,

$$\theta_v{}' = \frac{1}{f}\left\{\frac{\theta'}{\theta} + \frac{\sum q_v'/M_v}{1/M_d + \sum q_v/M_v} - \frac{\sum q_v' + \sum q_c' + \sum q_r'}{1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}\right\} \tag{A.52}$$

である. ここで擾乱成分は平均成分に比べて十分に小さいので, 全量を平均成分に置き換えることで,

$$\theta_v{}' = \frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\left\{\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v'/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v/M_v} - \frac{\sum q_v' + \sum q_c' + \sum q_r'}{1 + \sum \bar{q}_v}\right\} \tag{A.53}$$

となる. これを用いると, 擾乱成分の速度 w の式は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x} + v'\frac{\partial w'}{\partial y} + w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta}_v\frac{\partial \pi'}{\partial z} \\ &\quad + \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v'/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v/M_v} - \frac{\sum q_v' + \sum q_c' + \sum q_r'}{1 + \sum \bar{q}_v}\right) g + Turb.w\end{aligned} \tag{A.54}$$

A.2.4 圧力方程式の線形化

式 (A.35) を線形化する. 変数を平均成分と擾乱成分に分解し, 擾乱成分は平均成分よりも十分小さく, 平均成分は z のみの関数とする. 式 (A.35) 左辺は

$$\text{式 (A.35) 左辺} = \frac{\partial \pi'}{\partial t} + w'\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z}$$

となる.

式 (A.35) 右辺においては音速を以下のように平均成分で表わす.

$$\begin{aligned}C_s{}^2 &= \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d(\bar{\pi} + \pi')\left(\frac{\bar{\theta} + \theta'}{\bar{f} + f'}\right) \\ &\approx \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d\left(\bar{\pi}\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} + \bar{\pi}\frac{\theta'}{\bar{f}} + \pi'\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\right) \\ &= \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d\bar{\pi}\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\pi'}{\bar{\pi}}\right) \\ &\approx \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d\bar{\pi}\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} \equiv \overline{C_s{}^2}\end{aligned} \tag{A.55}$$

また組成の変化に伴う項は, 熱力学の式において行ったように以下のように近似

する.

$$
\begin{aligned}
\sum_i \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_{v_i}}\dot{q_{v_i}} &= \sum_i \frac{1}{f}\left[\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum_j q_{v_j}/M_{v_j}}\right. \\
&\quad \left. -\frac{1/M_d 1/M_{v_i}}{(1/M_d+\sum_j q_{v_j}/M_{v_j})^2}(1+\sum_j q_{v_j}+\sum_j q_{c_j}+\sum_j q_{r_j})\right]\dot{q_{v_i}} \\
&= \sum_i \left[\frac{1}{1+\sum_j q_{v_j}+\sum_j q_{c_j}+\sum_j q_{r_j}} - \frac{1/M_{v_i}}{1/M_d+\sum_j q_{v_j}/M_{v_j}}\right]\dot{q_{v_i}} \\
&= \frac{\sum \dot{q}_v}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r} - \frac{\sum \dot{q}_v/M_v}{1/M_d+\sum q_v/M_v} \\
&\approx \frac{\sum \dot{q}_v}{1+\sum \overline{q_v}} - \frac{\sum \dot{q}_v/M_v}{1/M_d+\sum \overline{q_v}/M_v}, \\
\sum_i \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_{c_i}}\dot{q_{c_i}} &= \sum_i \frac{1}{f}\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum_j q_{v_j}/M_{v_j}}\dot{q_{c_i}} \\
&= \frac{\sum \dot{q}_c}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r} \\
&\approx \frac{\sum \dot{q}_c}{1+\sum \overline{q_v}}, \\
\sum_i \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_{r_i}}\dot{q_{r_i}} &= \sum_i \frac{1}{f}\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum_j q_{v_j}/M_{v_j}}\dot{q_{r_i}} \\
&= \frac{\sum \dot{q}_r}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r} \\
&\approx \frac{\sum \dot{q}_r}{1+\sum \overline{q_v}}.
\end{aligned}
$$

これらを用いると,

$$
\frac{\partial \pi'}{\partial t}+w'\frac{\partial \overline{\pi}}{\partial z} = \frac{\overline{C_s^2}}{c_{p_d}\overline{\theta}_v}\left\{-\nabla\cdot\boldsymbol{u}' + \frac{\dot{\theta}}{\overline{\theta}} - \left(\frac{\sum \dot{q}_v+\sum \dot{q}_c+\sum \dot{q}_r}{1+\sum \overline{q_v}}. - \frac{\sum \dot{q}_v/M_v}{1/M_d+\sum \overline{q_v}/M_v}\right)\right\}. \tag{A.56}
$$

左辺の基本場の移流項と右辺の発散項は以下のようにまとめる

$$
\begin{aligned}
-w'\frac{\partial\bar{\pi}}{\partial z} - \frac{\overline{C_s^2}}{c_{p_d}\overline{\theta_v}}\nabla\cdot\boldsymbol{u}' &= -w^{'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar{\rho}R_d(\bar{\theta}/\bar{f})}{p_0}\right)^{R_d/c_{vd}} - \frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}(\bar{\theta}/\bar{f})}\nabla\cdot\boldsymbol{u}' \\
&= -w^{'}\frac{R_d}{c_{vd}}\bar{\pi}\frac{1}{\left(\frac{\bar{\rho}R_d(\bar{\theta}/\bar{f})}{p_0}\right)}\frac{R_d}{p_0}\frac{\partial\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})}{\partial z} - \frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}(\bar{\theta}/\bar{f})}\nabla\cdot\boldsymbol{u}' \\
&= -\frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2}\left\{w^{'}\frac{\partial\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})}{\partial z} + \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})\nabla\cdot\boldsymbol{u}'\right\} \\
&= -\frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2}\nabla\cdot\left\{\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})\boldsymbol{u}'\right\}
\end{aligned}
$$

以上より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\pi^{'}}{\partial t} &= -\frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2}\nabla\cdot\left\{\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})\boldsymbol{u}'\right\} \\
&\quad + \frac{\overline{C_s^2}}{c_{p_d}\overline{\theta_v}}\left\{\frac{\dot{\theta}}{\bar{\bar{\theta}}} - \left(\frac{\sum\dot{q}_v + \sum\dot{q}_c + \sum\dot{q}_r}{1+\sum\overline{q_v}}. - \frac{\sum\dot{q}_v/M_v}{1/M_d + \sum\overline{q_v}/M_v}\right)\right\} \quad \text{(A.57)}
\end{aligned}
$$

Klemp and Wilhelmson (1978) における近似

Klemp and Wilhelmson (1978) では, 非断熱的な加熱による熱膨張と凝縮に伴う圧力変化を無視し,

$$
\frac{d\pi}{dt} = -\frac{{C_s}^2}{c_{p_d}(\theta/f)}\nabla\cdot\boldsymbol{u}
$$

として定式化している.

A.2.5 熱の式の線形化

熱の式を平均成分と擾乱成分に分離する.

$$
\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta^{'})}{\partial t} = -u^{'}\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta^{'})}{\partial x} - v^{'}\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta^{'})}{\partial y} - w^{'}\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta^{'})}{\partial z} + Q + Turb.(\bar{\theta}+\theta^{'})
$$

ここで平均場の量は z の関数であることを用いると,

$$
\frac{\partial\theta^{'}}{\partial t} = -\left(u^{'}\frac{\partial\theta^{'}}{\partial x} + v^{'}\frac{\partial\theta^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial\theta^{'}}{\partial z}\right) - w^{'}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} + Q + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta^{'} \quad \text{(A.58)}
$$

となる.

A.2.6 混合比の保存式の線形化

凝縮成分の混合比の保存式についても, 変数を平均成分と擾乱成分に分離する. 熱の式と同様に, 以下のように書ける. 但し, 生成項, 落下項は擾乱成分のみ存在すると仮定する. この仮定は平均場では凝縮は生じていないと考えることに等しい.

$$\frac{\partial q_v^{'}}{\partial t} = -\left(u^{'}\frac{\partial q_v^{'}}{\partial x} + v^{'}\frac{\partial q_v^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial q_v^{'}}{\partial z}\right) - w^{'}\frac{\partial \bar{q_v}}{\partial z}$$
$$+Src.q_v^{'} + Turb.\bar{q_v} + Turb.q_v^{'}, \tag{A.59}$$
$$\frac{\partial q_c^{'}}{\partial t} = -\left(u^{'}\frac{\partial q_c^{'}}{\partial x} + v^{'}\frac{\partial q_c^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial q_c^{'}}{\partial z}\right) + Src.q_c^{'} + Turb.q_c^{'}, \tag{A.60}$$
$$\frac{\partial q_r^{'}}{\partial t} = -\left(u^{'}\frac{\partial q_r^{'}}{\partial x} + v^{'}\frac{\partial q_r^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial q_r^{'}}{\partial z}\right) + Src.q_r^{'} + Fall.q_r^{'} + Turb.q_r^{'} \tag{A.61}$$

但し雲水量と雨水量は擾乱成分のみの量である.

A.3 まとめ

準圧縮方程式系は以下のようにまとめられる. ただし, 擾乱を示す $'$ は除いた.

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.u \tag{A.62}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi}{\partial y} + Turb.v \tag{A.63}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.w$$
$$+\left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q_v}/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1+\sum \bar{q_v}}\right) g \tag{A.64}$$

圧力方程式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2}\nabla\cdot\left\{\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})\boldsymbol{u}\right\}$$
$$+\frac{\overline{C_s^2}}{c_{p_d}\overline{\theta_v}}\left\{\frac{\dot{\theta}}{\bar{\theta}} - \left(\frac{\sum \dot{q}_v + \sum \dot{q}_c + \sum \dot{q}_r}{1+\sum \overline{q_v}}. - \frac{\sum \dot{q}_v/M_v}{1/M_d + \sum \overline{q_v}/M_v}\right)\right\} \tag{A.65}$$

熱の式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} + w\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - w\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + Q + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta \quad (A.66)$$

凝縮成分の混合比の保存式

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_v}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_v}{\partial x} + v\frac{\partial q_v}{\partial y} + w\frac{\partial q_v}{\partial z}\right) - w\frac{\partial \bar{q_v}}{\partial z} \\ &\quad + Src.q_v + Turb.\bar{q_v} + Turb.q_v, \quad (A.67)\\ \frac{\partial q_c}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x} + v\frac{\partial q_c}{\partial y} + w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right) + Src.q_c + Turb.q_c, \quad (A.68)\\ \frac{\partial q_r}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_r}{\partial x} + v\frac{\partial q_r}{\partial y} + w\frac{\partial q_r}{\partial z}\right) + Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r \quad (A.69)\end{aligned}$$

A.4 準圧縮方程式系のエネルギー方程式

準圧縮方定式におけるエネルギー方程式を導出する．ただしここでは乾燥大気を想定し, 凝結に関する項を無視する.

乾燥大気の場合, 準圧縮方程式の連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\overline{\rho}\boldsymbol{u} = 0 \quad (A.70)$$

である．この式より任意のスカラー量 ϕ に対し

$$\overline{\rho}\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \overline{\rho}\phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\rho}\phi\boldsymbol{u}) + \phi\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (A.71)$$

が成り立つ．この式から準圧縮方程式では ϕ の時間微分をフラックス形式で書くことができないことがわかる[1].

水平方向の運動方程式 (A.62), 鉛直方向の運動方程式 (A.64) より,

$$\frac{\partial \overline{\rho}K}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\rho}K\boldsymbol{u}) = -c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi + \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} + \overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}}gw - K\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (A.72)$$

となる．ここで $K = (u^2 + w^2)/2$, $\boldsymbol{D} = (D_u, D_w)$ とおいた．以降では式 (A.72) の右辺第一項と右辺第三項を変形していく.

[1] $\partial\phi/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi = 0$ が成り立たないということ.

まず式 (A.72) の右辺第三項は以下のように変形される.

$$
\begin{aligned}
\overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\theta}}gw &= \overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\theta}}g\frac{dz}{dt} \\
&= \overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\theta}}\frac{d(gz)}{dt} \\
&= \overline{\rho}\left\{\frac{1}{\overline{\theta}}\frac{d(\theta gz)}{dt} - \frac{gz}{\overline{\theta}}\frac{d\theta}{dt}\right\} \\
&= \frac{\overline{\rho}}{\overline{\theta}}\frac{d(\theta gz)}{dt} - \frac{gz}{\overline{\theta}}\left\{\frac{\partial\overline{\rho}\theta}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\rho}\theta\boldsymbol{u}) + \theta\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\}. \qquad \text{(A.73)}
\end{aligned}
$$

式 (A.73) の右辺第二項を変形する. 熱力学の式 (A.66) は, 凝結がない場合,

$$
\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta - w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} + Q + D_\theta \qquad \text{(A.74)}
$$

と表される. 両辺に $\overline{\rho}$ をかけて, 式 (A.70) を用いて変形すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\rho}\theta}{\partial t} &= -\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta - \overline{\rho}w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} + Q + D_\theta \\
&= -\nabla\cdot(\overline{\rho}\theta\boldsymbol{u}) + \theta\nabla\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}) - \overline{\rho}w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} + \overline{\rho}(Q + D_\theta) \\
&= -\nabla\cdot(\overline{\rho}\theta\boldsymbol{u}) - \theta\frac{\partial\rho}{\partial t} - \overline{\rho}w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} + \overline{\rho}(Q + D_\theta) \qquad \text{(A.75)}
\end{aligned}
$$

となる. また式 (A.73) の右辺第一項は, 式 (A.71) より,

$$
\overline{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta gz}{\overline{\theta}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\rho}\theta gz}{\overline{\theta}}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\overline{\rho}\theta gz}{\overline{\theta}}\boldsymbol{u}\right) + \frac{\theta gz}{\overline{\theta}}\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad \text{(A.9-2)}
$$

となる. よって式 (A.72) の右辺第三項は,

$$
\overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\theta}}gw = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\rho}\theta gz}{\overline{\theta}}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\overline{\rho}\theta gz}{\overline{\theta}}\boldsymbol{u}\right) + \frac{\theta gz}{\overline{\theta}}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left\{w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - Q - D_\theta\right\} \qquad \text{(A.76)}
$$

と変形される.

式 (A.72) の右辺第一項は以下のように変形される.

$$
-c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi = -\nabla\cdot(c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\Pi\boldsymbol{u}) + c_p\Pi\nabla\cdot(\overline{\theta}\overline{\rho}\boldsymbol{u}). \qquad \text{(A.77)}
$$

凝結がないときの圧力方程式 (A.65) は,

$$
\frac{\partial\Pi}{\partial t} = -\frac{\overline{C_s^2}}{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}\nabla\cdot(\overline{\rho}\overline{\theta}\boldsymbol{u}) \qquad \text{(A.78)}
$$

と表される. よって式 (A.77) は,

$$
\begin{aligned}
-c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi &= -\nabla\cdot(c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\Pi\boldsymbol{u}) - c_p\Pi\frac{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}{\overline{c}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial t} \\
&= -\nabla\cdot(c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\Pi\boldsymbol{u}) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\overline{\rho}}{2}\left(\frac{c_p\overline{\theta}\Pi}{\overline{c}}\right)^2\right\} \qquad \text{(A.79)}
\end{aligned}
$$

と書き換えられる.

したがって, 式 (A.72) は,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}K) + \nabla\cdot(\overline{\rho}K\boldsymbol{u}) = -\nabla\cdot(c_p\overline{\theta\theta}\Pi\boldsymbol{u}) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\overline{\rho}}{2}\left(\frac{c_p\overline{\theta}\Pi}{\overline{c}}\right)^2\right\} + \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\rho}\theta gz}{\overline{\theta}}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\overline{\rho}\theta gz}{\overline{\theta}}\boldsymbol{u}\right) + \frac{\theta gz}{\overline{\theta}}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left\{w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - Q - D_\theta\right\} - K\frac{\partial\rho}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となり, これをさらに整理すると,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{\rho}\left\{K - \frac{\theta}{\overline{\theta}}gz + \frac{1}{2}\left(\frac{c_p\overline{\theta}\Pi}{\overline{c}}\right)^2\right\}\right] + \nabla\cdot\left\{\overline{\rho}\left(K - \frac{\theta}{\overline{\theta}} + c_p\overline{\theta}\Pi\right)\boldsymbol{u}\right\} \\
&\qquad = \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left\{w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - Q - D_\theta\right\} - \left(K - \frac{\theta}{\overline{\theta}}gz\right)\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad \text{(A.80)}
\end{aligned}
$$

となる. この両辺を全領域で積分し, 境界面を出入りする流れはないとすれば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int\overline{\rho}\left\{K - \frac{\theta}{\overline{\theta}}gz + \frac{1}{2}\left(\frac{c_p\overline{\theta}\Pi}{\overline{c}}\right)^2\right\}dV \\
&= \int\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D}dV + \int\frac{\overline{\rho}wgz}{\overline{\theta}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}dV - \int\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}QdV - \int\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}D_\theta dV \\
&\quad - \int\left(K - \frac{\theta}{\overline{\theta}}gz\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}dV \qquad \text{(A.81)}
\end{aligned}
$$

となる. これが準圧縮方程式のエネルギー方程式である. 左辺は全エネルギーの時間変化であり, { } 内の第一項, 第二項, 第三項はそれぞれ運動エネルギー, 浮力による位置エネルギー, 弾性エネルギーである.

右辺第一項, 第二項, 第三項, 第四項はそれぞれ運動量の拡散, 基本場の鉛直温位勾配, 非断熱加熱 (放射, 散逸), 熱の拡散によるエネルギー変化率である. 右辺最後の項は準圧縮方程式の場合スカラー量の時間微分がフラックス形式で書けないことによることにより現れる. この項の存在により準圧縮方程式では強制項がない場合でもエネルギーが保存しない.

付 録B　乱流パラメタリゼーション

B.1　乱流パラメタリゼーション

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS で用いられている 1.5 次のクロージャーを用いる. このとき乱流運動エネルギーの時間発展方程式は,

$$\frac{dE}{dt} = B + S + D_E - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right) E^{\frac{3}{2}} \tag{B.1}$$

と与えられる. l は混合距離で, $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする. B と S はそれぞれ浮力と流れの変形速度による乱流エネルギー生成項, D_E は乱流エネルギー拡散項, 第 4 項は乱流エネルギーの消散項であり,

$$B = \frac{g_j}{\overline{\theta}}\overline{u_j'\theta'}, \tag{B.2}$$

$$S = -\overline{(u_i'u_j')}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{B.3}$$

$$D_E = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x_j}\right) \tag{B.4}$$

である. 1.5 次のクロージャーでは, レイノルズ応力を以下のように定義する.

$$\overline{(u_i'u_j')} = -K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{3}\delta_{ij}E, \tag{B.5}$$

$$\overline{u_j'\theta} = -K_h\frac{\partial \theta}{\partial x_j}. \tag{B.6}$$

ここで K_m は運動量に対する渦粘性係数であり, E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー, K_h は渦拡散係数である. K_m, K_h は E を用いて以下のように与えられる.

$$K_m = C_m E^{\frac{1}{2}} l, \tag{B.7}$$

$$K_h = 3K_m. \tag{B.8}$$

パラメータ C_ε, C_m はともに 0.2 である. a

B.1.1 乱流運動エネルギー方程式の導出

Klemp and Wilhelmson (1978) では (B.1) について,「Deardroff (1975), Mellor and Yamada (1974), Schemm and Lipps (1976) で用いられている式と類似のものである」とだけ記述され, その導出の詳細については解説されていない. それゆえ大気大循環モデルでよく用いられている Mellor and Yamada (1974, 1982) のパラメタリゼーションとの対応が不明瞭である. そこで以下では Mellor and Yamada (1973, 1974) の定式化の手順に沿って式 (B.1), (B.5), (B.6) の導出を行う.

考えているサブグリッドスケール内において, 密度は一定, 動粘性係数や拡散係数などの物理定数は一定とする. 出発点となる方程式は, Mellor and Yamada (1973) の式 (7) および (8)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_k' u_i' u_j'} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i' u_j'}\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p u_i'} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p u_j'} + f_k(\varepsilon_{jkl}\overline{u_l' u_i'} + \varepsilon_{ikl}\overline{u_l' u_j'}) \\
&= -\overline{u_k' u_i'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u_k' u_j'}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta(g_j \overline{u_i' \theta} + g_i \overline{u_j' \theta}) \\
&+ \overline{p\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}, \qquad \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u_j' \theta'}}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k \overline{\theta' u_j'} + \overline{u_k' u_j' \theta'} - \alpha \overline{u_j' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} - \nu \overline{\theta' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p\theta'} + \varepsilon_{jkl} f_k \overline{u_l' \theta'} \\
&= -\overline{u_j' u_k'}\frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \overline{\theta' u_k'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \beta g_j \overline{(\theta')^2} + \overline{p\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} - (\alpha + \nu)\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}. \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}
$$

および, (B.9) において $i = j$ とした式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q^2}{\partial t} + u_k \frac{\partial q^2}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_k' u_j' u_j'} - \nu \frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right) &= -\overline{u_j' u_k'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{p u_j'} \\
&\quad + g_j \beta \overline{u_j' \theta'} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right)} \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
q &\equiv \sqrt{\overline{(u_i')^2}} \\
&= \sqrt{2E}
\end{aligned}
$$

で, ν, α, β はそれぞれ動粘性係数, 拡散係数および熱膨張率, g_j は重力加速度ベクトルの第 j 成分である.

(B.9) および (B.10) に現れる圧力に関する相関項および 3 次の相関量については以下の仮定をおく.

1. $\overline{p\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}$ (圧力による運動エネルギーの再分配)

$$= -\frac{q}{3l_1}(\overline{u_i'u_j'} - \frac{\delta_{ij}}{3}q^2) + Cq^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

とおく. ここで l_1 は乱流の特徴的なスケール, C は無次元の定数である.

2. $\overline{p\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}$ (圧力による熱エネルギー再分配)

1. の導出と同様の考察によって,

$$= -\frac{q}{3l_2}\overline{u_i'\theta'}$$

とおく. ここでの乱れのスケールは l_2 とする.

3. $2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$ (粘性による散逸)

粘性に関与するような小スケールの現象は等方的とみて q のみで表現する.

$$= \frac{2}{3}\frac{q^3}{\Lambda_1}\delta_{ij}.$$

ここで Λ_1 は粘性の及ぶ特徴的スケールである.

4. $(\alpha+\nu)\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}$

$$= 0$$

とおく.

5. $\overline{u_k'u_i'u_j'}, \overline{u_k'u_j'\theta'}, \overline{u_k'(\theta')^2}$

速度変動による $\overline{u_k'u_i'u_j'}, \overline{u_k'u_j'\theta'}, \overline{u_k'(\theta')^2}$ と考え次のようにおく.

$$\begin{aligned}
\overline{u_k'u_i'u_j'} &= -q\lambda_1\left(\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}+\frac{\partial\overline{u_i'u_k'}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j'u_j'}}{\partial x_i}\right),\\
\overline{u_k'u_j'\theta'} &= -q\lambda_2\left(\frac{\partial\overline{u_k'\theta'}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j'\theta'}}{\partial x_k}\right),\\
\overline{u_k'(\theta')^2} &= -q\lambda_3\frac{\partial\overline{(\theta')^2}}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

ここで $\lambda_i (i=1,2,3)$ はそれぞれの特徴的スケールである.

6. $\overline{pu_i'}, \overline{p\theta'}$ (圧力変動による拡散)

$$\overline{pu_i'} = \overline{p\theta'} = 0$$

とする．この近似は Deardroff (1975), Schemm and Lipps (1976) でも行われている．

7. $f_k(\varepsilon_{jkl}\overline{u_l'u_i'} + \varepsilon_{ikl}\overline{u_l'u_j'})$, $f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u_l'\theta'}$ (コリオリ項)

$$f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u_l'u_i'} = f_k\varepsilon_{ikl}\overline{u_l'u_j'} = 0,$$
$$f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u_l'\theta'} = 0$$

とする．この近似は Deardroff (1975), Schemm and Lipps (1976) でも行われている．

8. $\alpha\overline{u_j'\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}}$, $\nu\overline{\theta'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$

$$= 0 \tag{B.12}$$

とする．

以上の近似を (B.9), (B.10), (B.11) に対して行うと, 以下の式を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{u_i'u_j'}}{dt} &- \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_1\left(\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k} + \frac{\partial\overline{u_i'u_k'}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j'u_i'}}{\partial x_i}\right) - \nu\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'}\right] \\
&= -\overline{u_k'u_i'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u_k'u_j'}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta(g_j\overline{u_i'\theta'} + g_i\overline{u_j'\theta'}) \\
&\quad -\frac{q}{3l_1}(\overline{u_i'u_j'} - \frac{\delta_{ij}}{3}q^2) + Cq^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{q^3}{\Lambda_1}\delta_{ij}, \qquad \text{(B.13)} \\
\frac{d\overline{u_j'\theta'}}{dt} &- \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_2\left(\frac{\partial\overline{u_k'\theta'}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j'\theta'}}{\partial x_k}\right)\right] \\
&= -\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} - \overline{\theta'u_k'}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k} - \beta g_j\overline{(\theta')^2} - \frac{q}{3l_2}\overline{u_j'\theta'}, \qquad \text{(B.14)} \\
\frac{dq^2}{dt} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_1\left(2\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + \frac{\partial\overline{u_j'u_k'}}{\partial x_j}\right) - \nu\frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right] \\
&= -2\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + 2g_j\beta\overline{u_j'\theta'} - 2\frac{q^3}{\Lambda_1} \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

である. これらは Mellor and Yamada (1974) の Level 4 モデルの式に対応する式である.

式 (B.13), (B.14), (B.15) に対し, さらに以下の近似を加える.

- 式 (B.13) は, 右辺の第 4 項と第 5 項だけ考慮する. さらに (B.16) では $C = 1/3$ とする.
- 式 (B.14) は, 右辺の第 1 項と第 4 項だけ考慮する. さらに $\overline{u_j' u_k'} \sim q^2 \delta_{jk}/3$ とする.
- 式 (B.15) は, 左辺の 3 次相間項を無視する.

これらの近似を行うと, 式 (B.13), (B.14), (B.15) は

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 - q l_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{B.16}$$

$$\overline{u_j' \theta'} = -q l_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \tag{B.17}$$

$$\frac{dq^2}{dt} = -2\overline{u_j' u_k'} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + 2 g_j \beta \overline{u_j' \theta'} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right] - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} \tag{B.18}$$

となる. (B.16) は Mellor and Yamada (1974) の Level 1 モデルの $\overline{u_i' u_j'}$ の式である. (B.17) は Mellor and Yamada (1974) の Level 1 モデルの $\overline{u_j' \theta'}$ の式で $\overline{(\theta')^2}$ の項を無視したものに対応する. (B.18) は Mellor and Yamada (1974) の Level 3 モデルの q^2 の式において, 3 次相関項を無視し粘性拡散項を残したものに対応する.

$q l_1 = K_m, q l_2 = K_h$ とし, q を E で表し動粘性係数を乱流拡散係数で置き換えると

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3} \delta_{ij} E - K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{B.19}$$

$$\overline{u_j' \theta'} = -K_h \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \tag{B.20}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\overline{u_j' u_k'} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + g_j \beta \overline{u_j' \theta'} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[K_m \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right] - \frac{2^{3/2}}{\Lambda_1} E^{3/2} \tag{B.21}$$

となる. 理想気体の場合 $\beta = 1/\theta$ であることに注意すると, 式 (B.21) は散逸項の係数を除き (B.1) に一致する.

以上より, Klemp and Wilhelmson (1978) の乱流パラメタリゼーションは, Mellor and Yamada (1974) の Level 3 モデルと Level 1 モデルとを組みあわせたものと理

解することができる. Klemp and Wilhelmson (1978) と同様に乱流運動エネルギーのみ予報し他の相関量は診断的に求めるモデルとして Mellor and Yamada (1974) の Level 2.5 モデルがある. しかし Level 2.5 モデルは Level 3 モデルと Level 2 モデルとの組合せであることに注意が必要である.

B.1.2　乱流拡散係数を用いた表現

(B.1) 式を (B.7) 式を用いて K_m に関する式に変形する. まず (B.1) 式右辺の各項を書き下す. 浮力による乱流エネルギー生成項は,

$$B = \frac{g_j}{\overline{\theta}}\overline{u_j'\theta'} = -\frac{g}{\overline{\theta}}\overline{w'\theta'} = -\frac{g}{\overline{\theta}}\left(K_h\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \tag{B.22}$$

である. 次に流れの変形速度による乱流エネルギー生成項 S は,

$$\begin{aligned}
S &= -\overline{(u_i'u_j')}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \left\{K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad +K_m\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+K_m\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\
&\quad -\frac{2}{3}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{B.23}$$

である. 乱流エネルギー拡散項 D_E は,

$$\begin{aligned}
D_E &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x_j}\right), \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{B.24}$$

である．以上の (B.22), (B.23), (B.24) 式を (B.1) 式に代入することで以下の式を得る．

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= -\frac{g}{\overline{\theta}}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) + 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad + K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad - \frac{2}{3}E\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right) \\
&\quad - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
\tag{B.25}
$$

(B.25) 式を (B.7) を用いて K_m に関する式に変形する．乱流エネルギー拡散項は

$$
\begin{aligned}
D_E &= \frac{1}{C_m^2 l^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial K_m^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_m\frac{\partial K_m^2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial K_m^2}{\partial z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{C_m^2 l^2}\left\{K_m\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial K_m}{\partial x}\frac{\partial K_m^2}{\partial x} + K_m\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial K_m}{\partial y}\frac{\partial K_m^2}{\partial y}\right. \\
&\quad \left. + K_m\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} + \frac{\partial K_m}{\partial z}\frac{\partial K_m^2}{\partial z}\right\} \\
&= \frac{K_m}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right) \\
&\quad + \frac{2K_m}{C_m^2 l^2}\left\{\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2\right\}
\end{aligned}
\tag{B.26}
$$

となるので, (B.25) 式を変形すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{2K_m}{C_m^2 l^2}\frac{dK_m}{dt} &= -\frac{g}{\overline{\theta}}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) + 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad + K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad - \frac{2}{3}\frac{K_m^2}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\quad + \frac{K_m}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right) \\
&\quad + \frac{2K_m}{C_m^2 l^2}\left\{\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad - \frac{C_\varepsilon}{C_m^3 l^4}K_m^3.
\end{aligned} \tag{B.27}
$$

係数を整理すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K_m}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial K_m}{\partial x} + v\frac{\partial K_m}{\partial y} + w\frac{\partial K_m}{\partial z}\right) - \frac{gC_m^2 l^2}{2\overline{\theta}}\frac{K_h}{K_m}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \\
&\quad + \left(C_m^2 l^2\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad + \frac{C_m^2 l^2}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad - \frac{K_m}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2 - \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2}K_m^2
\end{aligned}
$$

となる. $C_m = C_\varepsilon = 0.2$ と $K_h = 3K_m$ という関係を用いると以下の式を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K_m}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial K_m}{\partial x} + v\frac{\partial K_m}{\partial y} + w\frac{\partial K_m}{\partial z}\right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\overline{\theta}}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \\
&\quad + \left(C_m^2 l^2\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad + \frac{C_m^2 l^2}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad - \frac{K_m}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{2l^2}K_m^2.
\end{aligned} \tag{B.28}
$$

付 録C 雲微物理過程

本モデルで用いている雲微物理パラメタリゼーション (Kessler, 1969) の, 雲水の衝突併合による雨水混合比の変化率 CL_{cr} と, 蒸発による雨水混合比の変化率 EV_{rv} について解説する[1].

C.1 雲水の衝突併合

雲水の衝突併合による雨水混合比の変化率 CL_{cr} は, 直径 D の単一の雨粒の衝突併合による質量変化率 $(dm(D)/dt)_{cr}$ と D から $D+dD$ の範囲の直径を持つ雨粒の数 N_D を用いて

$$CL_{cr} = \frac{1}{\rho_d}\int_0^\infty \left(\frac{dm}{dt}\right)_{cr} N_D\, dD \tag{C.1}$$

と表される. $(dm(D)/dt)_{cr}$ は,

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{cr} = \frac{\pi}{4}D^2 V E \rho_d q_c \tag{C.2}$$

と表される. ここで V は雨粒の落下速度, E は雨粒と衝突した雲粒のうち雨粒に併合される割合を表す係数 (捕捉係数) である.

Kessler (1969) では, 雨粒のサイズ分布関数と雨粒の落下速度 V を以下のように仮定する.

$$N_D = N_0 \exp(-\lambda D), \tag{C.3}$$
$$V = 130 D^{0.5}. \tag{C.4}$$

ここで N_0, λ はパラメータである. 式 (C.4) の分布は一般にマーシャル・パルマー型分布 (Marshall and Palmer, 1948) と呼ばれる. Kessler (1969) では $N_0 = 10^7$ と

[1]本章の内容は浅井 (1983) の解説を参考にした.

する. これを式 (C.1) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
CL_{cr} &= \frac{130\pi}{4} E N_0 q_c \int_0^\infty D^{2.5} \exp(-\lambda D)\, dD & \text{(C.5)}\\
&= 32.5\pi E N_0 q_c \frac{3.75}{\lambda^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \\
&= 60.9375 \pi^{3/2} E N_0 q_c \lambda^{-3.5} & \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

を得る. ここで E は D によらないと仮定した. Kessler (1969) では $E = 1$ とする.

雨粒のサイズ分布曲線の傾きを表すパラメータ λ は, 以下の式を用いて雨水混合比 q_r で置き換える.

$$
\begin{aligned}
q_r &= \frac{1}{\rho_d} \int_0^\infty \rho_w \frac{\pi}{6} D^3 N_D \, dD \\
&= \frac{\pi N_0 \rho_w}{6\rho_d} \int_0^\infty D^3 \exp(-\lambda D)\, dD \\
&= \frac{\pi N_0 \rho_w}{6\rho_d} \frac{6}{\lambda^4} \\
&= \frac{\pi N_0 \rho_w}{\rho_d} \lambda^{-4}. & \text{(C.7)}
\end{aligned}
$$

ここで ρ_w は水の密度 (10^3 kg/m^3) である. これを λ について解き, 式 (C.6) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
CL_{cr} &= 60.9375 \pi^{\frac{5}{8}} \rho_w^{-\frac{7}{8}} E N_0^{\frac{1}{8}} q_c (\rho_d q_r)^{\frac{7}{8}} \\
&= 0.295 \times 10^{-4} E N_0^{0.125} q_c (\rho_d q_r)^{0.875} \\
&= 2.2 q_c (\rho_d q_r)^{0.875} & \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

となる. 最後の式変形では, $N_0 = 10^7, E = 1$ を代入した.

C.2 雨水の蒸発

蒸発による雨水混合比の変化率 EV_{rv} は, 式 (C.1) と同様に

$$
EV_{rv} = \frac{1}{\rho_d} \int_0^\infty \left(\frac{dm}{dt} \right)_{ev} N_D \, dD \qquad \text{(C.9)}
$$

と表される. ここで $(dm(D)/dt)_{ev}$ は直径 D の単一の雨粒の蒸発による質量変化率である.

雨水の蒸発は雨粒の表面からの水蒸気の拡散によって律速されると仮定する. 雨粒周囲の水蒸気フラックスを F とすると, 雨粒の質量の変化率は

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d^2 F(r_d) \tag{C.10}$$

と表される. ここで r は雨粒中心からの距離, r_d は雨粒の半径で, F は

$$F = -K_d \frac{d\rho_v}{dr}$$

と表される. ρ_v は水蒸気の密度, K_d は水蒸気の拡散係数である. 雨粒の周囲では水蒸気フラックスの収束発散はないと仮定すると,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F\right) = 0$$

が成り立つ. これを積分し

$$\rho_v = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

境界条件 $r = r_d$ で $\rho_v = \rho_{v,s}$, $r = \infty$ で $\rho_v = \rho_{v,\infty}$ を適用すると,

$$C_1 = (\rho_{v,\infty} - \rho_{v,s}) r_d, \quad C_2 = \rho_{v,\infty}$$

これより, 雨粒表面での拡散による水蒸気フラックスは

$$\begin{aligned} F(r_d) &= -K_d \left.\frac{d\rho_v}{dr}\right|_{r=r_d} \\ &= K_d \frac{\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}}{r_d} \end{aligned} \tag{C.11}$$

よって,

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) \tag{C.12}$$

と表される. 雨粒が落下しながら蒸発する場合には, K_d に補正項のついた

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d \left(1 + \frac{Fr}{s}\right) K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) \tag{C.13}$$

が用いられる. ここで F は換気因子, s は雨粒表面でのクヌーセン層の厚さである[2].

Kessler (1969) では, (C.13) の右辺の項を以下のように近似する.

$$\begin{aligned} 4\pi r_d \left(1 + \frac{Fr}{s}\right) &\sim 2.24 \times 10^3 D^{1.6}, \\ K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) &\sim 10^{-5} (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}). \end{aligned}$$

[2] この式の導出は要確認.

このとき (C.13) は

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} \sim -2.24 \times 10^{-2}(\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty})D^{1.6} \tag{C.14}$$

となる．これを式 (C.9) に代入し，雨粒のサイズ分布として (C.4) を仮定すると，

$$\begin{aligned}
EV_{rv} &= -\frac{1}{\rho_d}2.24 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})\int_0^\infty D^{1.6}N_D\,dD, \\
&= -2.24 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})\int_0^\infty D^{1.6}N_0\exp(-\lambda D)\,dD \\
&= -2.24 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})N_0\frac{\Gamma(2.6)}{\lambda^{13/5}} \\
&= -2.24 \times 10^{-2}\Gamma(2.6)(\pi\rho_w)^{-0.65}N_0^{0.35}(q_{v,s} - q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65} \\
&= -1.7 \times 10^{-4}N_0^{0.35}(q_{v,s} - q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65} \\
&= -4.81 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65}
\end{aligned} \tag{C.15}$$

最後の式変形を行う際には (C.7) 式の関係を用いて λ を消去し，$\Gamma(2.6) = 1.4296245$，$N_0 = 10^7$ とした[3]．

[3]Kessler (1969) では最終的には

$$EV_{rv} = 4.85 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65}$$

としている．

付 録 D　変数リスト

C_ε : 乱流拡散係数のための定数
C_m : 乱流拡散係数のための定数
c : 音波
$\bar{c}$: 基本場の音波
c_p : 定圧比熱
c_v : 定積比熱
D_{u_i} : x_i 成分の運動方程式におけるサブグリッドスケールの乱流拡散項
D_θ : 熱力学の式におけるサブグリッドスケールの乱流拡散項
E : サブグリッドスケールの運動エネルギー
f : コリオリパラメータ
g : 重力加速度
K_h : 熱に対する乱流拡散係数
K_m : 運動量に対する乱流拡散係数
l : 混合距離
p : 圧力
$\overline{p}$: 基本場の圧力
p_0 : 地表面での基準圧力
Π : エクスナー関数
$\overline{\Pi}$: 基本場のエクスナー関数
π : エクスナー関数の偏差
q_v : 凝結成分気体混合比
q_c : 雲水混合比
q_r : 雨水混合比
R_d : 乾燥空気の気体定数
$\overline{\rho}$: 基本場の密度
ρ_0 : 地表面での密度
t : 時間座標
$\overline{T}$: 基本場の温度
$\overline{\theta}$: 基本場の温位
θ : 温位偏差
u_i : 速度, $i = 1, 3$ $(u_1, u_3) = (u, w)$
x_i : 空間 z 座標, $i = 1, 3$ $(x_1, x_3) = (x, z)$

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

http://www.gfd-dennou.org/library/deepconv/

において公開されているものである. (©deepconv 開発グループ 2012). 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない. なお, 利用する際には今一度自ら内容を確かめることをお願いする (無保証無責任原則).

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

dcstaff@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いである.