

DCPAM による Held and Suarez(1994) 力学コア標準実験

野口峻佑

京都大学理学部 地球物理学教室 気象学研究室

2011年3月26日

目次

1	はじめに	2
2	実験設定	2
2.1	外力の設定	2
2.2	支配方程式系	2
2.3	離散化手法	6
3	結果	8
3.1	温度場	8
3.2	帯状風	9
3.3	温度擾乱の分散	10
3.4	帯状風の帯状擾乱スペクトル	12
4	まとめ	14
付録 A	帯状風の帯状擾乱スペクトルの計算手順	15
A.1	帯状風の帯状擾乱の計算	15
A.2	スペクトルの計算	15
A.3	時間平均・鉛直平均	16
A.4	擾乱スペクトルの物理的意味付け	16
A.5	描画プログラム	18
A.6	Parseval の等式の証明	19
付録 B	Held and Suarez(1994) 図表	22
付録 C	Held and Suarez(1994) 和訳	26

1 はじめに

地球流体電脳倶楽部惑星大気大循環モデル DCPAM[1] を用いて, Held and Suarez(1994)[2](以降 HS94 と表記)により提案された力学コア標準実験を行った. この文書では, その実験設定と結果について記述する.

力学コア標準実験では, 大気大循環モデル (GCM) の力学過程の長期的性質を物理過程から切り離して評価することを目的としている. そのために, 力学過程の方程式系に人工的な外力として Newton 冷却と Rayleigh 摩擦を与え, モデルを長期間走らせた結果の気候学的状態をモデル間で比較することを行う.

2 実験設定

2.1 外力の設定

HS94 は, モデルの力学過程の熱力学方程式と水平方向の運動量方程式に対して, 非断熱加熱 (Newton 冷却) Q と散逸強制 (Rayleigh 摩擦) $\mathbf{F} = (F_\lambda, F_\varphi)$ を以下のような単純な算術表現で与え, 物理過程の代わりとすることを提案している.

$$Q = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{diab} = -k_T(\varphi, \sigma)[T - T_{eq}(\varphi, p)], \quad (1)$$

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} \right)_{fric} = -k_v(\sigma)\mathbf{v}_H. \quad (2)$$

ここで φ は緯度, T は温度場, $\mathbf{v}_H = (u, v)$ は水平風速, $\sigma = p/p_s$ は地表面気圧で規格化された圧力である. T_{eq} は Newton 冷却により緩和される際の基本温度場 (放射平衡温度場) であり, 以下の形で与えられる.

$$T_{eq}(\varphi, p) = \max \left\{ 200K, \left[315K - (\Delta T)_y \sin^2 \varphi - (\Delta \theta)_z \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \cos^2 \varphi \right] \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa \right\}. \quad (3)$$

Newton 冷却および Rayleigh 摩擦の緩和係数 k_T と k_v は以下の形で与えられる.

$$k_T(\varphi, \sigma) = k_a + (k_s - k_a) \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right) \cos^4 \varphi, \quad (4)$$

$$k_v(\sigma) = k_f \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right). \quad (5)$$

式 (3),(4),(5) に現れているパラメータの値は表 1 のように提案されている. 図 1 は式 (4),(5) で与えられる k_T , k_v の鉛直分布と k_T の緯度および鉛直分布を示している. 図 2 は式 (3) で与えられる基本温度場 T_{eq} と, 対応する温位場の子午面図を描いている.

2.2 支配方程式系

次に, 今回用いた大気大循環モデル DCPAM の力学コアモデル dcpam5-primitive について述べる^{*1}. dcpam5-primitive は, 球面緯度経度座標 (λ, φ) および鉛直 σ 座標で表されたプリミティブ方程式系を解

^{*1} 詳細は『dcpam5 支配方程式系の導出に関する参考資料』[3], 『dcpam5 支配方程式系とその離散化』[4]を参照のこと.

パラメータ	
境界層の上端	$\sigma_b = 0.7$
地表面での Rayleigh 摩擦の緩和係数	$k_f = 1[\text{day}^{-1}]$
大気上層における Newton 冷却の緩和係数	$k_a = 1/40[\text{day}^{-1}]$
赤道地表面における Newton 冷却の緩和係数	$k_s = 1/4[\text{day}^{-1}]$
極と赤道の温度差	$(\Delta T)_y = 60[\text{K}]$
赤道における鉛直方向の温位差	$(\Delta\theta)_z = 10[\text{K}]$

表 1 力学コア実験の外力の形を定める各パラメータの値.

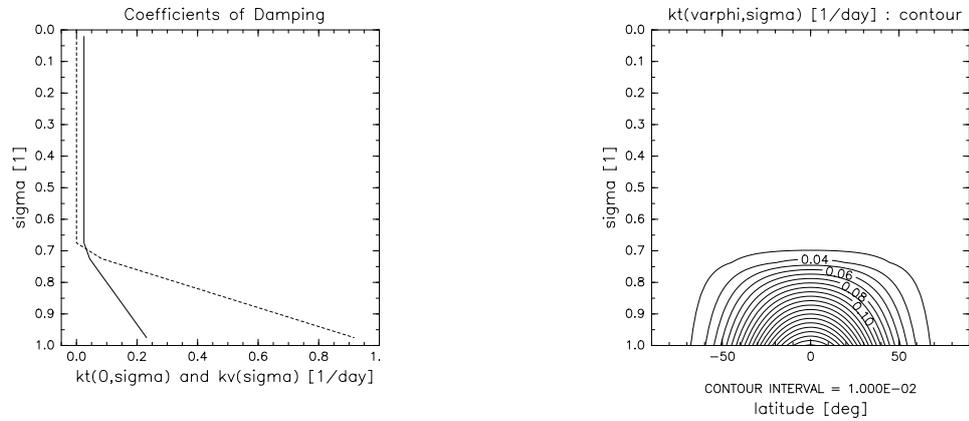


図 1 左図: Newton 冷却の緩和係数 k_T (実線) と Rayleigh 摩擦の緩和係数 k_v (点線). k_T は赤道上での値を表示している. 右図: k_T の緯度・高度座標での等値線図. 両図とも後に示す実験設定に合わせ, σ 座標を 20 層に分割して図示している.

くものである. これは以下に挙げる基礎方程式から構成されている.

運動量方程式

$$\frac{Du}{Dt} - fv - \frac{uv}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{RT}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + F_\lambda, \quad (6)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + \frac{u^2}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{RT}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + F_\varphi, \quad (7)$$

熱力学の式

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{RT}{C_p} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right\} + \frac{Q}{C_p}, \quad (8)$$

連続の式

$$\frac{D\pi}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0, \quad (9)$$

静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma}. \quad (10)$$

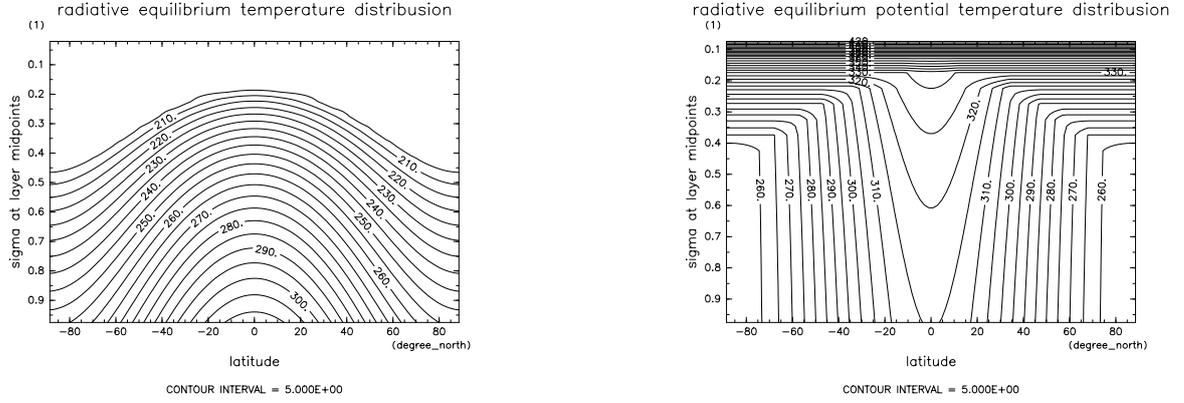


図 2 Newton 冷却の基本温度場 T_{eq} と, 対応する基本温位場の子午面図. HS94 の図 1(a) と (b) に相当する.

ここで

$$\frac{D}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad (11)$$

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} gz, \quad (12)$$

$$\pi \stackrel{\text{def}}{=} \ln p_s, \quad (13)$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} 2\Omega \sin \varphi. \quad (14)$$

式 (6),(7),(8) 中の F_λ , F_φ , Q は前節で記した HS94 で提案された外力項である. 式 (6)-(14) に用いられている各物理定数は表 2 のように与える.

物理定数	
地表面気圧	$p_0 = 1000[\text{hPa}]$
定圧比熱	$C_p = 1004[\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$
乾燥大気的气体定数と定圧比熱との比	$\kappa = R/C_p = 2/7$
回転速度	$\Omega = 7.292 \times 10^{-5}[\text{s}^{-1}]$
重力加速度	$g = 9.8[\text{ms}^{-2}]$
地球半径	$a = 6.371 \times 10^6[\text{m}]$

表 2 力学コア標準実験で用いる各物理定数の値.

これらの基礎方程式系をモデル内で計算している支配方程式系に変形する. まず, 球面上での取扱いを容易にするために以下のように変数を定義する.

$$U \stackrel{\text{def}}{=} u \cos \varphi, \quad V \stackrel{\text{def}}{=} v \cos \varphi, \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \sin \varphi. \quad (15)$$

次に、水平風の渦度 ζ と発散 D を導入する。

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right), \quad (16)$$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial \mu} \right). \quad (17)$$

温度は基本場と擾乱に分離する。

$$T(\lambda, \varphi, \sigma, t) = \bar{T}(\sigma) + T'(\lambda, \varphi, \sigma, t). \quad (18)$$

さらに計算の安定化のために、水平拡散を以下の形の超粘性として与える。

$$\mathcal{D}_{HD}(\zeta) = -K_{HD} \left[(-1)^{N_D/2} \nabla^{N_D} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{N_D/2} \right] \zeta, \quad (19)$$

$$\mathcal{D}_{HD}(D) = -K_{HD} \left[(-1)^{N_D/2} \nabla^{N_D} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{N_D/2} \right] D, \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_{HD}(T) = -(-1)^{N_D/2} K_{HD} \nabla^{N_D} T. \quad (21)$$

ここで緩和係数 K_{HD} と次数 N_D の値は、HS94 で例示されているスペクトルモデルの設定に従い、最大波数に対する e-folding time が 0.1 日、拡散が 4 次のラプラシアン ($N_D = 8$) となるようにする*2。以上の操作により得られるモデルの支配方程式系をまとめると以下ようになる。

運動量方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V_A}{\partial \lambda} - \frac{\partial U_A}{\partial \mu} \right) + \mathcal{D}_{HD}(\zeta), \quad (22)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U_A}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_A}{\partial \mu} \right) - \nabla_\sigma^2 (\Phi + R\bar{T}\pi + KE) + \mathcal{D}_{HD}(D), \quad (23)$$

熱力学の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial(UT')}{\partial \lambda} + \frac{\partial(VT')}{\partial \mu} \right) + T'D \\ & - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{Q}{C_p} + \mathcal{D}_{HD}(T), \end{aligned} \quad (24)$$

連続の式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi = -D - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}, \quad (25)$$

*2 K_{HD} の値は解像度に依存する。解像できる最大の波数を N_{tr} 、温度擾乱の最大波数に対する e-folding time を τ_{HD} とすると、緩和係数 K_{HD} の値は以下の式で与えられる。

$$K_{HD} = \frac{1}{\tau_{HD}} \left\{ \frac{N_{tr}(N_{tr}+1)}{a^2} \right\}^{-N_D/2}.$$

後に示す実験設定に合わせ、 $N_{tr} = 63$ とし、 $\tau_{HD} = 0.1[\text{day}^{-1}]$ 、 $N_D = 8$ 、 $a = 6.371 \times 10^6[\text{m}]$ を代入すれば、 $K_{HD} \simeq 1.0 \times 10^{41}[\text{m}^8 \text{day}^{-1}]$ であることがわかる。なお、式 (19),(20) の形からもわかるとおり、運動量方程式の水平拡散項には全角運動量を保存するための項が加わるため、 ζ と D の e-folding time は τ_{HD} とは若干異なることに注意されたい。

静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma}. \quad (26)$$

ここで

$$U_A = (\zeta + f)V - \dot{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + F_\lambda \cos \varphi, \quad (27)$$

$$V_A = -(\zeta + f)U - \dot{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{a} (1 - \mu^2) \frac{\partial \pi}{\partial \mu} + F_\varphi \cos \varphi, \quad (28)$$

$$KE = \frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)}. \quad (29)$$

また

$$\dot{\sigma} = \frac{D\sigma}{Dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma}, \quad (30)$$

$$\nabla_\sigma^2 = \frac{1}{a^2(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right], \quad (31)$$

$$\mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi = \frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \mu}. \quad (32)$$

2.3 離散化手法

最後に、前節で記したモデル支配方程式系の離散化手法の概略について述べる。depam5-primitive では

- 水平離散化にはスペクトル法を用いる。
 - 展開関数には球面調和関数を用い、三角波数切断を適用する。
- 鉛直離散化には格子差分として Arakawa and Suarez(1983)[5] のスキームを用いる。
 - 物理量は ζ, D, T が整数レベルに、 $\dot{\sigma}$ が半整数レベルに振り分けられている。
- 時間積分には semi-implicit スキームを用いる。重力波に関する項には台形型 implicit スキームを、その他の項には leapfrog スキームを適用する。
 - leapfrog スキームを用いることにより生じる計算モードの増幅を抑えるため、Asselin(1972)[6] の時間フィルターを 1 ステップ毎に用いている。

今回の実験では、解像度は、HS94 にて例示されているスペクトルモデルの波数に従い、最大切断波数 63(経度方向の格子点数 $I = 192$, 緯度方向の格子点数 $J = 96$), 鉛直層数 $K = 20$ とする (T63L20)。ここで、鉛直層の配置は σ 座標で等間隔である。250[K] の等温大気に対称性を崩す微小擾乱を加えた値を初期値として 1200 日間積分し、初めの 200 日をスピニング時間として切り捨てた残りの 1000 日間について解析を行う。また時間刻み幅は、HS94 で示されているスペクトルモデルの設定に合わせて $\Delta t = 15$ 分とする。

今回行った力学コア標準実験の実験設定は以下のようまとめられる。

実験設定まとめ

モデル支配方程式系

- dcpam5-ptimitive
 - 球面緯度経度 (λ, φ) 座標および鉛直 σ 座標のプリミティブ方程式系
- HS94 型の外力
 - 単純な Newton 冷却 Q と Rayleigh 摩擦 \mathbf{F}

$$Q = -k_T(\varphi, \sigma)[T - T_{eq}(\varphi, \sigma)], \quad (33)$$

$$\mathbf{F} = -k_v(\sigma)\mathbf{v}_H. \quad (34)$$

ここで

$$T_{eq}(\varphi, p) = \max \left\{ 200K, \left[315K - (\Delta T)_y \sin^2 \varphi - (\Delta \theta)_z \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \cos^2 \varphi \right] \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa \right\}, \quad (35)$$

$$k_T(\varphi, \sigma) = k_a + (k_s - k_a) \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right) \cos^4 \varphi, \quad (36)$$

$$k_v(\sigma) = k_f \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right). \quad (37)$$

- 水平拡散：最大波数に対する e-folding time が 0.1[day] の 4 次のラブラシアン

離散化手法

- 水平方向：スペクトル法
- 鉛直方向：格子差分 (Arakawa and Suarez, 1983)
- 時間方向：semi-implicit
- 解像度：三角波数切断 63, 鉛直格子点数 20 点 (T63L20)
- 時間間隔/積分期間： $\Delta t = 15[\text{min}]$ で 1200[day]
- 初期値：微小擾乱が加えられた 250[K] の等温大気

各パラメータおよび物理定数

境界層の上端	$\sigma_b = 0.7$	地表面気圧	$p_0 = 1000[\text{hPa}]$
地表面での Rayleigh 摩擦の緩和係数	$k_f = 1[\text{day}^{-1}]$	定圧比熱	$C_p = 1004[\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$
大気上層における Newton 冷却の緩和係数	$k_a = 1/40[\text{day}^{-1}]$	気体定数と定圧比熱との比	$\kappa = R_d/C_p = 2/7$
赤道地表面における Newton 冷却の緩和係数	$k_s = 1/4[\text{day}^{-1}]$	回転速度	$\Omega = 7.292 \times 10^{-5}[\text{s}^{-1}]$
極と赤道の温度差	$(\Delta T)_y = 60[\text{K}]$	重力加速度	$g = 9.8[\text{ms}^{-2}]$
赤道における鉛直方向の温位差	$(\Delta \theta)_z = 10[\text{K}]$	地球半径	$a = 6.371 \times 10^6[\text{m}]$

3 結果

ここでは、前章までで与えられた実験設定で DCPAM を走らせることで得られた結果について見ていく。

3.1 温度場

まず、HS94 の図 1(c),(d) と比較するために、温度場 T と対応する温位場 θ の帯状・時間平均の計算法について説明する。

数式表現

帯状平均・時間平均をそれぞれ以下のように定義する。

$$[A](\varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda, \quad (38)$$

$$\bar{A}(\lambda, \varphi, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) dt. \quad (39)$$

ここで、解析に使う時間範囲は、初めの 200 日をスピニングとして切り捨てた 1000 日間である ($t_0 = 200$, $\tau = 1000$). 以降の時間平均も同様). 以上の定義により、温度場 T , 温位場 $\theta = T(p/p_0)^{-\kappa}$ の帯状・時間平均は以下のように表される。

$$\overline{[T]}(\varphi, \sigma) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda \right\} dt, \quad (40)$$

$$\overline{[\theta]}(\varphi, \sigma) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda \right\} dt. \quad (41)$$

以上の操作を $A(\lambda, \varphi, \sigma, t) \rightarrow A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)$, ($i, j, k, n \in \mathbb{N}$) のように変数 $A(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ を離散化した状態で表現すると、

$$[A](\varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n), \quad (42)$$

$$\bar{A}(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (43)$$

ただし、 I は経度方向の格子点数、 N は総時間ステップ数である。よって、帯状・時間平均した温度場と温位場の最終表現は以下ようになる。

帯状・時間平均温度場

$$\overline{[T]}(\varphi_j, \sigma_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} T(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \right\}. \quad (44)$$

帯状・時間平均温位場

$$\overline{[\theta]}(\varphi_j, \sigma_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} T(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \left(\frac{p(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)}{p_0} \right)^{-\kappa} \right\}. \quad (45)$$

描画結果

DCPAM によって生成されたデータに対して、式 (44),(45) の操作を施した結果が図 3 である。

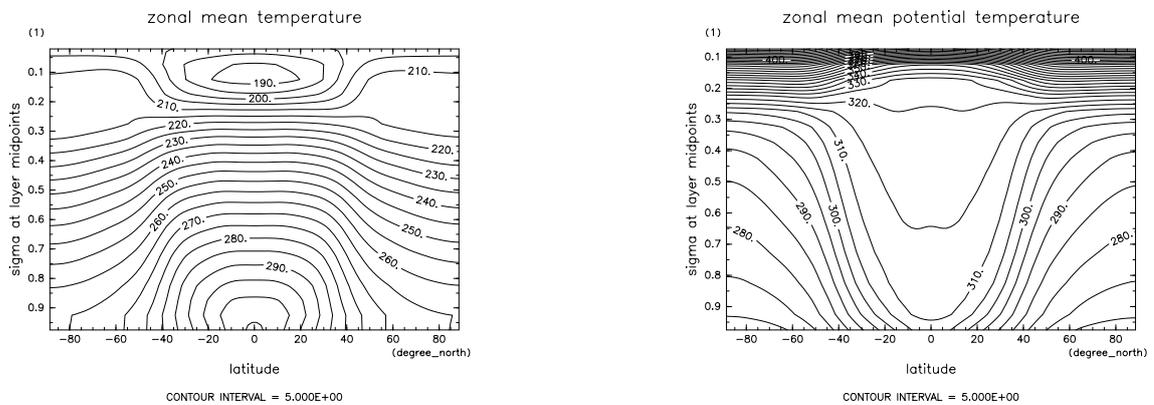


図 3 温度場 T と対応する温位場 θ の帯状・時間平均. HS94 の図 1(c) と (d) に相当する.

図の解説

- 循環の効果により中高緯度で温位面が斜めに傾いており、図 2(右) と比べて図 3(右) では南北勾配が小さくなっている。

HS94 との比較

- HS94 の図との有意な差は見られない。

3.2 帯状風

次に、HS94 の図 2 と比較するために、帯状風速場 u の帯状・時間平均の計算法について記す。

数式表現

前節と同じ平均の定義を用いると、帯状・時間平均した帯状風は以下のように表される。

$$\overline{[u]}(\varphi, \sigma) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda \right\} dt. \quad (46)$$

これを離散化したものは以下ようになる.

帯状・時間平均帯状風

$$\overline{[u]}(\varphi_j, \sigma_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \right\}. \quad (47)$$

描画結果

DCPAM によって生成されたデータに対して、式 (47) の操作を施した結果が図 4 である.

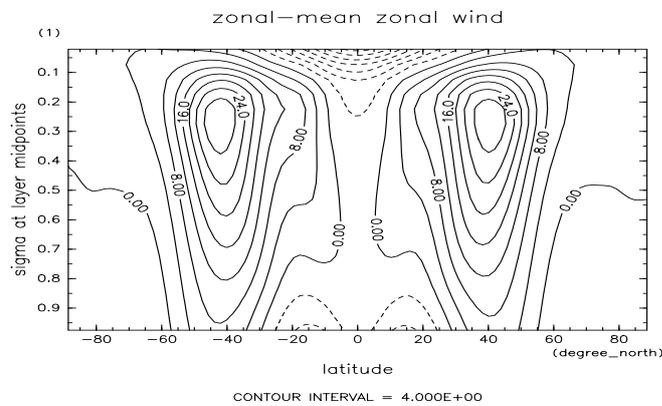


図 4 帯状風速場 u の帯状・時間平均. HS94 の図 2 に相当する.

図の解説

- 緯度 40 度付近に、最大強度 30m/s 程度のシングルジェットが形成されている.
- 赤道域では上層と地表に東風が吹いている.
- $\sigma = 0.2$ より上では急速に風速が落ち、風速の等値線が閉じている.

HS94 との比較

- HS94 に比べて DCPAM の結果は左右の対称性の崩れが大きいように見える.

3.3 温度擾乱の分散

ここでは、HS94 の図 3 と比較するために、温度場 T の擾乱成分の分散の帯状・時間平均の計算法について記す.

数式表現

帯状擾乱を以下のように定義する.

$$A^*(\lambda, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) - [A](\varphi, \sigma, t). \quad (48)$$

この擾乱成分の 2 乗に帯状・時間平均を施したものがここで描いているものである.

$$\overline{[T^{*2}]}(\varphi, \sigma) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T^{*2}(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda \right\} dt. \quad (49)$$

これを離散化して表せば,

$$A^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - [A](\varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (50)$$

よって, 帯状・時間平均した温度擾乱の分散の最終表現は以下ようになる.

帯状・時間平均温度擾乱分散

$$\overline{[T^{*2}]}(\varphi_j, \sigma_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} (T(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - [T](\varphi_j, \sigma_k, t_n))^2 \right\}. \quad (51)$$

描画結果

DCPAM によって生成されたデータに対して, 式 (51) の操作を施した結果が図 5 である.

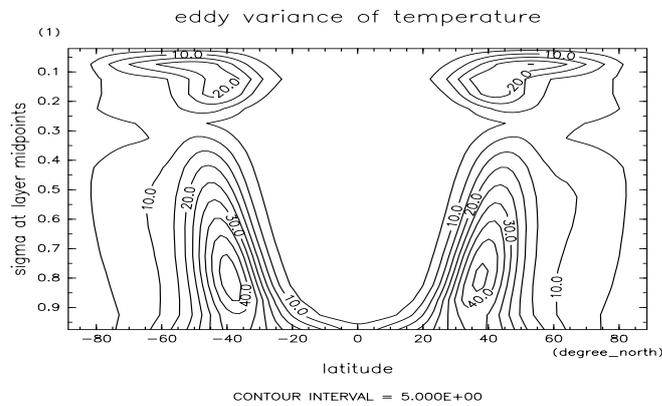


図 5 温度場 T の擾乱成分の分散の帯状・時間平均. HS94 の図 3 に相当する.

図の解説

- 中緯度に 2 つ, 下層と上部境界面付近に温度分散の極大が存在している.
- 地表面付近で温度分散が低緯度に侵入している. HS94 によると, これは現実の地球大気では見られない特徴である.

HS94 との比較

- DCPAM の結果では極大の値が HS94 の結果より 1 割ほど大きくなっている.

- 上端付近でのパターンは HS94 でのスペクトルモデルよりもむしろ格子点モデルと似た様相を示しているが、その値は DCPAM の結果の方がやや大きくなっている。

3.4 帯状風の帯状擾乱スペクトル

ここでは、HS94 の図 4 と比較するために、帯状風速場 u の帯状擾乱スペクトルの時間・鉛直平均の計算法について説明する。

数式表現

経度方向へのフーリエ変換と鉛直平均をそれぞれ以下のように定義する。

$$\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) e^{-\sqrt{-1}m\lambda} d\lambda, \quad (52)$$

$$\langle A \rangle_z(\lambda, \varphi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^0 A(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\sigma. \quad (53)$$

ここで $m \in \mathbb{N}$ は帯状波数であり、その範囲は $0 \leq m \leq I-1$ である。これらを離散化して表せば、

$$\tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{mi}{I}}, \quad (54)$$

$$\langle A \rangle_z(\lambda_i, \varphi_j, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (55)$$

ここで K は鉛直層数である。

帯状風速場 u の帯状擾乱スペクトルとは、帯状風速 u の帯状擾乱成分 u^* にフーリエ変換を施し、その絶対値を 2 乗したものである。これを時間・鉛直平均したものは以下のように表せる。

$$\overline{\langle |u^*|^2 \rangle}_z(m, \varphi) = \int_1^0 \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u^*(\lambda, \varphi, \sigma, t)) e^{-\sqrt{-1}m\lambda} d\lambda \right|^2 dt \right\} d\sigma. \quad (56)$$

これを離散化したものがここで描くものの最終表式である*3。

帯状風の帯状擾乱スペクトルの時間・鉛直平均

$$2\overline{\langle |u^*|^2 \rangle}_z(m, \varphi_j) = \frac{2}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \right\} e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i} \right|^2. \quad (57)$$

$$(1 \leq m \leq \frac{I}{2} - 1)$$

*3 係数 2 が付いている理由など、ここでの表式の詳細は付録 A にて解説する。

描画結果

DCPAM によって生成されたデータに対して、式 (57) の操作を施した結果が図 6 である。

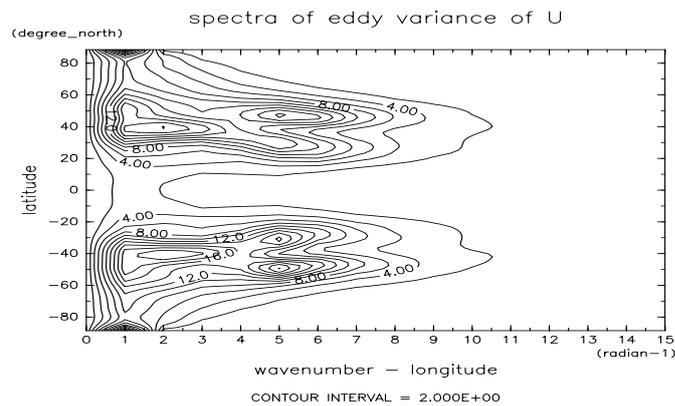


図 6 帯状風速場 u の帯状擾乱スペクトルの時間・鉛直平均. HS94 の図 4 に相当する.

図の解説

- 帯状波数 $m = 5$ に各半球 2 つの極大が存在しており、極側の方が若干強い。
- 帯状波数 $m = 1 \sim 2$ にも 3 つ目の極大が存在している。
- 帯状波数 $m = 1$ では他にも、極に極大が存在している。

HS94 との比較

- HS94 の結果と比べて DCPAM の結果は帯状波数 $m = 1$ あたりで極大の値が若干小さい。
- HS94 の結果と比べて DCPAM の結果は帯状波数 $m = 5$ あたりで極大の値が若干大きい。

4 まとめ

地球流体電脳倶楽部惑星大気大循環モデル DCPAM の力学コアモデル dcpam5-primitive により HS94 で提案された力学コア標準実験を行い, HS94 中の図 1~4 に相当する図を描いた. HS94 で例示されているスペクトルモデルと格子点モデルの図との比較を行ったところ, 定性的にはよく一致していたが, 詳細な定量的観察からいくつかの細かな差異が見出された.

HS94 が提案した力学コア標準実験はその厳密な解は知られておらず, 参照すべき答えのあるテストではない. また, DCPAM は HS94 で例示されている 2 つのモデルと同じ離散化手法を採用していないので, 結果が厳密に一致する必然性はないことに注意されたい.

比較により見出されたモデル間の差異の 1 つは, 温度擾乱の分散の上端付近の分布である. DCPAM の結果は上端で等値線が閉じているのに対し, HS94 中のスペクトルモデルの結果では等値線が上端で開いている点が異なっている. DCPAM の結果はむしろ, 同じように上端付近で等値線が閉じている HS94 中の格子点モデルの結果に似ている. このことは各モデルで用いている鉛直差分に原因があるのかもしれない. HS94 で例示されているスペクトルモデルでは鉛直差分に中心差分を用いているのに対して, DCPAM では鉛直差分に HS94 中の格子点モデルと同じ Arakawa and Suarez(1983) を用いている. 平均温度 (図 3(左) と HS94 中の図 1(c)) においては顕著な違いは見出せなかったのに対して, 擾乱成分の分散では違いが見られるのは興味深い. 原因が鉛直差分にあるか否かを判定するためには, DCPAM において鉛直差分を中心差分に取り換えて結果を比較してみる必要があるだろう. また, DCPAM での分散の極大値 45 が HS94 のスペクトルモデルでの値 40 に比べて 1 割程高いことも指摘しておく.

2 つ目の差異は, 帯状擾乱の帯状スペクトル分布に見られる. HS94 の 2 例と比較すると, DCPAM での結果は低波数側で相対的に小さな値, 高波数側で大きな値となっている. 例えば南半球の極側の高波数側 ($m = 5$) のピークでの値は, HS94 中のスペクトルモデルが 18 であるのに対して DCPAM では 22 となっている. このようなピーク値の差異が有意であるか否かは, より多くの他のモデルの結果との比較や, より長時間積分した時の分布の変動を観察することによって判断することができるかもしれない.

付録 A 帯状風の帯状擾乱スペクトルの計算手順

ここでは Held and Suarez(1994) の図 4 に示されている、帯状風の帯状擾乱のスペクトルの計算手順の詳細を記す。ここで言う帯状風の帯状擾乱スペクトルとは、帯状風の帯状平均からの偏差を経度方向にフーリエ変換した成分の絶対値を 2 乗したものであり、それを時間・鉛直平均した結果が図示されている。

A.1 帯状風の帯状擾乱の計算

まず、帯状風の帯状平均からのずれを計算する*4。

$$u^*(\lambda, \varphi, \sigma, t) = u(\lambda, \varphi, \sigma, t) - [u](\varphi, \sigma, t). \quad (58)$$

ここで、帯状平均は以下のように定義される。

$$[u](\varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda. \quad (59)$$

同様の操作を $u(\lambda, \varphi, \sigma, t) \rightarrow u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)$, ($i, j, k, n \in \mathbf{N}$) のように変数 $u(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ を離散化した状態で表現すると、

$$u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - [u](\varphi_j, \sigma_k, t_n), \quad (60)$$

$$[u](\varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (61)$$

ただし、 I は経度方向の格子点数である。

帯状風の帯状擾乱の計算

$$u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - [u](\varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (62)$$

A.2 スペクトルの計算

このようにして得た帯状擾乱成分 u^* に対して経度方向にフーリエ変換を施し、その絶対値の 2 乗を計算する。

$$\tilde{u}^*(m, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(\lambda, \varphi, \sigma, t) e^{-\sqrt{-1}m\lambda} d\lambda, \quad (63)$$

$$|\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t) = \tilde{u}^*(m, \varphi, \sigma, t) \cdot \tilde{u}^{*\dagger}(m, \varphi, \sigma, t). \quad (64)$$

ここで \dagger は複素共役を表す。これらを離散化すると、

$$\tilde{u}^*(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i}, \quad 0 \leq m \leq I-1 \quad (65)$$

*4 最終的に描こうとしている図は帯状擾乱のスペクトル (= 変動成分のスペクトル) なので、ここでの偏差を計算をせずとも、フーリエ変換した後に帯状平均成分を取り除くことで、同じ結果が得られる。

$$|\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = \tilde{u}^*(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \cdot \tilde{u}^{*\dagger}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (66)$$

ここで $\lambda_i = \frac{2\pi}{I}i$ である。また、ここでのフーリエ変換の定義には実際に用いる FFT ライブラリを想定して、規格化係数 $\frac{1}{2\pi}$ が正変換時につき、波数 m の範囲が $0 \leq m \leq I-1$ となるものを採用した。

スペクトルの計算

$$|\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = \left| \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i} \right|^2. \quad (67)$$

A.3 時間平均・鉛直平均

最後に、時間平均・鉛直平均を施す。

$$\overline{|\tilde{u}^*|^2}(m, \varphi, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+T} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t) dt, \quad (68)$$

$$\langle \overline{|\tilde{u}^*|^2} \rangle_z(m, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^0 \overline{|\tilde{u}^*|^2}(m, \varphi, \sigma) d\sigma. \quad (69)$$

これらを離散化したものは、

$$\overline{|\tilde{u}^*|^2}(m, \varphi_j, \sigma_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n), \quad (70)$$

$$\langle \overline{|\tilde{u}^*|^2} \rangle_z(m, \varphi_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \overline{|\tilde{u}^*|^2}(m, \varphi_j, \sigma_k). \quad (71)$$

よって、

時間・鉛直平均

$$\langle \overline{|\tilde{u}^*|^2} \rangle_z(m, \varphi_j) = \frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (72)$$

A.4 擾乱スペクトルの物理的意味付け

ここでスペクトルの計算の箇所へ一歩立ち戻って、描画するものの物理的意味について考える。この箇所では計算した各波数 m 毎のスペクトルを m について和を取ったものは、実は偏差の 2 乗の空間平均 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u^*|^2 d\lambda$ に等しくなっている (Parseval の等式、証明は A.6)。

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u^*|^2(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t). \quad (73)$$

ここで, $u^*(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ は実数関数なので, $\tilde{u}^*(-m, \varphi, \sigma, t) = \tilde{u}^{*\dagger}(m, \varphi, \sigma, t)$ であり, 右辺はさらに片側スペクトルとして表すことができる.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u^*|^2(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t) \quad (74)$$

$$= \tilde{u}^{*2}(0, \varphi, \sigma, t) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t). \quad (75)$$

この式の離散的な場合に対応する表現は, 連続の場合と同様に $u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)$ が実数関数であることを仮定して得られる離散型の Parseval の等式

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} |u^*|^2(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = |\tilde{u}^*|^2(0, \varphi_j, \sigma_k, t_n) + 2 \sum_{m=1}^{+I/2-1} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) + |\tilde{u}^*|^2\left(\frac{I}{2}, \varphi_j, \sigma_k, t_n\right), \quad (76)$$

である (A.6 を参照). この意味で, $2|\tilde{u}^*|^2(1 \leq m \leq \frac{I}{2} - 1)$ は偏差の 2 乗の緯度平均 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u^*|^2 d\lambda$ の波数 m 成分であると言える. 以上の理由により, 式 (72) を 2 倍し, これを $0 \leq m \leq 15$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ の範囲でプロットしたものが Held and Suarez(1994) の図 4 である.

帯状風の帯状擾乱スペクトル

$$2\langle |\tilde{u}^*|^2 \rangle_z(m, \varphi_j) = \frac{2}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \{u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)\} e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i} \right|^2. \quad (77)$$

$(1 \leq m \leq \frac{I}{2} - 1)$

A.5 描画プログラム

以上のようにして得られた離散式をコーディングした一例として、`Ruby` の `gphys`[7] を利用した描画プログラムを載せる。メモリーの制約のため、各 σ について分割して今まで述べてきた計算をしている。各操作は独立なので、このような分割に何ら問題はない。また、図 4 では $m = 15$ 以降は表示していない。実際、それ以降の部分は振幅が小さく、計算量の削減のためには早めの段階で $m \geq 15$ の成分を捨てておくのが良い。

figure4 描画プログラム

```
# draw vertically averaged zonal spectra of the eddy variance of zonal wind
#
# 更新履歴
# 2009/03/29 納多 哲史 新規作成
# 2010/09/22 野口 峻佑 修正 (規格化, factor 2, each_sig)+ コメント

def help()
  print "Usage: ruby ",$0," file varname\n"
end

require "numru/ggraph"
include NumRu

# 引数のチェック
if ARGV[0] == "-h" or ARGV[0] == "--help" then
  help(); exit 0
elsif ARGV.length != 2 then
  puts "ERROR: The number of argument is invalid."
  help(); exit 1
end

file = ARGV[0]
varname = ARGV[1]

if !FileTest.file?(file) then
  puts "ERROR: No such file."
  exit 2
end

gphys = GPhys::IO.open(file, varname)
gphys = gphys.cut('time'=>200..1200) # スピンアップ時間のカット

# 一度に計算しようとするメモリが足りないため、各 sigma 面毎に分割して実行する

each_sig = NetCDF.create('each_sig_U.nc') # 各 sigma 面に分割し、計算した値を掃き出すファイル

GPhys::NetCDF_IO.each_along_dims_write(gphys,each_sig,"sig"){
|each_sig_gphys|
  each_sig_gphys = (each_sig_gphys - each_sig_gphys.mean('lon')) # 擾乱成分の計算
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.fft(nil, 0) # lon 方向へ FFT, フーリエ係数を得る
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.abs**2 # 絶対値の 2 乗
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.rawspect2powerspect(0) #
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.spect_zero_centering(0) # 0 < m < I-1 --> -I/2 < m < I/2
  each_sig_gphys = 2*each_sig_gphys # factor 2
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.cut('lon'=>0..15) # 表示するのは東西波数 15 まで
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.mean('time') # 時間平均
  [each_sig_gphys] # [u*2] (m,lat,sig) をいったんファイルに書き出し
}
each_sig.close

gphys = GPhys::IO.open('each_sig_U.nc',varname) # いったんファイルを閉じて...
gphys = gphys.mean('sig') # もう一度読み込んで
# 鉛直平均

DCL.swcset('fname',"fig4")
DCL.groprn(2)
GGraph.set_fig('viewport'=>[0.15,0.80,0.15,0.6])
DCL.sgpset('lfull',true) # 全画面表示
DCL.sgpset('lcntl', false); DCL.uzfact(0.6)
GGraph.set_linear_contour_options('interval'=>2.0)
GGraph.contour(gphys,'annotate'=>false,'title'=>"spectra of eddy variance of U")
DCL.grcls
```

A.6 Parseval の等式の証明

Parseval の等式は、ある物理量について

$$(\text{実空間における物理量の 2 乗平均}) = (\text{各波数成分の絶対値の 2 乗和}) \quad (78)$$

であることを表している。実空間での物理量を $A(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ 、波数空間での物理量を $\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t)$ と表すと、フーリエ正変換・逆変換の定義 (再掲) はそれぞれ、

$$\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) e^{-\sqrt{-1}m\lambda} d\lambda, \quad (79)$$

$$A(\lambda, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t) e^{\sqrt{-1}m\lambda}. \quad (80)$$

以降、今の操作に φ, σ, t は関係ないのでそれぞれ $A(\lambda)$ 、 $\tilde{A}(m)$ と略記する。

振幅の 2 乗を定義通りに代入していけば、

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m) e^{\sqrt{-1}m\lambda} \right\} \left\{ \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}^\dagger(m') e^{-\sqrt{-1}m'\lambda} \right\} d\lambda \quad (81)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}(m-m')\lambda} d\lambda \quad (82)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m') \delta_{m-m', 0} \quad (83)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m) \quad (84)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{A}(m)|^2. \quad (85)$$

$$(86)$$

さらに A が実数ならば、 $\tilde{A}^\dagger(m) = \tilde{A}(-m)$ なので、

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{A}(m)|^2 = \tilde{A}^2(0) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} |\tilde{A}(m)|^2. \quad (87)$$

よって、

Parseval の等式 (連続版)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A(\lambda, \varphi, \sigma, t)|^2 d\lambda = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t)|^2 \quad (88)$$

$$= \tilde{A}^2(0, \varphi, \sigma, t) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} |\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t)|^2. \quad (\text{ただし } A \text{ が実数の場合}) \quad (89)$$

これと同じことを離散的に行えば、正変換と逆変換はそれぞれ、

$$\tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{m=0}^{I-1} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i}, \quad (90)$$

$$A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{I-1} \tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{\sqrt{-1}m\lambda_i}. \quad (91)$$

ここで $\lambda_i = \frac{2\pi}{I}i$ である。以降、同様に冗長なので $A(\lambda_i)$, $\tilde{A}(m)$ で略記する。

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} |A(\lambda_i)|^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ \sum_{m=0}^{I-1} \tilde{A}(m) e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m\lambda}{I}} \right\} \left\{ \sum_{m'=0}^{I-1} \tilde{A}^\dagger(m') e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{m'\lambda}{I}} \right\} d\lambda \quad (92)$$

$$= \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{m'=0}^{I-1} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m') \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m-m'}{I}i} \right\}^i. \quad (93)$$

ここで

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m-m'}{I}i} \right\}^i = \begin{cases} (1+1+\cdots+1)/I = I/I = 1 & (m-m'=0 \text{ の場合}) \\ \frac{1}{I} \frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m-m'}{I}I} - 1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m-m'}{I}} - 1} = 0 & (m-m' \neq 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

($0 \leq m \leq I-1$, $0 \leq m' \leq I-1$ から $m-m' \neq I$ であることに注意されたい) であることから、

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} |A(\lambda_i)|^2 = \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{m'=0}^{I-1} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m') \delta_{m-m',0} \quad (94)$$

$$= \sum_{m=0}^{I-1} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m) \quad (95)$$

$$= \sum_{m=0}^{I-1} |\tilde{A}(m)|^2. \quad (96)$$

さらに $A(\lambda_i)$ が実数の場合には、 $\tilde{A}^\dagger(m) = \tilde{A}(-m)$ であり、

$$\sum_{m=0}^{I-1} |\tilde{A}(m)|^2 = \sum_{m=0}^{I/2-1} |\tilde{A}(m)|^2 + \sum_{m=I/2}^{I-1} |\tilde{A}(m)|^2, \quad (97)$$

$$= \sum_{m=0}^{I/2-1} |\tilde{A}(m)|^2 + \sum_{\tilde{m}=1}^{I/2} |\tilde{A}(-\tilde{m})|^2, \quad (98)$$

$$= |\tilde{A}(0)|^2 + 2 \sum_{m=1}^{I/2-1} |\tilde{A}(m)|^2 + |\tilde{A}(\frac{I}{2})|^2. \quad (99)$$

途中、 $m = I - \tilde{m}$ の変換を第 2 項目に適用し、

$$\tilde{A}(m) = \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i) e^{-\sqrt{-1}(I-\tilde{m})\frac{2\pi i}{I}} \quad (100)$$

$$= \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i) e^{\sqrt{-1}\tilde{m}\frac{2\pi i}{I}} (e^{-2\pi\sqrt{-1}})^i \quad (101)$$

$$= \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i) e^{\sqrt{-1}\tilde{m}\lambda_i} \quad (102)$$

$$= \tilde{A}(-\tilde{m}). \quad (103)$$

であることを用いた.

Parseval の等式 (離散版)

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} |A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2 = \sum_{m=0}^{I-1} |\tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2 \quad (104)$$

$$= |\tilde{A}(0, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2 + 2 \sum_{m=1}^{I/2-1} |\tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2 + |\tilde{A}(\frac{I}{2}, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2.$$

(ただし A が実数の場合)

(105)

付録 B Held and Suarez(1994) 図表

ここでは, Held and Suarez(1994) の図 1~4 を示す.

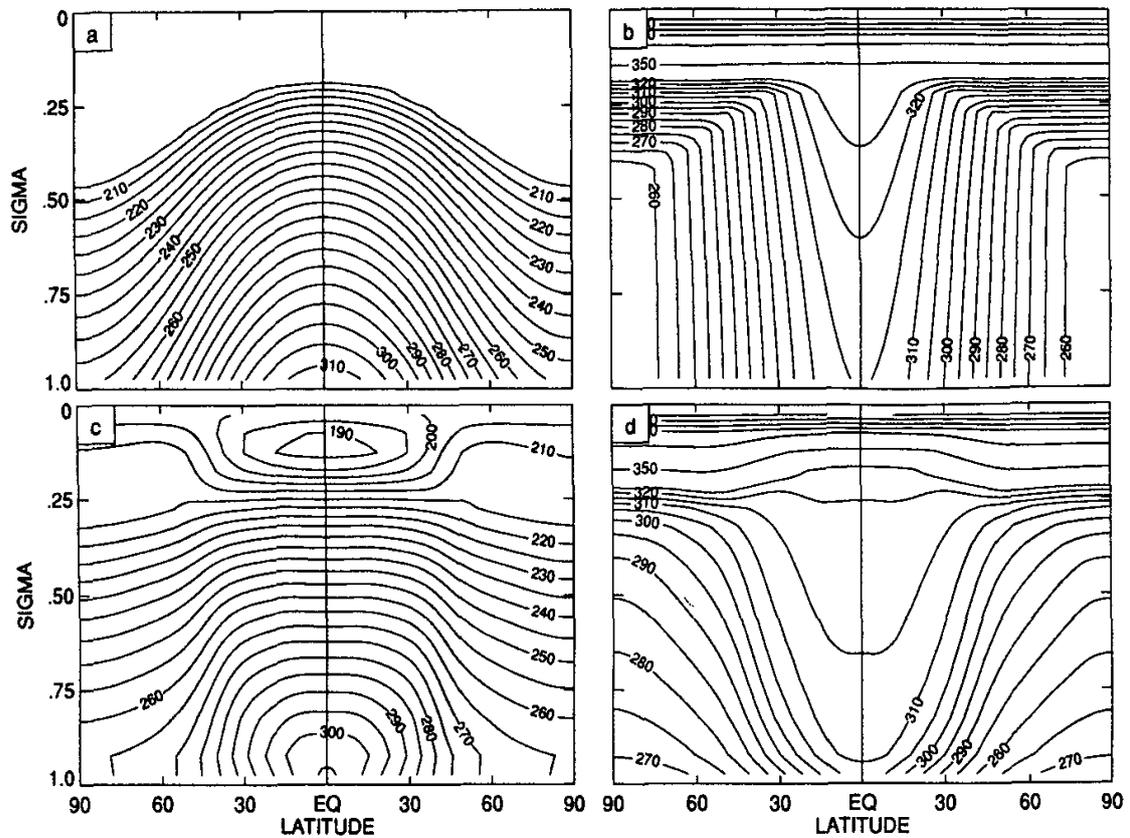


FIG. 1. The upper panels contain the prescribed radiative equilibrium temperature (a) and potential temperature (b) distributions. The lower panels contain 1000-day averages of the zonal mean temperature (c) and potential temperature (d) distributions produced by the G72 gridpoint model.

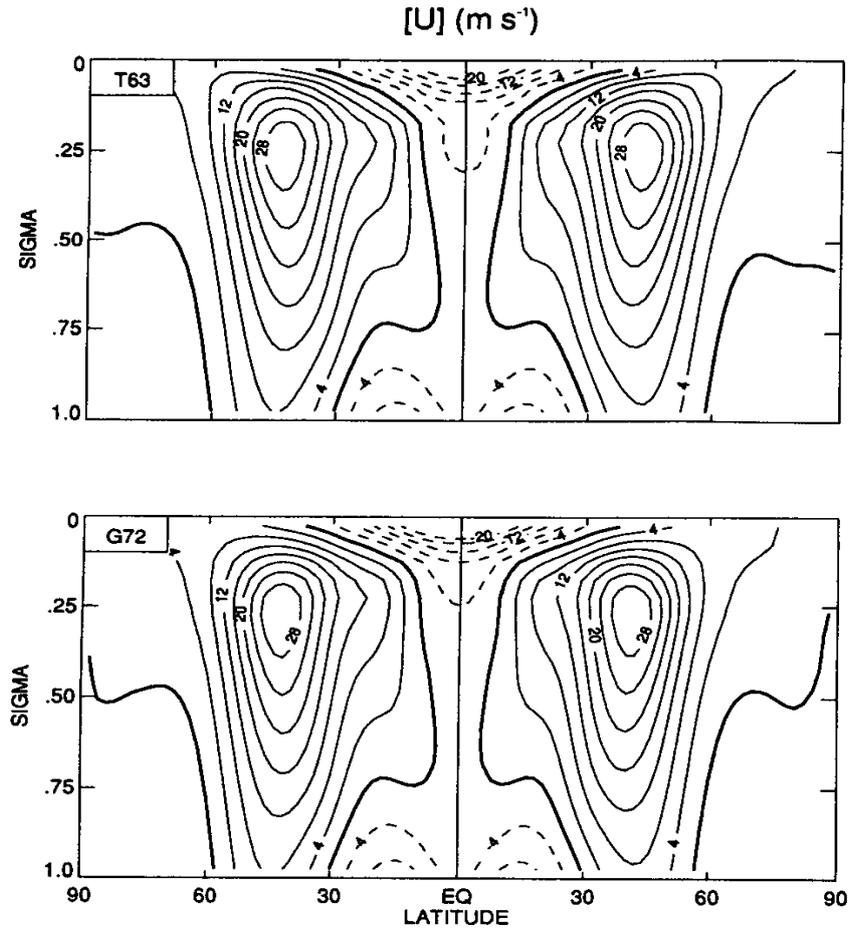


FIG. 2. The zonal-mean zonal wind produced by the T63 spectral model and G72 gridpoint model. Both are 1000-day means. Since the forcing is symmetric about the equator, differences between the hemispheres are indicative of sampling errors.

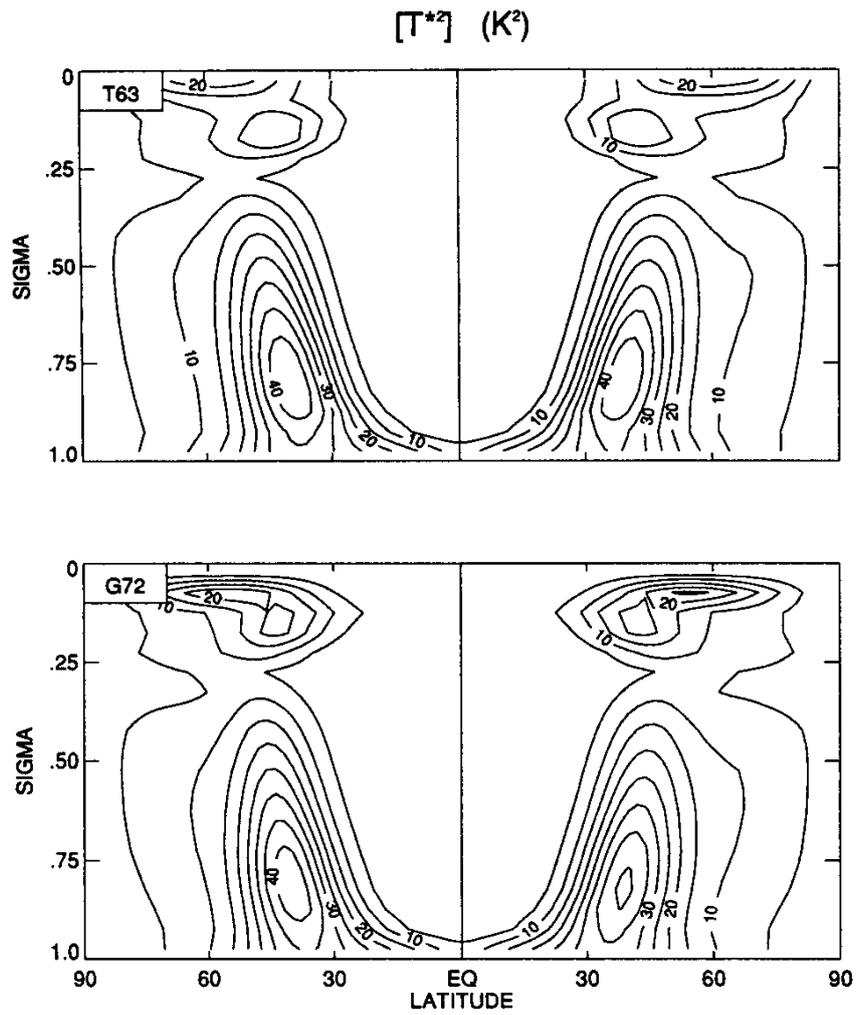


FIG. 3. As in Fig. 2 but for the eddy variance of the temperature.

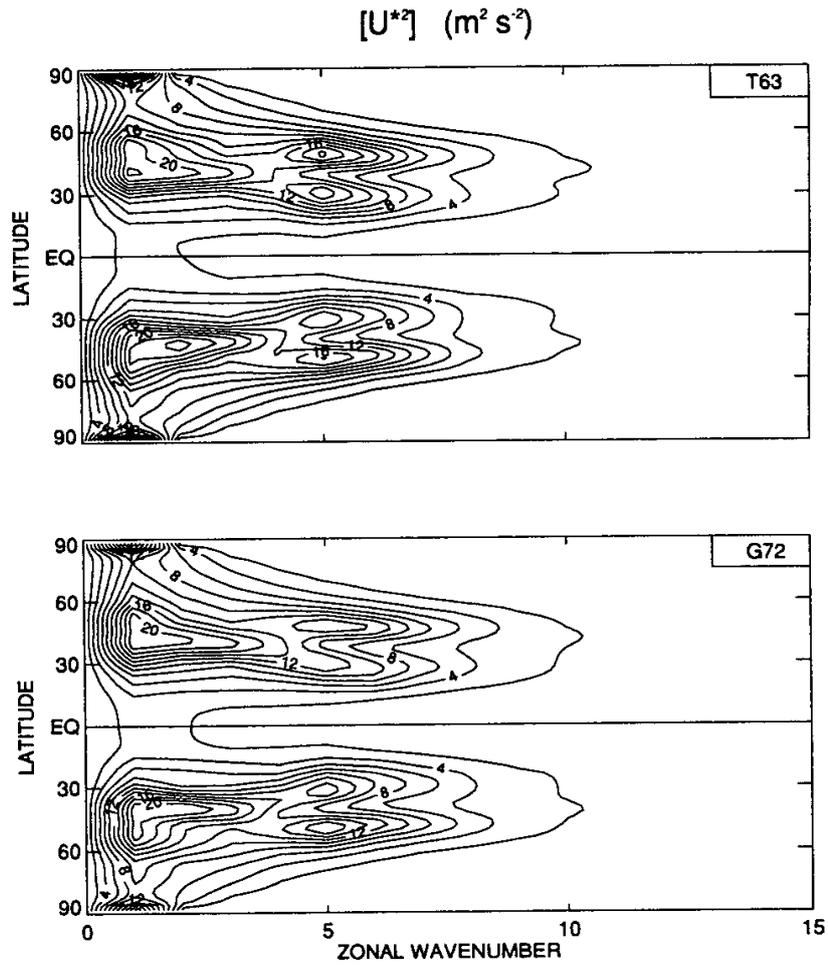


FIG. 4. As in Fig. 2 but for the vertically averaged zonal spectra of the eddy variance of zonal wind.

付録 C Held and Suarez(1994) 和訳

大気大循環モデルの力学コアの相互比較の提案

著者 : Issac M.Held and Max J.Suarez

出典 : Bulletin of the American Meteorological Society, vol.75, No.10, October 1994

訳 : 野口峻佑

要旨

大気大循環モデルの力学コアを、物理過程のパラメタリゼーションから独立に評価するためのベンチマークを提案した。このテストは、発達した大循環の長時間にわたる統計的性質に焦点を当てており、気候モデルで使われる力学コアの相互比較に特にふさわしいものになっている。このベンチマークの効用を示すために2つの大きく異なる力学コア(スペクトル法と有限差分法)を用い、両者の結果を比較した。2つの力学コアの長時間にわたる統計的性質は非常に似通っているということがわかった。これらの計算結果のいくつかをモデル間の相互比較の足がかりとして提出する。

1. 導入

気候モデルを整然と改良していくためには、大気大循環モデル(GCM)の注意深い評価と比較は必要不可欠である。現実的な境界条件を用いた様々なGCMによって生み出された気候シミュレーションの比較が現在、大気モデル相互比較プロジェクト(AMIP: Atmospheric Model Intercomparison Project)によって行われている(Gates(1992))。フルのGCMの評価は必要不可欠ではあるが、モデリングのコミュニティーではその相互比較の解釈の難しさが大いに認識されている。システムのなかでも理解の貧弱な部分についての特にサブグリッドスケールのプロセスでの、下さねばならない選択の数はあまりに多く、非常に近いモデル間でさえ徹底的に比べるのは難しい程である。さらには、実装の際の些細なことや異なるパラメタリゼーションの相互作用などにより、重大な違いがしばしば出てくる。同様の理由で、観測と比較されることによって同定されるシミュレーション中の誤差が、モデル内のどの過程によるものかを見つけるのは困難である。実際、“間違った”原因によりいくつかの気候学的特徴の現実的なシミュレーションがなされることもあるわけで、モデルの他の箇所を改良したら、ある特徴のシミュレーションが悪くなることもあるかもしれない。

これらの困難への論理的な対応は、GCMを個別に検証・比較できるモジュールにまで分解して考えようと試みることである。このアプローチの好例が気候モデルの放射コード相互比較(ICRCCM: Intercomparison of Radiation Code for Climate Models)プロジェクトでなされており(Ellingson *et al.* (1991); Fouquart *et al.* (1991)),そこではより精密ではあるが計算コストのかかるline by lineの計算に対しての、GCMで使われている幅広いパラメタリゼーションの検証に焦点が当てられている。同様の努力が地表面パラメタリゼーションの比較においてもなされている。(Henderson-Sellers *et al.* (1992))。我々はこれらのようなものを絞った、良くコントロールされた比較こそが、推進すべき最も生産的な方法であり、力学過程も含めてGCMのすべての側面にまで拡張するべきであると感じている。この記事で我々は、モデルの“力学コア”と呼ばれる部分においてそのような比較を行う方法を提案する。

全てのGCMは3次元の流れ場と大気の熱力学状態の時間発展の方程式を離散形式で解いている。並列計算記

機アーキテクチャーの出現により、これらの方程式を離散化するのに使われている標準的な数値スキームを注意深く見直す必要がでてきており、なおのこと新しいアプローチによる評価の需要がある。

Williamson *et al.*(1992) は、GCM で使われている 3 次元の運動方程式の代わりに球面上での非線形浅水方程式系を使った一連のテストを提案している。彼らは例えば、与えられた数値スキームが惑星波を振幅を減衰することなく伝播できるか、極を越えてトレーサーを輸送することができるかなどの、シミュレーション能力をテストすることを狙った、いくつかの初期値問題に対する解析的または高解像度での解を与えている。浅水解は水平離散スキームのパフォーマンスの価値ある指標を与えるが、このアプローチには 2 つの重大な限界がある。1) 3 次元の大気の流れ、つまり鉛直方向の離散化に関する問題を導入するだけで、また違った数値的要請が発生するかもしれない。2) 気候モデルにおいては、短期の、決定論的な正確さに集中することよりもむしろ、長期間の統計を直接的に評価できることの方が重要である。Williamson *et al.*(1992) のようなテストは数値天気予報モデルのようなモデルに向いており、そのようなモデルと気候モデルとは、精度と効率性、保存特性のあいだの適切なトレードオフ (の尺度) がかなり違うであろう。

我々は気候モデルで使われる力学コアでの、統計的定常状態の評価のためのベンチマーク計算を定義することを試みようとしている。これらのテストで我々は、詳細な放射・乱流・湿潤対流パラメタリゼーションを非常に単純化された強制と散逸に置き換えている。このアプローチにも問題はある。最も明らかなのは、真の解がわからないことである。我々は異なったモデリングのアプローチであっても解像度を上げていけば、真の解に収束すると推測しているが、もしこのような理想化された問題においてさえも収束が自明でなければ、現実的な GCM などではなおさら比較は容易ではないということを心に留めておかねばならない。もうひとつの問題は、モデルで積分される時間は有限期間であるので、超低周波変動によるサンプリングエラーにより、統計的定常状態を定義することが困難にならないかということである。しかしながら、この問題は実際の気候シミュレーションにおいても留意されるべきものである。

我々が力学に焦点を絞ったテストを提案するまた別の動機は、モデリングのコミュニティーに対して容易に交換が可能な基準力学コアモジュールをつくっていくきっかけを与える、というものである。物理パラメタリゼーションのための、基準となる、”互換性のある”コードの重要性は Kalnay *et al.*(1989) でも議論されている。我々はこれらのアイデアを可能な限り拡張し、力学コアのデザインをしたいと思う。気候モデルのなかで使われているすべてのコードが自由に交換できるようにとの精神で、我々は以下に示す結果を出すのに用いた Fortran コードを一般に公開することにする。

我々の提案したこのベンチマーク計算の最初のシリーズがこのレポートに書かれている。その利用例として、2 つの GCM の力学コア (一方はスペクトル法、もう一方は有限差分) の比較にこのベンチマークを用いた。両者は、我々の研究室で気候研究に使われている、非常に近いコードである。我々はここで 2 つのモデルの気候学的統計のみしかサンプルを出さないが、より詳細な比較に興味のある者にはより完全な結果を提供することができる。また別の研究では、我々はここで提案した結果をより詳しくみるつもりである。特に、我々はこれらの 2 つのモデルを水平・鉛直解像度の関数とみなし、その振る舞いを調べ、散逸の選択に対する感度について議論するつもりである。

2. 最初のベンチマーク計算

強制と散逸をデザインするのに、我々は帯状対称な温度場に対しての単純なニュートン冷却、境界層摩擦を表現するのに下層風に対してのレイリー摩擦を用いた。GCM にこのような強制を加えるのは比較的一般的であり、特に 2 層モデル (Hendon and Hartmann(1985) と Suarez and Duffy(1992) などが球面での例である) ではその傾向が強い。より鉛直解像度の高いモデルで使用された最近の例としては、James and James(1989) と Yu and Hartman(1993) がある。我々の仕様の詳細は反対ページの枠内に書かれている*5。

我々は回転球面上の理想気体の大気からスタートする。地形はなく、表面は重力ポテンシャル一定のところにある。流れが静水圧平衡に従うかどうかは問わない。大抵の全球モデルでは静水圧平衡を仮定しているが、これは問題の仕様の部分というよりはむしろモデルの選択での問題である。上部境界条件も指定しないままにしてある。例えば、ある高度や気圧で rigid lid 条件を課すかどうかなどもモデルの選択の問題である。フォーシングパラメータは別として、我々が決める必要があるのは R (気体定数)、 c_p (定圧比熱)、 g (重力加速度)、 a_e (球の半径)、 p_0/g (大気的全質量) だけである。非静力学モデルの場合に限り重力加速度も決めてやる必要がある。

唯一指定される散逸については、単純な速度に対して線形なダンピングである。ダンピングの強さ k_v は $\sigma = p/p_s$ の関数であり、ここで p は気圧、 p_s は瞬間毎の地表面気圧である。将来的には地形も入れた計算をすることを視野に入れ、我々はここで鉛直座標には p よりも σ ("境界層" がこれに沿うことになる) を用いることとする。このダンピングは地表面近く ($\sigma \geq 0.7$) でのみゼロではない。

温度は緯度 φ と気圧 p の関数として事前に決められる"放射平衡"温度 T_{eq} へと緩和される。この温度場とそれに対応する温位場は図 1 a,b に示されている。このような放射平衡は、熱帯で比較的大きく、極に行くにしたがってゼロへと減っていくような正の静的安定度で与えられる。この熱帯の静的安定度は湿潤対流の効果を入れたものとして考えることもできるが、それは誤解を招きやすいので、単純に、それを加えることで重力不安定の出現を抑える人為的なものと考えた方が良いだろう。

放射緩和時間もまた緯度 φ と高度 σ の関数である。もしこの緩和時間を全域で長くすると、非現実的な冷たい薄い層が、特に熱帯で、地表面近くに発達する。この効果を減らすため、この領域では緩和時間を大きくしたが、この浅い安定層の痕跡がいくらか解に残ってしまっている。これは "G72" 有限差分モデル (後述) によって得られた、気温場、温位場の時間平均を表した図ではっきりと見て取れる (図 1c,d)。温位場はまた、温帯域でのその放射平衡値でも、力学は静的安定を保っていることを示している。

このモデルの仕様では陽的な拡散は何も入れていない。我々はサブグリッドスケールの拡散は数値スキームの一部だと考えたい (well-posedness のために分子粘性、拡散があると考えられるかもしれないが、私たちが全球気候モデルで解像できると望めるスケールでは、無視できる程である)。これによって我々は、サブグリッドスケールの混合を要する保存的なスキームと散逸的にデザインされたスキームとを公正に取り扱うことができる。滑らかな大規模スケールの解を生み出す、大きな拡散を選ぶことにより、我々が提案した事実上無限大のレ

*5 図表は付録 B にまとめて載せてある。仕様の詳細 (強制・散逸のデザイン、各パラメータの値) は本文中に記載。

イノルズ数の問題からかなり離れた問題をつくることもできるであろう。我々の目標は単なる滑らかな流体の正確なシミュレーションではなく、大気のように乱流カスケードを通じてすべての解像できるスケールでの運動を生み出す流体の最適な取扱いである。

以下に記述した 2 つのモデルで、我々は非常にスケール選択性のある水平混合しか導入せず、鉛直混合（拡散も対流調節も）は除外した。特に低緯度で、重力的に不安定な領域が時折形成されたが、その領域での鉛直混合を強化することなくモデルは安定に積分することができた。

3. 相互比較の例

大気気候モデルの力学コアの基準を打ち立てるプロセスを開始するために、我々は自身らのモデルで長時間積分を行った。用いたモデルはまったく別の手法で離散化がなされており、著者ら 2 人によって独立にコーディングされたものである。

a. モデル

スペクトルモデルは、Bourke(1974) によって記述された形の渦度-発散形式での、標準的な静水圧、 σ 座標、セミインプリシット、スペクトル変換モデルである。変換グリッドは通常通り、二次の積のエリアジングがないように選ばれている。鉛直の離散化にはもっとも単純な中心差分を用い、温度が各層で一定であると仮定して、静水圧の式が解析的に積分される。この離散化はエネルギーを保存しない。鉛直層数 20 層の等間隔 σ 座標であり、上端で形式的に気圧がゼロになるように設定されている。時間積分にはリーブフロッグスキームが用いられ、計算モードをコントロールするために Robert(1966) の時間フィルターが使われている。渦度、発散、気温の水平混合には 4 次のラプラシアンが用いられ、最小波長の e-folding time は 0.1 日に設定してある。波数切断には三角切断を用いている。我々は 4 つの解像度 (T21, T30, T42, T63, ここでの数字は存在する最大帯状波数である) で積分を実行したが、この報告では T63 での結果についてのみ述べる。モデルコードは Issac Held(e-mail : ih@gfdl.gov) より入手可能である。

有限差分モデルもまた静水圧で σ 座標を用い、20 層の等間隔である。鉛直の離散化には、Arakawa and Suarez(1983) で提案されたものを用いる。緯度-経度グリッドには、Arakawa の C グリッドが水平離散化手法として用いられる。水平有限差分スキームは、渦度の水平移流（これには 4 次の Arakawa(1966) ヤコビアンを用い、非発散流に対して 4 次の精度となる）を除いて、2 次の精度である。緯度 45 度より極側では、小さな帯状スケールの運動を減衰させるように、全ての時間発展にフーリエフィルターが適用されている。陽的なリーブフロッグ時間ステップが用いられ、圧力勾配力は Brown and Campana(1978) で提案されているように平均化されている。リーブフロッグの計算モードは、スペクトル法での方法とまったく同じようにコントロールされている。また、格子点ノイズを Shapiro(1970) の 8 次フィルターでコントロールしている。このフィルターは、1.5 時間の有効 e-folding time で 2Δ -wave を減衰させている。スペクトルモデルと同様に、4 つの解像度 (6×7.5 , 4×5 , 3×3.75 , 2×2.5) で積分を実行した。もっとも高解像度のものを G72 と名付けた（ここでの数字は緯度円まわりの格子点数の半分である）。有限差分力学コアについての詳細は、Suarez and Takacs(1995) に記述されている。そのレポートとコードは Max Suarez(e-mail : suarez@nino.gsfc.nasa.gov) より入手可能で

ある。

b. 結果

示されるすべてのケースで 1200 日間積分している。各ケースでのモデルの気候は、最後の 1000 日の平均から得られる。スペクトルモデルの積分は、等温大気に対称性を崩すために初期擾乱を加えた状態から始めている。格子点モデルの積分は、加えている強制と平衡状態に達した、低解像度モデルの結果から始めている。最初の 200 日は捨てることで、イニシャライゼーションの違いによって大きな違いが生じる可能性を排除している。

2 つのモデルによって得られた気候学的描像が、図 2 から 4 に表されている [帯状平均帯状風 (図 2, 緯度 φ と高度 σ の関数), 温度擾乱分散 (図 3, 緯度 φ と高度 σ の関数), 帯状風擾乱分散の帯状スペクトル (図 4, 帯状波数 m と緯度 φ の関数)]。与えた強制は赤道に対して対称なので、我々は両半球の気候の差を 1000 日平均でのサンプリング誤差のクイックチェックとして利用することができる。

これらの図から、我々の単純な強制と散逸が比較的まとまな子午面循環をつくりだしていることがわかる。緯度 45 度付近に最大強度およそ 35m/s のシングルジェットが形成されている。ジェットは $\sigma = 0.2$ より上でシアが逆転し、閉じている。地表面での西風は緯度 45 度付近で 8m/s 程に達している。モデルの成層圏では、赤道上の東風が存在する。温度擾乱の分散には中緯度で 2 つの極大が、下部対流圏と対流圏界面上に存在する。地表面近くで温度分散が熱帯域に侵入しており、これは現実的でない特徴である。帯状風擾乱の分散スペクトルには、ストームトラックの側面として帯状波数 5 の辺りに 2 つの極大 (極側の方が少し大きい) が存在し、また波数 1 と 2 にも、ストームトラックの中心に 3 番目の極大が存在する。また、極をまたぐ流れに関係して極の波数 1 にもう 1 つピークが存在する。

これらの図から、2 つのモデルがかなり違う離散化手法をとっているにも関わらず、驚くほど一致していることがわかる。成層圏では温度擾乱の分散が大きく異なっているが、これは鉛直の離散化手法の違いと成層圏での解像度が粗いことのせいであると考えている。他にも、図からははっきりとしないが、格子点モデルではスペクトルモデルより極付近でのノイズが大きいなどの差異がある。これらの積分が終了した後、運動方程式の極での扱いを少し修正することにより、このノイズはかなり減らせることは分かったが、完全に除去することはできなかった。が、この変更は他の統計量にあまり重大な影響はもたらさない。有限差分での極での詳細については、Suarez and Takacs(1993) で述べられている。

これら特定のスペクトルモデルと格子点モデルで一致が得られたからといって、我々の問題に対する真の解が得られたと解釈することはできない。どこかで記されるであろう、追加の計算では、両モデルの気候が解像度に敏感であり、ここで示した解像度での結果に収束していないということがわかった。解はもしかしたら、この 2 つのモデルの一致が示唆するのよりもはるかに、パラメーターの選択やモデルの定式化に対して敏感なのかもしれない。例として、同じ計算を 2 次精度バージョンの有限差分力学コアで行ってみたが、大気大循環の様相はここで提出したものはかなり違ったものとなった (ジェットは絞られ、赤道方向へ移動し、地表面での風と運動量擾乱輸送はかなり弱くなった)。このように、現在のパラメータは流れのレジームの転移点に近いところにあるのかもしれない (そのような転移の存在のヒントは、地表面の摩擦を変えたときにも垣間見ることができ

る)。もし流れのレジームがモデルのパラメータに敏感ならば、このテストはモデルの数値計算の質を表す非常に敏感な指標となりうる。モデル間の違いを理解するためには解をパラメータの関数として研究する必要があるが。

4. 将来の方向

我々は大気気候モデルの力学コアの相互比較のためのテストや基準を打ち立てることに興味をもち、テストが使いやすいものであるために以下の 2 つの条件を満たしているべきであるとした。(1) 可能な限り (特に湿潤対流、雲、惑星境界層などの) 物理パラメタリゼーションの複雑さから力学部分を隔離せねばならない。(2) 現実的な 3 次元大循環の長期間の統計的性質を評価せねばならない。我々が提案したベンチマーク計算はこれらの要件を満たし、そのような相互比較の良いスタートポイントになり得るのではないかと感じている。もちろん現在の定式では足りないところがあることは認識している。例えば、鉛直分解能を上げた時、いくらか鉛直混合が必要となるだろうが、現在与えられている摩擦の定式化のもとで最も望ましい下部境界条件が何であるかはさだかではない。このような間違いの危険を孕みながらも、行われた計算の結果は十分に気象学的であり、2 つの非常に異なるモデルで得た解はよく似通っているので、我々は有用なテストを提案できたのではないかと思う。我々は他のグループにも、それぞれのモデルを使って追試を行ったり、他の簡単な強制を試したり、結果を共有させてもらったりして、この試み加わって欲しいと願っている。

ここに提出した統計は、相互比較のための興味深い結果のほんの一部でしかない。他にも興味深いものがいくつもある (コヒーレントな傾圧波の波束構造の計測、西へ伝播する外部モードの共鳴の振幅とスペクトル幅、モデルの成層圏の重力波活動度...)。受動トレーサーを加えれば流れのラグランジュ的な統計量が容易にわかり、輸送アルゴリズムの評価に利用できるかもしれない。座標系や放射平衡温度を回転させ、ストームトラックの中に数値計算上の極を配置し、その結果の気候における対称性を調べることによって、モデルの極の取扱いをテストしてみるのも興味深い。我々は第 2 のベンチマーク計算でのテストを開始しており、そこでは中緯度に理想的な地形を導入している。この計算は、 σ 座標系とそれに代わるものを比較したり、モデルの選択に対する低周波惑星波の活動度の感度を評価するのに便利なものとなるであろう。

参考文献

- [1] 森川 靖大, 石渡 正樹, 高橋 芳幸, 土屋 貴志, 山田 由貴子, 小高 正嗣, 堀之内 武, 林 祥介, DCPAM 開発グループ, 2008: 惑星大気モデル DCPAM, <http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/>, 地球流体電脳倶楽部.
- [2] Held, I. M., and Suarez, M. J., 1994: A proposal for the intercomparison of the dynamical cores of atmospheric general circulation models. *Bull. Am. Meteor. Soc.*, **75**, 1825–1830.
- [3] http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf
- [4] http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf
- [5] Arakawa, A., and Suarez, M. J., 1983: Vertical Differencing of the Primitive Equations in Sigma Coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 34-45.
- [6] Asselin, R., 1972: Frequency Filter for Time Integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487-490.
- [7] 堀之内 武, 水田 亮, 塚原 大輔, 西澤 誠也, 竹広 真一: 電脳 Ruby プロジェクト: GPhys, <http://ruby.gfd-dennou.org/products/gphys/>