2 次元非静力学モデルの定式化

小高 正嗣, 杉山 耕一朗, 北守 太一

2004 年 7 月 25 日

要旨

Klemp and Wilhelmson (1978) と CReSS を基にして, 理想気体を仮定した乾燥大気に対する 2 次元準圧縮性方程式系の非静力学モデルの定式化を行う．サブグリッドスケールの乱流拡散は Klemp and Wilhelmson (1978) の 1.5 次クロージャモデルを用いる.

目 次

1 基礎方程式系

この節では理想気体を仮定した乾燥大気に対する 2 次元準圧縮系の基礎方程式を導出する．凝結物質を含まないことをのぞき，これらの方程式系は Klemp and Wilhelmson (1978) と同様である．

1.1 変数の定義

モデルの独立変数は空間の変数 x, z と時間の変数 t である．モデルの予報変数はこれらの関数として定義される

$$
\begin{array}{lcl}
u & : & \text{速度の } x \text{ 成分} \\
w & : & \text{速度の } z \text{ 成分} \\
\Theta & : & \text{温位} \\
\Pi & : & \text{無次元圧力関数}
\end{array}
$$

である．

無次元圧力関数 (エクスナー関数) π は圧力 p を用いて以下のように定義される．

$$\Pi \equiv \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R_d/c_p} \tag{1}$$

p_0 は地表面での気圧である．温位 Θ は

$$
\begin{aligned}
\Theta &\equiv T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R_d/c_p} \\
&= \frac{T}{\Pi}
\end{aligned} \tag{2}
$$

で与えられる．ここで T は温度，c_p は定圧比熱，R_d は乾燥空気の気体定数である．

1.2 基礎方程式

基礎方程式は, 基本場の静水圧の式, 運動方程式, 圧力方程式, 熱力学の式である. 基本場は水平一様な静止状態であるとし, 基本場の変数は上付きバー ($\bar{}$) で表す.

静水圧の式 :

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p \overline{\theta}} \tag{3}$$

基本場の密度 $\overline{\rho}$ は理想気体の状態方程式から以下のように与えられる.

$$\overline{\rho} = \frac{p_0}{R_d} \frac{\overline{\Pi}^{c_v/R_d}}{\overline{\theta}} \tag{4}$$

運動方程式 :

$$\frac{du_i}{dt} = -c_p \overline{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \delta_{i3} g \frac{\theta}{\overline{\theta}} + D_{u_i}. \tag{5}$$

ここで $i = 1, 3$ で $u_1 = u, u_3 = w$ である. 左辺の時間微分は以下のように表される.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{6}$$

D_{u_i} はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項であり, 詳細は??節で述べる.

圧力方程式 :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\overline{c}^2}{c_p \overline{\rho} \overline{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho} \overline{\theta}_v u_j \right) = 0. \tag{7}$$

ここで $\overline{c}$ は基本場の音速であり, 以下のように与えられる.

$$\overline{c^2} = \frac{c_p R_d}{c_v} \overline{\Pi \theta}. \tag{8}$$

ここで c_v は定積比熱である.

熱力学の式 :

$$\frac{d\theta}{dt} = D_\theta. \tag{9}$$

D_θ はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項である.

1.3　サブグリッドスケールの乱流拡散

運動方程式中の拡散項 :

$$D_{u_i} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right]. \tag{10}$$

ここで K_m は運動量に対する乱流拡散係数であり, E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー

$$E = \frac{1}{2}\overline{(u'')^2+(w'')^2} \tag{11}$$

である.

熱力学の式の拡散項 :

$$D_\theta = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right). \tag{12}$$

ここで K_h は温位に対する乱流拡散係数である.

乱流運動エネルギーの式 :

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= -\frac{g}{\theta}K_h\frac{\partial \theta_e}{\partial z}+2K_m\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2+\frac{1}{2}|\varepsilon_{ijk}|K_m\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\\ &\quad -\frac{3}{2}\delta_{ij}E\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x_j}\right)-\left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E^{\frac{3}{2}}.\end{aligned} \tag{13}$$

l は混合距離であり $l=(\Delta x\Delta z)^{1/2}$, $C_\varepsilon = 0.2$ とする.

K_m, K_h は E を用いて以下のように与えられる.

$$K_m = C_m E^{\frac{1}{2}} l, \tag{14}$$

$$K_h = 3K_m. \tag{15}$$

ここで $C_\varepsilon = C_m$ とする.

A　基礎方程式系の導出

A.1　基本場と偏差の分離

変数を基本場とそこからの偏差に分ける. 基本場の変数は上付きバー ($\bar{}$) で表し, 偏差を上付きプライム ($'$) で表す. ある変数 ϕ は以下のように分離される.

$$\phi = \overline{\phi} + \phi'. \tag{A.1}$$

分離される変数は u, w, 温位 θ, 圧力 p または Π, 密度 ρである.

基本場は水平一様 ($\overline{\phi} = \overline{\phi}(z)$) で, 擾乱のない静止状態 ($\overline{u} = \overline{v} = \overline{w} = 0$) であるとする. 基本場の無次元圧力関数と温位は, それぞれ,

$$\overline{\Pi} = \left(\frac{\overline{p}}{p_0}\right)^{R_d/c_p}, \tag{A.2}$$

$$\overline{\theta} = \frac{\overline{T}}{\overline{\Pi}} \tag{A.3}$$

である. 基本場の密度 $\overline{\rho}$ は状態方程式から

$$\overline{\rho} = \frac{p_0}{R_d} \frac{\overline{\Pi}^{c_v/R_d}}{\overline{\theta}} \tag{A.4}$$

と与えられる. ここで c_v は定積比熱である.

以下では $\Pi' = \pi$ とし, 記述を簡便にするためその他の変数の偏差量に付く上付きプライム ($'$) は省略する.

A.2 運動方程式

ここではエクスナー関数を用いた運動方程式の導出と, 水平一様静止基本場とそこから偏差との分離を行う.

エクスナー関数の導入

運動方程式は

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \delta_{i3}g + D_{u_i} \tag{A.5}$$

である. 圧力勾配項を エクスナー関数を用いて書き直すと,

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{c_p p}{\rho R_d \Pi}\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \delta_{i3}g + D_{u_i} \tag{A.6}$$

ここで, 状態方程式

$$p = \rho R_d \Pi \theta \tag{A.7}$$

を用いてさらに書き直すと,

$$\frac{du_i}{dt} = -c_p\theta\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \delta_{i3}g + D_{u_i} \tag{A.8}$$

を得る.

基本場と偏差の分離

運動方程式を水平一様静止基本場の式とそこからの偏差の式 (擾乱場の式) に分離する. 基本場の方程式は静水圧の式

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p\overline{\theta}} \tag{A.9}$$

である.

擾乱場の水平方向の運動方程式 ($i = 1$) は

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -c_p\left(\overline{\theta} + \theta'\right)\frac{\partial\left(\overline{\Pi} + \pi\right)}{\partial x} + D_u \\ &\simeq -c_p\left(\overline{\theta}_v\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x} + \overline{\theta}_v\frac{\partial \pi}{\partial x} + \theta'_v\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x}\right) + D_u\end{aligned} \tag{A.10}$$

となる. 擾乱場の鉛直方向の運動方程式 ($i=3$) は

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= -c_p\left(\overline{\theta}+\theta'\right)\frac{\partial\left(\overline{\Pi}+\pi\right)}{\partial z} - g + D_w \\
&\simeq -c_p\left(\overline{\theta}_v\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial z} + \overline{\theta}_v\frac{\partial\pi}{\partial z} + \theta'_v\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial z}\right) - g + D_u
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

となる. それぞれの式で圧力勾配項における 2 次量は小さいと仮定し無視する.

基本場は水平一様であることと, 鉛直方向の運動方程式から静水圧の式を差し引くことにより, 以下の擾乱場の運動方程式を得る.

$$
\frac{du}{dt} = -c_p\overline{\theta}_v\frac{\partial\pi}{\partial x} + D_u, \tag{A.12}
$$

$$
\frac{dw}{dt} = -c_p\overline{\theta}_v\frac{\partial\pi}{\partial z} + g\frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}} + D_w. \tag{A.13}
$$

まとめて表すと,

$$
\frac{du_i}{dt} = -c_p\overline{\theta}_v\frac{\partial\pi}{\partial x_i} + \delta_{i3}g\frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}} + D_{u_i} \tag{A.14}
$$

となる.

A.3 圧力方程式

圧力方程式の導出

圧力方程式は, 連続の式

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{A.15}$$

とエクスナー関数で表した状態方程式

$$\Pi = \left(\frac{R_d}{p_0}\rho\theta_v\right)^{R_d/c_v} \tag{A.16}$$

から導出する.

状態方程式 (A.16) を t で微分する:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{dt} &= \left(\frac{R_d}{p_0}\right)^{R_d/c_v}\left\{\frac{R_d}{c_v}\theta^{R_d/c_v}\rho^{R_d/c_v-1}\frac{d\rho}{dt} + \frac{R_d}{c_v}\rho^{R_d/c_v}\theta^{R_d/c_v-1}\frac{d\theta}{dt}\right\} \\
&= \frac{R_d}{c_v}\left(\frac{R_d}{p_0}\rho\theta\right)^{R_d/c_v}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}\right\} \\
&= \frac{R_d}{c_v}\Pi\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}\right\}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

連続の式 (A.15) を右辺に代入すると,

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{R_d}{c_v}\Pi\left\{-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}\right\} \tag{A.18}$$

を得る.

圧力偏差の方程式

エクスナー関数を水平一様基本場 $\overline{\Pi}$ とそこからの偏差 π に分離し, π の方程式を求める.

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} + u_j\frac{\partial\pi}{\partial x_j} + w\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial z} = -\frac{R_d}{c_v}\overline{\Pi}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{R_d}{c_v}\pi\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{R_d}{c_v}\frac{\Pi}{\overline{\theta}+\theta}\frac{d(\overline{\theta}+\theta)}{dt}. \tag{A.19}$$

音速

$$c^2 = \frac{c_pR_d}{c_v}\Pi(\overline{\theta}+\theta), \tag{A.20}$$

$$\overline{c^2} = \frac{c_pR_d}{c_v}\overline{\Pi\theta} \tag{A.21}$$

を用いて書き直すと,

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\theta}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + w\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial z} = -u_j\frac{\partial \pi}{\partial x_j} + \frac{R_d}{c_v}\pi\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{c^2}{c_p(\overline{\theta}+\theta)^2}\frac{d(\overline{\theta}+\theta)}{dt}. \quad (A.22)$$

ここで状態方程式 (A.16) を用いて左辺第 3 項を変形する.

$$\begin{aligned}
w\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial z} &= w\left(\frac{R_d}{p_0}\right)^{R_d/c_v}\frac{\partial\left(\overline{\rho}\overline{\theta}\right)^{R_d/c_v}}{\partial z} \\
&= w\left(\frac{R_d}{p_0}\right)^{R_d/c_v}\frac{R_d}{c_v}\left(\overline{\rho}\overline{\theta}\right)^{R_d/c_v-1}\frac{\partial \overline{\rho}\overline{\theta}}{\partial z} \\
&= w\frac{R_d}{c_v}\overline{\Pi}\frac{1}{\overline{\rho}\overline{\theta}}\frac{\partial\left(\overline{\rho}\overline{\theta}_v\right)}{\partial z} \\
&= \frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}_v^2}w\frac{\partial\left(\overline{\rho}\overline{\theta}_v\right)}{\partial z} \\
&= \frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}u_j\frac{\partial\left(\overline{\rho}\overline{\theta}\right)}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

また, 左辺第 2 項は

$$\frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\theta}}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}\overline{\rho}\overline{\theta}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

と書き換えることができる. 左辺第 2, 3 項をまとめると圧力方程式は以下のように表される.

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\overline{\theta}u_j\right) = f_\pi \quad (A.23)$$

$$f_\pi = -u_j\frac{\partial \pi}{\partial x_j} + \frac{R_d\pi}{c_v}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{c^2}{c_p(\overline{\theta}+\theta)^2}\frac{d(\overline{\theta}+\theta)}{dt}. \quad (A.24)$$

Klemp and Wilhelmson (1978) にしたがい, 本モデルでは $f_\pi = 0$ とする. これは線形化を行い, 非断熱項 ((A.24) 右辺第 3 項) を無視することを意味する.

B　乱流パラメタリゼーション

B.1　レイノルズ応力方程式

B.2　サブグリッドスケールの方程式

サブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式に関して, Klemp and Wilhelmson (1978) 中の式 (2.21) から (3.12) の導出を行った. (2.21) から導出した式と比べると, (3.21) には足りない項が 2 つあった.

ここではサブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式を書き下す. 座標系は直交直線座標系である.

Klemp and Wilhelmson (1978) の式 (2.21):

$$\frac{dE}{dt} = g\overline{w\left(\frac{\theta'}{\bar{\bar{\theta}}} + 0.61q_v' - q_c'\right)} - \overline{u_i'u_j'}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x_j}\right) - \frac{C_\varepsilon}{l}E^{\frac{3}{2}}. \quad \text{(B.1)}$$

C_ε, l は定数である.

ここで

$$\overline{w\left(\frac{\theta'}{\bar{\bar{\theta}}} + 0.61q_v' - q_c'\right)} = -AK_h\frac{\partial \theta_e}{\partial z} + K_h\frac{\partial q_l}{\partial z}, \quad \text{(B.2)}$$

$$\overline{u_i'u_j'} = -K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{3}\delta_{ij}E, \quad \text{(B.3)}$$

$$K_m = C_m l E^{\frac{1}{2}}. \quad \text{(B.4)}$$

ただし

$$q_l = q_v + q_c, \quad \text{(B.5)}$$

$$A = \frac{1}{\bar{\bar{\theta}}}\left\{\frac{1 + \dfrac{1.61\varepsilon L q_v}{R_d T}}{1 + \dfrac{\varepsilon L^2 q_v}{c_p R_d T^2}}\right\}, \quad \text{(B.6)}$$

$$K_h = 3K_m. \quad \text{(B.7)}$$

Klemp and Wilhelmson (1978) の式 (3.12):

$$\begin{aligned}\delta_{2t}K_m = & -\frac{1}{3}\overline{u}^x\left(4\delta_{2x}K_m - \delta_{4x}K_m\right) - \frac{1}{3}\overline{u}^y\left(4\delta_{2y}K_m - \delta_{4y}K_m\right) \\ & \overline{w\delta_z K_m}^z + \frac{C_m^2 l^2}{2K_m}(B+S) \\ & +\frac{1}{2}\left(\delta_{xx}K_m^2 + \delta_{yy}K_m^2 + \delta_{zz}K_m^2\right) - \frac{C_\varepsilon K_m^2}{2C_m l^2}. \quad \text{(B.8)}\end{aligned}$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
B &= -gAK_h\delta_{2z}\theta_e + gK_h\delta_{2z}q_l, && \text{(B.9)}\\
S &= -\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial u_i}{\partial u_j}\\
&= K_m\Bigg\{2\left[(\delta_x u)^2 + (\delta_y v)^2 + (\delta_z w)^2\right]\\
&\quad + \left(\overline{\delta_x v + \delta_y w}\right)^2 + \left(\overline{\delta_x w + \delta_z u}\right)^2 + \left(\overline{\delta_y w + \delta_z v}\right)^2\Bigg\}. && \text{(B.10)}
\end{aligned}
$$

式 (B.10) の右辺の {} 内第 3 項は誤植かもしれない. $\left(\overline{\delta_x v + \delta_y u}\right)^2$ であると思われる. 式 (3.12) は 4 次精度で離散化された後の式である. δ_{2t} などの意味は以下のようである. ξ をある独立変数, ϕ をある従属変数とし, $n\Delta\xi$ はある独立変数の間隔とすると,

$$
\begin{aligned}
\delta_{n\xi}\phi(\xi) &= \frac{1}{n\Delta\xi}\left[\phi\left(\xi + \frac{n\Delta\xi}{2}\right) - \phi\left(\xi - \frac{n\Delta\xi}{2}\right)\right], && \text{(B.11)}\\
\overline{\phi(\xi)}^{n\xi} &= \frac{1}{2}\left[\phi\left(\xi + \frac{n\Delta\xi}{2}\right) - \phi\left(\xi - \frac{n\Delta\xi}{2}\right)\right]. && \text{(B.12)}
\end{aligned}
$$

(B.2) と (B.3) を用いて (B.1) を書き直すと,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial E}{\partial x} + v\frac{\partial E}{\partial y} + w\frac{\partial E}{\partial z}\right)\\
&\quad + \left(-gAK_h\frac{\partial \theta_e}{\partial z} + gK_h\frac{\partial q_l}{\partial z}\right)\\
&\quad - \left\{-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{3}\delta_{ij}E\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x_j}\right) - \frac{C_\varepsilon}{l}E^{\frac{3}{2}}. && \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

右辺第 3 項, 第 4 項を書き下すと, それぞれ,

$$
\begin{aligned}
&- \left\{-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= K_m\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right. \\
&\qquad +\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial z} \\
&\qquad +\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial y}+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\
&\qquad \left.-\frac{2K_m^2}{3C_m^2l^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \\
&= 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad +K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right. \\
&\qquad +\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} \\
&\qquad \left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right\} \\
&\quad -\frac{2K_m^2}{3C_m^2l^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&= 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad +K_m\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right. \\
&\qquad \left.+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad -\frac{2K_m^2}{3C_m^2l^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&= 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad +K_m\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} \\
&\quad -\frac{2K_m^2}{3C_m^2l^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial z}\right)\\
&= \frac{1}{C_m^2 l^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial K_m^2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_m\frac{\partial K_m^2}{\partial y}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial K_m^2}{\partial z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{C_m^2 l^2}\left\{K_m\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}+\frac{\partial K_m}{\partial x}\frac{\partial K_m^2}{\partial x}\right.\\
&\qquad +K_m\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2}+\frac{\partial K_m}{\partial y}\frac{\partial K_m^2}{\partial y}\\
&\qquad\left.+K_m\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}+\frac{\partial K_m}{\partial z}\frac{\partial K_m^2}{\partial z}\right\}\\
&= \frac{K_m}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right)\\
&\quad +\frac{1}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}2K_m\frac{\partial K_m}{\partial x}+\frac{\partial K_m}{\partial y}2K_m\frac{\partial K_m}{\partial y}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial K_m}{\partial z}2K_m\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)\\
&= \frac{K_m}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right)\\
&\quad +\frac{2K_m}{C_m^2 l^2}\left\{\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2\right\}. \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

したがって, $E=\left(\frac{K_m}{C_m l}\right)^2, K_h=3K_m$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K_m}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial K_m}{\partial x}+v\frac{\partial K_m}{\partial y}+w\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)+\frac{3gC_m^2 l^2}{2}\left(-A\frac{\partial \theta_e}{\partial z}+\frac{\partial q_l}{\partial z}\right)\\
&\quad +C_m^2 l^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&\quad +\frac{C_m^2 l^2}{2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&\quad -\frac{K_m}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2\\
&\quad -\frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2}K_m^2. \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}
$$

(B.16) と (B.8) とを比べると, (B.8) 中には上 (B.16) の右辺第 4 項

$$-\frac{K_m}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{B.17}$$

と第 6 項

$$\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2 \tag{B.18}$$

がない. 準圧縮系を考えているので, 第 4 項は 0 になる. 第 6 項がないのは不明である. $()^2$ なので微小項と考えるのだろうか. 消去する理由が分からないので, 第 6 項は残す.

よって, 直交直線座標系におけるサブグリッドスケールの運動エネルギーの方程式を E に関する式に書き換えると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} \;=\; & -\left(u\frac{\partial E}{\partial x}+v\frac{\partial E}{\partial y}+w\frac{\partial E}{\partial z}\right)+3gC_m l E^{1/2}\left(-A\frac{\partial \theta_e}{\partial z}+\frac{\partial q_l}{\partial z}\right)\\
&+2C_m l E^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&+C_m l E^{1/2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&+2C_m l E^{1/2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial E^{1/2}}{\partial z}\right)^2\right]\\
&-\frac{C_\varepsilon}{l}E^{3/2}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

となる. この式は Deardorff (1975), Mellor and Yamada (1974), Schemm and Lipps (1976) などで用いられているものと同じ方程式である.

C 変数リスト

C_ε	:	乱流拡散係数のための定数
C_m	:	乱流拡散係数のための定数
c	:	音波
$\bar{c}$	:	基本場の音波
c_p	:	定圧比熱
c_v	:	定積比熱
D_{u_i}	:	x_i 成分の運動方程式におけるサブグリッドスケールの乱流拡散項
D_θ	:	熱力学の式におけるサブグリッドスケールの乱流拡散項
E	:	サブグリッドスケールの運動エネルギー
f	:	コリオリパラメータ
g	:	重力加速度
K_h	:	熱に対する乱流拡散係数
K_m	:	運動量に対する乱流拡散係数
l	:	混合距離
p	:	圧力
$\overline{p}$	:	基本場の圧力
p_0	:	地表面での基準圧力
Π	:	エクスナー関数
$\overline{\Pi}$	:	基本場のエクスナー関数
π	:	エクスナー関数の偏差
R_d	:	乾燥空気の気体定数
$\overline{\rho}$	:	基本場の密度
ρ_0	:	地表面での密度
t	:	時間座標
$\overline{T}$	:	基本場の温度
$\overline{\theta}$	:	基本場の温位
θ	:	温位偏差
u_i	:	速度, $i = 1, 3$ $(u_1, u_3) = (u, w)$
x_i	:	空間 z 座標, $i = 1, 3$ $(x_1, x_3) = (x, z)$

D 参考文献

Browning, K. A., 1964: Airflow and percipitation within severe local storms which travel to the right of the winds. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 634-639

Curic, M., Janc, D., Vujovic, D., Vuckovic, V., 2003: The effects fo a river valley on an isolated cumulonimbus cloud development. *Atmos. Res.*, **66**, 123-139.

Das, P., 1969: The thermodynamic equation in cumulus dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 399-409.

Deardorff, J. W., 1975: The development of boundary-layer turbulence models for use in studying the severe storm environment. *Proc. SESAME Meeting*, Boulder, NOAA-ERL, 251-261.

Houze, R. A., 1993: Cloud dynamics. Academic Press.

Kessler, E., 1969: On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circuration. Meteor. Monogr., *Amer. Meteor.Soc.*, **32**, 84 pp.

Klemp J. B. and Robert B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.

Klemp J. B., 1978: A splitting procedure for numerical solution of the compressible equations of motion. ???

Klemp J. B., 1978: A splitting procedure for numerical solution of the compressible equations of motion. ???, ???.

中野満寿男, 2003: 鉛直シアーが台風初期渦形成に及ぼす影響. 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 修士論文.

Mellor, G., and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for atmospheric boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791-1806.

Ogura, Y. and M. Yoshizaki, 1988: Numerical study of orographic-convective precipitation over the eastern Arabic Sea and the Ghats Mountains during the summer monsoon. *J. Atoms. Sci.*, **45**, 2097-2122.

Ogura, Y., and T. Takahashi, 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.

大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徹, 1998: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法. 東京大学出版会, 652.

斉藤和雄 編, 1999: 非静力学モデル. 気象研究ノート 第 196 号, 日本気象学会.

Saunders, P. M., 1957: The thermodynamics of saturated air: A contribution to the classical theory. *Ouart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **83**, 342-350.

Schemm, C. E., and F. Lipps, 1976: Some results from a simplified three-dimensional numerical model of atmospheric turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1021-1041.

Skamarock, Wiliam C. and Joseph B. Klemp, 1992: The stability of time-split methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equation. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.

Soong, S-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axi-symmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893

Tapp, M. C., and P. W. White, 1976: A nonhydrostatic mesoscale model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 277-296.

坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版. http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html

Wilhelmson, R. B., 1977: On the thermodyanmics equation for deep convetion. *Mon. Wea. Rev.*, **105**, 545-547.

Wilhelmson, R. B., and Y. Ogura, 1977: The pressure perturbation and the numerical modleing of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

http://www.gfd-dennou.org/arch/deepconv/kaminari/

において公開されているものである. ©高橋 こう子, 杉山 耕一朗, 小高 正嗣, 中島 健介, 林 祥介 (K. Takahashi, K. Sugiyama, M. Odaka, K. Nakajima and Y.-Y. Hayashi) 2003. 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない. なお, 利用する際には今一度自ら内容を確かめることをお願いする (無保証無責任原則).

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

deepconv@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いである.