

DCPAM による Held and Suarez(1994) 力学コア標準実験

野口峻佑

京都大学理学部 地球物理学教室 気象学研究室

2011年3月26日

目次

| | | |
|------|--------------------------|----|
| 1 | はじめに | 2 |
| 2 | 実験設定 | 2 |
| 2.1 | 外力の設定 | 2 |
| 2.2 | 支配方程式系 | 2 |
| 2.3 | 離散化手法 | 6 |
| 3 | 結果 | 8 |
| 3.1 | 温度場 | 8 |
| 3.2 | 帯状風 | 9 |
| 3.3 | 温度擾乱の分散 | 10 |
| 3.4 | 帯状風の帯状擾乱スペクトル | 12 |
| 4 | まとめ | 14 |
| 付録 A | 帯状風の帯状擾乱スペクトルの計算手順 | 15 |
| A.1 | 帯状風の帯状擾乱の計算 | 15 |
| A.2 | スペクトルの計算 | 15 |
| A.3 | 時間平均・鉛直平均 | 16 |
| A.4 | 擾乱スペクトルの物理的意味付け | 16 |
| A.5 | 描画プログラム | 18 |
| A.6 | Parseval の等式の証明 | 19 |
| 付録 B | Held and Suarez(1994) 図表 | 22 |

1 はじめに

地球流体電脳倶楽部惑星大気大循環モデル DCPAM[1] を用いて, Held and Suarez(1994)[2](以降 HS94 と表記) により提案された力学コア標準実験を行った. この文書では, その実験設定と結果について記述する.

力学コア標準実験では, 大気大循環モデル (GCM) の力学過程の長期的性質を物理過程から切り離して評価することを目的としている. そのために, 力学過程の方程式系に人工的な外力として Newton 冷却と Rayleigh 摩擦を与え, モデルを長期間走らせた結果の気候学的状態をモデル間で比較することを行う.

2 実験設定

2.1 外力の設定

HS94 は, モデルの力学過程の熱力学方程式と水平方向の運動量方程式に対して, 非断熱加熱 (Newton 冷却) Q と散逸強制 (Rayleigh 摩擦) $\mathbf{F} = (F_\lambda, F_\varphi)$ を以下のような単純な算術表現で与え, 物理過程の代わりとすることを提案している.

$$Q = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{diab} = -k_T(\varphi, \sigma)[T - T_{eq}(\varphi, p)], \quad (1)$$

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} \right)_{fric} = -k_v(\sigma)\mathbf{v}_H. \quad (2)$$

ここで φ は緯度, T は温度場, $\mathbf{v}_H = (u, v)$ は水平風速, $\sigma = p/p_s$ は地表面気圧で規格化された圧力である. T_{eq} は Newton 冷却により緩和される際の基本温度場 (放射平衡温度場) であり, 以下の形で与えられる.

$$T_{eq}(\varphi, p) = \max \left\{ 200K, \left[315K - (\Delta T)_y \sin^2 \varphi - (\Delta \theta)_z \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \cos^2 \varphi \right] \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa \right\}. \quad (3)$$

Newton 冷却および Rayleigh 摩擦の緩和係数 k_T と k_v は以下の形で与えられる.

$$k_T(\varphi, \sigma) = k_a + (k_s - k_a) \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right) \cos^4 \varphi, \quad (4)$$

$$k_v(\sigma) = k_f \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right). \quad (5)$$

式 (3),(4),(5) に現れているパラメータの値は表 1 のように提案されている. 図 1 は式 (4),(5) で与えられる k_T , k_v の鉛直分布と k_T の緯度および鉛直分布を示している. 図 2 は式 (3) で与えられる基本温度場 T_{eq} と, 対応する温位場の子午面図を描いている.

2.2 支配方程式系

次に, 今回用いた大気大循環モデル DCPAM の力学コアモデル dcpam5-primitive について述べる^{*1}. dcpam5-primitive は, 球面緯度経度座標 (λ, φ) および鉛直 σ 座標で表されたプリミティブ方程式系を解

^{*1} 詳細は『dcpam5 支配方程式系の導出に関する参考資料』[3], 『dcpam5 支配方程式系とその離散化』[4] を参照のこと.

| パラメータ | |
|--------------------------|-----------------------------------|
| 境界層の上端 | $\sigma_b = 0.7$ |
| 地表面での Rayleigh 摩擦の緩和係数 | $k_f = 1[\text{day}^{-1}]$ |
| 大気上層における Newton 冷却の緩和係数 | $k_a = 1/40[\text{day}^{-1}]$ |
| 赤道地表面における Newton 冷却の緩和係数 | $k_s = 1/4[\text{day}^{-1}]$ |
| 極と赤道の温度差 | $(\Delta T)_y = 60[\text{K}]$ |
| 赤道における鉛直方向の温位差 | $(\Delta\theta)_z = 10[\text{K}]$ |

表 1 力学コア実験の外力の形を定める各パラメータの値.

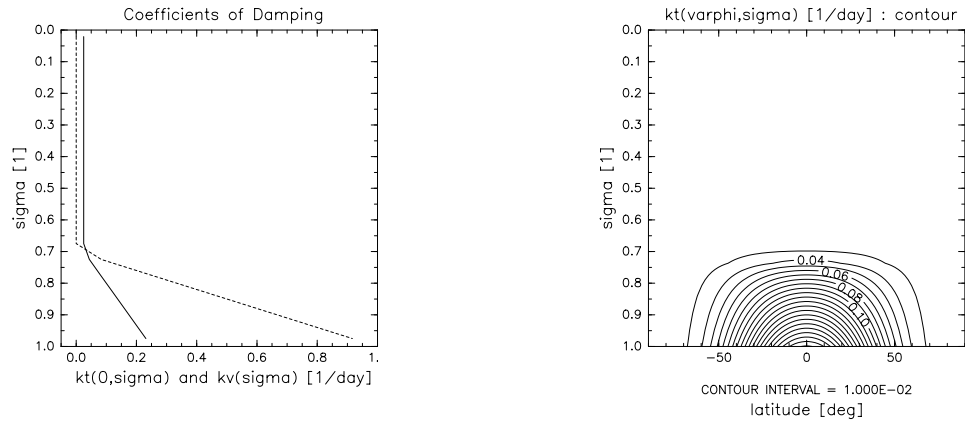


図 1 左図: Newton 冷却の緩和係数 k_T (実線) と Rayleigh 摩擦の緩和係数 k_v (点線). k_T は赤道上での値を表示している. 右図: k_T の緯度・高度座標での等値線図. 両図とも後に示す実験設定に合わせ, σ 座標を 20 層に分割して図示している.

くものである. これは以下に挙げる基礎方程式から構成されている.

運動量方程式

$$\frac{Du}{Dt} - fv - \frac{uv}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{RT}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + F_\lambda, \quad (6)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + \frac{u^2}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{RT}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + F_\varphi, \quad (7)$$

熱力学の式

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{RT}{C_p} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right\} + \frac{Q}{C_p}, \quad (8)$$

連続の式

$$\frac{D\pi}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0, \quad (9)$$

静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma}. \quad (10)$$

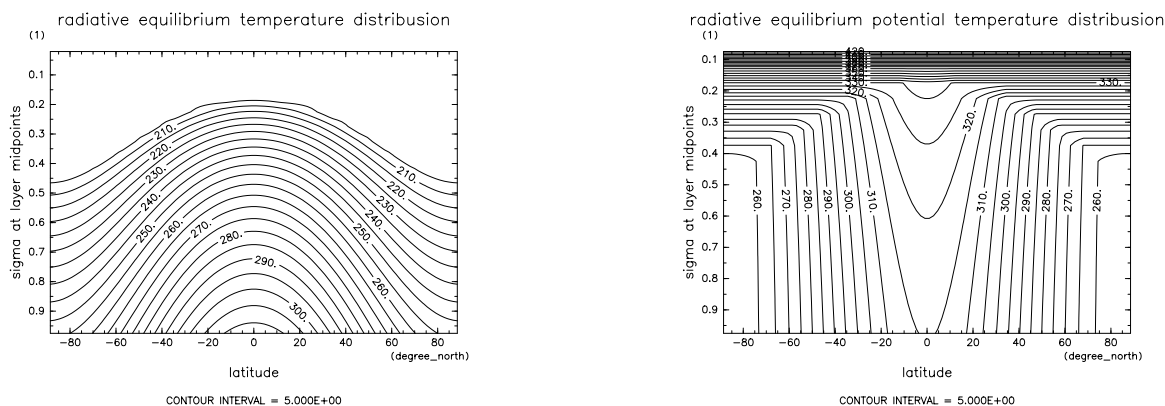


図 2 Newton 冷却の基本温度場 T_{eq} と, 対応する基本温位場の子午面図. HS94 の図 1(a) と (b) に相当する.

ここで

$$\frac{D}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad (11)$$

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} gz, \quad (12)$$

$$\pi \stackrel{\text{def}}{=} \ln p_s, \quad (13)$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} 2\Omega \sin \varphi. \quad (14)$$

式 (6),(7),(8) 中の F_λ , F_φ , Q は前節で記した HS94 で提案された外力項である. 式 (6)-(14) に用いられている各物理定数は表 2 のように与える.

| 物理定数 | |
|-------------------|--|
| 地表面気圧 | $p_0 = 1000[\text{hPa}]$ |
| 定圧比熱 | $C_p = 1004[\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$ |
| 乾燥大気的气体定数と定圧比熱との比 | $\kappa = R/C_p = 2/7$ |
| 回転速度 | $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}[\text{s}^{-1}]$ |
| 重力加速度 | $g = 9.8[\text{ms}^{-2}]$ |
| 地球半径 | $a = 6.371 \times 10^6[\text{m}]$ |

表 2 力学コア標準実験で用いる各物理定数の値.

これらの基礎方程式系をモデル内で計算している支配方程式系に変形する. まず, 球面上での取扱いを容易にするために以下のように変数を定義する.

$$U \stackrel{\text{def}}{=} u \cos \varphi, \quad V \stackrel{\text{def}}{=} v \cos \varphi, \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \sin \varphi. \quad (15)$$

次に、水平風の渦度 ζ と発散 D を導入する。

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right), \quad (16)$$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial \mu} \right). \quad (17)$$

温度は基本場と擾乱に分離する。

$$T(\lambda, \varphi, \sigma, t) = \bar{T}(\sigma) + T'(\lambda, \varphi, \sigma, t). \quad (18)$$

さらに計算の安定化のために、水平拡散を以下の形の超粘性として与える。

$$\mathcal{D}_{HD}(\zeta) = -K_{HD} \left[(-1)^{N_D/2} \nabla^{N_D} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{N_D/2} \right] \zeta, \quad (19)$$

$$\mathcal{D}_{HD}(D) = -K_{HD} \left[(-1)^{N_D/2} \nabla^{N_D} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{N_D/2} \right] D, \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_{HD}(T) = -(-1)^{N_D/2} K_{HD} \nabla^{N_D} T. \quad (21)$$

ここで緩和係数 K_{HD} と次数 N_D の値は、HS94 で例示されているスペクトルモデルの設定に従い、最大波数に対する e-folding time が 0.1 日、拡散が 4 次のラプラシアン ($N_D = 8$) となるようにする*2。以上の操作により得られるモデルの支配方程式系をまとめると以下ようになる。

運動量方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V_A}{\partial \lambda} - \frac{\partial U_A}{\partial \mu} \right) + \mathcal{D}_{HD}(\zeta), \quad (22)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U_A}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_A}{\partial \mu} \right) - \nabla_\sigma^2 (\Phi + R\bar{T}\pi + KE) + \mathcal{D}_{HD}(D), \quad (23)$$

熱力学の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial(UT')}{\partial \lambda} + \frac{\partial(VT')}{\partial \mu} \right) + T'D \\ & - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{Q}{C_p} + \mathcal{D}_{HD}(T), \end{aligned} \quad (24)$$

連続の式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi = -D - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}, \quad (25)$$

*2 K_{HD} の値は解像度に依存する。解像できる最大の波数を N_{tr} 、温度擾乱の最大波数に対する e-folding time を τ_{HD} とすると、緩和係数 K_{HD} の値は以下の式で与えられる。

$$K_{HD} = \frac{1}{\tau_{HD}} \left\{ \frac{N_{tr}(N_{tr}+1)}{a^2} \right\}^{-N_D/2}.$$

後に示す実験設定に合わせ、 $N_{tr} = 63$ とし、 $\tau_{HD} = 0.1[\text{day}^{-1}]$ 、 $N_D = 8$ 、 $a = 6.371 \times 10^6[\text{m}]$ を代入すれば、 $K_{HD} \simeq 1.0 \times 10^{41}[\text{m}^8 \text{day}^{-1}]$ であることがわかる。なお、式 (19),(20) の形からもわかるとおり、運動量方程式の水平拡散項には全角運動量を保存するための項が加わるため、 ζ と D の e-folding time は τ_{HD} とは若干異なることに注意されたい。

静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma}. \quad (26)$$

ここで

$$U_A = (\zeta + f)V - \dot{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + F_\lambda \cos \varphi, \quad (27)$$

$$V_A = -(\zeta + f)U - \dot{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \frac{RT'}{a} (1 - \mu^2) \frac{\partial \pi}{\partial \mu} + F_\varphi \cos \varphi, \quad (28)$$

$$KE = \frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)}. \quad (29)$$

また

$$\dot{\sigma} = \frac{D\sigma}{Dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma}, \quad (30)$$

$$\nabla_\sigma^2 = \frac{1}{a^2(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right], \quad (31)$$

$$\mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi = \frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \mu}. \quad (32)$$

2.3 離散化手法

最後に、前節で記したモデル支配方程式系の離散化手法の概略について述べる。depam5-primitive では

- 水平離散化にはスペクトル法を用いる。
 - 展開関数には球面調和関数を用い、三角波数切断を適用する。
- 鉛直離散化には格子差分として Arakawa and Suarez(1983)[5] のスキームを用いる。
 - 物理量は ζ, D, T が整数レベルに、 $\dot{\sigma}$ が半整数レベルに振り分けられている。
- 時間積分には semi-implicit スキームを用いる。重力波に関する項には台形型 implicit スキームを、その他の項には leapfrog スキームを適用する。
 - leapfrog スキームを用いることにより生じる計算モードの増幅を抑えるため、Asselin(1972)[6] の時間フィルターを 1 ステップ毎に用いている。

今回の実験では、解像度は、HS94 にて例示されているスペクトルモデルの波数に従い、最大切断波数 63(経度方向の格子点数 $I = 192$, 緯度方向の格子点数 $J = 96$), 鉛直層数 $K = 20$ とする (T63L20)。ここで、鉛直層の配置は σ 座標で等間隔である。250[K] の等温大気に対称性を崩す微小擾乱を加えた値を初期値として 1200 日間積分し、初めの 200 日をスピニング時間として切り捨てた残りの 1000 日間について解析を行う。また時間刻み幅は、HS94 で示されているスペクトルモデルの設定に合わせて $\Delta t = 15$ 分とする。

今回行った力学コア標準実験の実験設定は以下のようまとめられる。

実験設定まとめ

モデル支配方程式系

- dcpam5-ptimitive
 - 球面緯度経度 (λ, φ) 座標および鉛直 σ 座標のプリミティブ方程式系
- HS94 型の外力
 - 単純な Newton 冷却 Q と Rayleigh 摩擦 \mathbf{F}

$$Q = -k_T(\varphi, \sigma)[T - T_{eq}(\varphi, \sigma)], \quad (33)$$

$$\mathbf{F} = -k_v(\sigma)\mathbf{v}_H. \quad (34)$$

ここで

$$T_{eq}(\varphi, p) = \max \left\{ 200K, \left[315K - (\Delta T)_y \sin^2 \varphi - (\Delta \theta)_z \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \cos^2 \varphi \right] \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa \right\}, \quad (35)$$

$$k_T(\varphi, \sigma) = k_a + (k_s - k_a) \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right) \cos^4 \varphi, \quad (36)$$

$$k_v(\sigma) = k_f \max \left(0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right). \quad (37)$$

- 水平拡散：最大波数に対する e-folding time が 0.1[day] の 4 次のラブラシアン

離散化手法

- 水平方向：スペクトル法
- 鉛直方向：格子差分 (Arakawa and Suarez, 1983)
- 時間方向：semi-implicit
- 解像度：三角波数切断 63, 鉛直格子点数 20 点 (T63L20)
- 時間間隔/積分期間： $\Delta t = 15[\text{min}]$ で 1200[day]
- 初期値：微小擾乱が加えられた 250[K] の等温大気

各パラメータおよび物理定数

| | | | |
|--------------------------|------------------------------------|--------------|--|
| 境界層の上端 | $\sigma_b = 0.7$ | 地表面気圧 | $p_0 = 1000[\text{hPa}]$ |
| 地表面での Rayleigh 摩擦の緩和係数 | $k_f = 1[\text{day}^{-1}]$ | 定圧比熱 | $C_p = 1004[\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$ |
| 大気上層における Newton 冷却の緩和係数 | $k_a = 1/40[\text{day}^{-1}]$ | 気体定数と定圧比熱との比 | $\kappa = R_d/C_p = 2/7$ |
| 赤道地表面における Newton 冷却の緩和係数 | $k_s = 1/4[\text{day}^{-1}]$ | 回転速度 | $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}[\text{s}^{-1}]$ |
| 極と赤道の温度差 | $(\Delta T)_y = 60[\text{K}]$ | 重力加速度 | $g = 9.8[\text{ms}^{-2}]$ |
| 赤道における鉛直方向の温位差 | $(\Delta \theta)_z = 10[\text{K}]$ | 地球半径 | $a = 6.371 \times 10^6[\text{m}]$ |

3 結果

ここでは、前章までで与えられた実験設定で DCPAM を走らせることで得られた結果について見ていく。

3.1 温度場

まず、HS94 の図 1(c),(d) と比較するために、温度場 T と対応する温位場 θ の帯状・時間平均の計算法について説明する。

数式表現

帯状平均・時間平均をそれぞれ以下のように定義する。

$$[A](\varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda, \quad (38)$$

$$\bar{A}(\lambda, \varphi, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) dt. \quad (39)$$

ここで、解析に使う時間範囲は、初めの 200 日をスピニングとして切り捨てた 1000 日間である ($t_0 = 200$, $\tau = 1000$). 以降の時間平均も同様). 以上の定義により、温度場 T , 温位場 $\theta = T(p/p_0)^{-\kappa}$ の帯状・時間平均は以下のように表される。

$$\overline{[T]}(\varphi, \sigma) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda \right\} dt, \quad (40)$$

$$\overline{[\theta]}(\varphi, \sigma) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda \right\} dt. \quad (41)$$

以上の操作を $A(\lambda, \varphi, \sigma, t) \rightarrow A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)$, ($i, j, k, n \in \mathbb{N}$) のように変数 $A(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ を離散化した状態で表現すると、

$$[A](\varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n), \quad (42)$$

$$\bar{A}(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (43)$$

ただし、 I は経度方向の格子点数、 N は総時間ステップ数である。よって、帯状・時間平均した温度場と温位場の最終表現は以下ようになる。

帯状・時間平均温度場

$$\overline{[T]}(\varphi_j, \sigma_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} T(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \right\}. \quad (44)$$

帯状・時間平均温位場

$$\overline{[\theta]}(\varphi_j, \sigma_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} T(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \left(\frac{p(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)}{p_0} \right)^{-\kappa} \right\}. \quad (45)$$

描画結果

DCPAM によって生成されたデータに対して、式 (44),(45) の操作を施した結果が図 3 である。

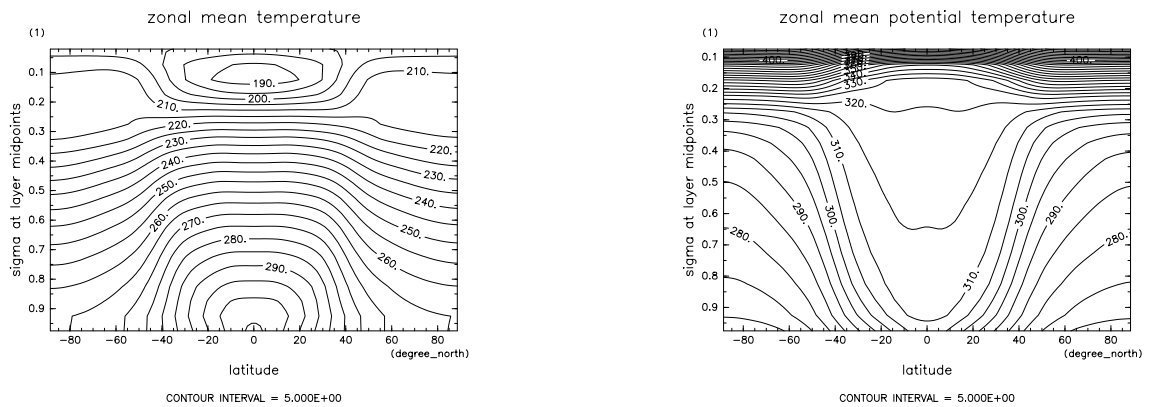


図 3 温度場 T と対応する温位場 θ の帯状・時間平均. HS94 の図 1(c) と (d) に相当する.

図の解説

- 循環の効果により中高緯度で温位面が斜めに傾いており、図 2(右) と比べて図 3(右) では南北勾配が小さくなっている。

HS94 との比較

- HS94 の図との有意な差は見られない。

3.2 帯状風

次に、HS94 の図 2 と比較するために、帯状風速場 u の帯状・時間平均の計算法について記す。

数式表現

前節と同じ平均の定義を用いると、帯状・時間平均した帯状風は以下のように表される。

$$\overline{[u]}(\varphi, \sigma) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda \right\} dt. \quad (46)$$

これを離散化したものは以下ようになる.

帯状・時間平均帯状風

$$\overline{[u]}(\varphi_j, \sigma_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \right\}. \quad (47)$$

描画結果

DCPAM によって生成されたデータに対して、式 (47) の操作を施した結果が図 4 である.

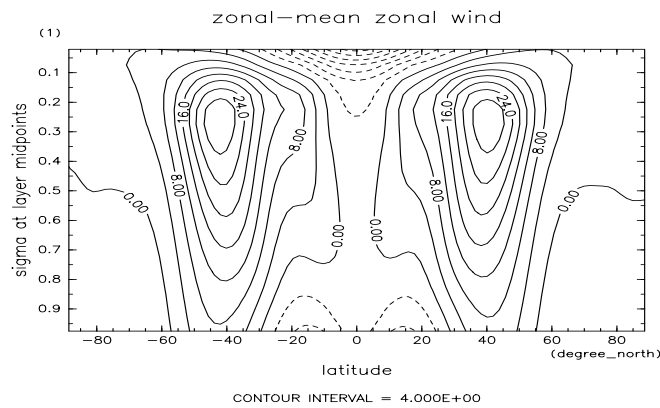


図 4 帯状風速場 u の帯状・時間平均. HS94 の図 2 に相当する.

図の解説

- 緯度 40 度付近に、最大強度 30m/s 程度のシングルジェットが形成されている.
- 赤道域では上層と地表に東風が吹いている.
- $\sigma = 0.2$ より上では急速に風速が落ち、風速の等値線が閉じている.

HS94 との比較

- HS94 に比べて DCPAM の結果は左右の対称性の崩れが大きいように見える.

3.3 温度擾乱の分散

ここでは、HS94 の図 3 と比較するために、温度場 T の擾乱成分の分散の帯状・時間平均の計算法について記す.

数式表現

帯状擾乱を以下のように定義する.

$$A^*(\lambda, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) - [A](\varphi, \sigma, t). \quad (48)$$

この擾乱成分の 2 乗に帯状・時間平均を施したものがここで描いているものである.

$$\overline{[T^{*2}]}(\varphi, \sigma) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T^{*2}(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda \right\} dt. \quad (49)$$

これを離散化して表せば,

$$A^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - [A](\varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (50)$$

よって, 帯状・時間平均した温度擾乱の分散の最終表現は以下ようになる.

帯状・時間平均温度擾乱分散

$$\overline{[T^{*2}]}(\varphi_j, \sigma_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} (T(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - [T](\varphi_j, \sigma_k, t_n))^2 \right\}. \quad (51)$$

描画結果

DCPAM によって生成されたデータに対して, 式 (51) の操作を施した結果が図 5 である.

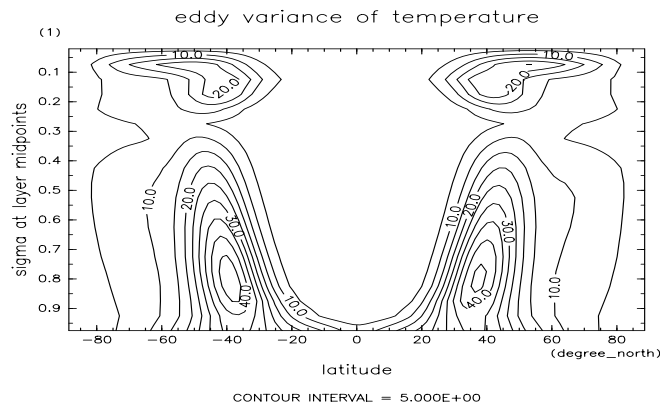


図 5 温度場 T の擾乱成分の分散の帯状・時間平均. HS94 の図 3 に相当する.

図の解説

- 中緯度に 2 つ, 下層と上部境界面付近に温度分散の極大が存在している.
- 地表面付近で温度分散が低緯度に侵入している. HS94 によると, これは現実の地球大気では見られない特徴である.

HS94 との比較

- DCPAM の結果では極大の値が HS94 の結果より 1 割ほど大きくなっている.

- 上端付近でのパターンは HS94 でのスペクトルモデルよりもむしろ格子点モデルと似た様相を示しているが、その値は DCPAM の結果の方がやや大きくなっている。

3.4 帯状風の帯状擾乱スペクトル

ここでは、HS94 の図 4 と比較するために、帯状風速場 u の帯状擾乱スペクトルの時間・鉛直平均の計算法について説明する。

数式表現

経度方向へのフーリエ変換と鉛直平均をそれぞれ以下のように定義する。

$$\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) e^{-\sqrt{-1}m\lambda} d\lambda, \quad (52)$$

$$\langle A \rangle_z(\lambda, \varphi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^0 A(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\sigma. \quad (53)$$

ここで $m \in \mathbb{N}$ は帯状波数であり、その範囲は $0 \leq m \leq I-1$ である。これらを離散化して表せば、

$$\tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{mi}{I}}, \quad (54)$$

$$\langle A \rangle_z(\lambda_i, \varphi_j, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (55)$$

ここで K は鉛直層数である。

帯状風速場 u の帯状擾乱スペクトルとは、帯状風速 u の帯状擾乱成分 u^* にフーリエ変換を施し、その絶対値を 2 乗したものである。これを時間・鉛直平均したものは以下のように表せる。

$$\overline{\langle |u^*|^2 \rangle}_z(m, \varphi) = \int_1^0 \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u^*(\lambda, \varphi, \sigma, t)) e^{-\sqrt{-1}m\lambda} d\lambda \right|^2 dt \right\} d\sigma. \quad (56)$$

これを離散化したものがここで描くものの最終表式である^{*3}。

帯状風の帯状擾乱スペクトルの時間・鉛直平均

$$2\overline{\langle |u^*|^2 \rangle}_z(m, \varphi_j) = \frac{2}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \right\} e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i} \right|^2. \quad (57)$$

$$(1 \leq m \leq \frac{I}{2} - 1)$$

*3 係数 2 が付いている理由など、ここでの表式の詳細は付録 A にて解説する。

描画結果

DCPAM によって生成されたデータに対して、式 (57) の操作を施した結果が図 6 である。

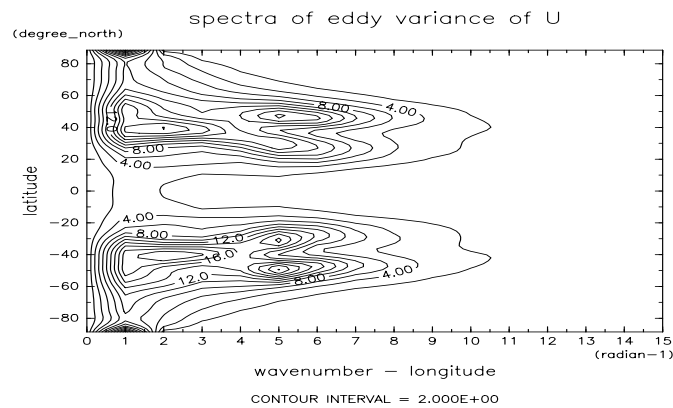


図 6 帯状風速場 u の帯状擾乱スペクトルの時間・鉛直平均. HS94 の図 4 に相当する.

図の解説

- 帯状波数 $m = 5$ に各半球 2 つの極大が存在しており、極側の方が若干強い.
- 帯状波数 $m = 1 \sim 2$ にも 3 つ目の極大が存在している.
- 帯状波数 $m = 1$ では他にも、極に極大が存在している.

HS94 との比較

- HS94 の結果と比べて DCPAM の結果は帯状波数 $m = 1$ あたりで極大の値が若干小さい.
- HS94 の結果と比べて DCPAM の結果は帯状波数 $m = 5$ あたりで極大の値が若干大きい.

4 まとめ

地球流体電脳倶楽部惑星大気大循環モデル DCPAM の力学コアモデル dcpam5-primitive により HS94 で提案された力学コア標準実験を行い, HS94 中の図 1~4 に相当する図を描いた. HS94 で例示されているスペクトルモデルと格子点モデルの図との比較を行ったところ, 定性的にはよく一致していたが, 詳細な定量的観察からいくつかの細かな差異が見出された.

HS94 が提案した力学コア標準実験はその厳密な解は知られておらず, 参照すべき答えのあるテストではない. また, DCPAM は HS94 で例示されている 2 つのモデルと同じ離散化手法を採用していないので, 結果が厳密に一致する必然性はないことに注意されたい.

比較により見出されたモデル間の差異の 1 つは, 温度擾乱の分散の上端付近の分布である. DCPAM の結果は上端で等値線が閉じているのに対し, HS94 中のスペクトルモデルの結果では等値線が上端で開いている点が異なっている. DCPAM の結果はむしろ, 同じように上端付近で等値線が閉じている HS94 中の格子点モデルの結果に似ている. このことは各モデルで用いている鉛直差分に原因があるのかもしれない. HS94 で例示されているスペクトルモデルでは鉛直差分に中心差分を用いているのに対して, DCPAM では鉛直差分に HS94 中の格子点モデルと同じ Arakawa and Suarez(1983) を用いている. 平均温度 (図 3(左) と HS94 中の図 1(c)) においては顕著な違いは見出せなかったのに対して, 擾乱成分の分散では違いが見られるのは興味深い. 原因が鉛直差分にあるか否かを判定するためには, DCPAM において鉛直差分を中心差分に取り換えて結果を比較してみる必要があるだろう. また, DCPAM での分散の極大値 45 が HS94 のスペクトルモデルでの値 40 に比べて 1 割程高いことも指摘しておく.

2 つ目の差異は, 帯状擾乱の帯状スペクトル分布に見られる. HS94 の 2 例と比較すると, DCPAM での結果は低波数側で相対的に小さな値, 高波数側で大きな値となっている. 例えば南半球の極側の高波数側 ($m = 5$) のピークでの値は, HS94 中のスペクトルモデルが 18 であるのに対して DCPAM では 22 となっている. このようなピーク値の差異が有意であるか否かは, より多くの他のモデルの結果との比較や, より長時間積分した時の分布の変動を観察することによって判断することができるかもしれない.

付録 A 帯状風の帯状擾乱スペクトルの計算手順

ここでは Held and Suarez(1994) の図 4 に示されている、帯状風の帯状擾乱のスペクトルの計算手順の詳細を記す。ここで言う帯状風の帯状擾乱スペクトルとは、帯状風の帯状平均からの偏差を経度方向にフーリエ変換した成分の絶対値を 2 乗したものであり、それを時間・鉛直平均した結果が図示されている。

A.1 帯状風の帯状擾乱の計算

まず、帯状風の帯状平均からのずれを計算する^{*4}。

$$u^*(\lambda, \varphi, \sigma, t) = u(\lambda, \varphi, \sigma, t) - [u](\varphi, \sigma, t). \quad (58)$$

ここで、帯状平均は以下のように定義される。

$$[u](\varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda. \quad (59)$$

同様の操作を $u(\lambda, \varphi, \sigma, t) \rightarrow u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)$, ($i, j, k, n \in \mathbf{N}$) のように変数 $u(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ を離散化した状態で表現すると、

$$u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - [u](\varphi_j, \sigma_k, t_n), \quad (60)$$

$$[u](\varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (61)$$

ただし、 I は経度方向の格子点数である。

帯状風の帯状擾乱の計算

$$u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - [u](\varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (62)$$

A.2 スペクトルの計算

このようにして得た帯状擾乱成分 u^* に対して経度方向にフーリエ変換を施し、その絶対値の 2 乗を計算する。

$$\tilde{u}^*(m, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(\lambda, \varphi, \sigma, t) e^{-\sqrt{-1}m\lambda} d\lambda, \quad (63)$$

$$|\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t) = \tilde{u}^*(m, \varphi, \sigma, t) \cdot \tilde{u}^{*\dagger}(m, \varphi, \sigma, t). \quad (64)$$

ここで \dagger は複素共役を表す。これらを離散化すると、

$$\tilde{u}^*(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i}, \quad 0 \leq m \leq I-1 \quad (65)$$

^{*4} 最終的に描こうとしている図は帯状擾乱のスペクトル (= 変動成分のスペクトル) なので、ここでの偏差を計算をせずとも、フーリエ変換した後に帯状平均成分を取り除くことで、同じ結果が得られる。

$$|\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = \tilde{u}^*(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \cdot \tilde{u}^{*\dagger}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (66)$$

ここで $\lambda_i = \frac{2\pi}{I}i$ である。また、ここでのフーリエ変換の定義には実際に用いる FFT ライブラリを想定して、規格化係数 $\frac{1}{2\pi}$ が正変換時につき、波数 m の範囲が $0 \leq m \leq I-1$ となるものを採用した。

スペクトルの計算

$$|\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = \left| \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i} \right|^2. \quad (67)$$

A.3 時間平均・鉛直平均

最後に、時間平均・鉛直平均を施す。

$$\overline{|\tilde{u}^*|^2}(m, \varphi, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+T} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t) dt, \quad (68)$$

$$\langle \overline{|\tilde{u}^*|^2} \rangle_z(m, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^0 \overline{|\tilde{u}^*|^2}(m, \varphi, \sigma) d\sigma. \quad (69)$$

これらを離散化したものは、

$$\overline{|\tilde{u}^*|^2}(m, \varphi_j, \sigma_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n), \quad (70)$$

$$\langle \overline{|\tilde{u}^*|^2} \rangle_z(m, \varphi_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \overline{|\tilde{u}^*|^2}(m, \varphi_j, \sigma_k). \quad (71)$$

よって、

時間・鉛直平均

$$\langle \overline{|\tilde{u}^*|^2} \rangle_z(m, \varphi_j) = \frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n). \quad (72)$$

A.4 擾乱スペクトルの物理的意味付け

ここでスペクトルの計算の箇所へ一歩立ち戻って、描画するものの物理的意味について考える。この箇所ですべて計算した各波数 m 毎のスペクトルを m について和を取ったものは、実は偏差の 2 乗の空間平均 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u^*|^2 d\lambda$ に等しくなっている (Parseval の等式、証明は A.6)。

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u^*|^2(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t). \quad (73)$$

ここで, $u^*(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ は実数関数なので, $\tilde{u}^*(-m, \varphi, \sigma, t) = \tilde{u}^{*\dagger}(m, \varphi, \sigma, t)$ であり, 右辺はさらに片側スペクトルとして表すことができる.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u^*|^2(\lambda, \varphi, \sigma, t) d\lambda = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t) \quad (74)$$

$$= \tilde{u}^{*2}(0, \varphi, \sigma, t) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi, \sigma, t). \quad (75)$$

この式の離散的な場合に対応する表現は, 連続の場合と同様に $u^*(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)$ が実数関数であることを仮定して得られる離散型の Parseval の等式

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} |u^*|^2(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) = |\tilde{u}^*|^2(0, \varphi_j, \sigma_k, t_n) + 2 \sum_{m=1}^{+I/2-1} |\tilde{u}^*|^2(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) + |\tilde{u}^*|^2\left(\frac{I}{2}, \varphi_j, \sigma_k, t_n\right), \quad (76)$$

である (A.6 を参照). この意味で, $2|\tilde{u}^*|^2(1 \leq m \leq \frac{I}{2} - 1)$ は偏差の 2 乗の緯度平均 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u^*|^2 d\lambda$ の波数 m 成分であると言える. 以上の理由により, 式 (72) を 2 倍し, これを $0 \leq m \leq 15$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ の範囲でプロットしたものが Held and Suarez(1994) の図 4 である.

帯状風の帯状擾乱スペクトル

$$2\langle |\tilde{u}^*|^2 \rangle_z(m, \varphi_j) = \frac{2}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) - \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} u(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \right\} e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i} \right|^2. \quad (77)$$

$(1 \leq m \leq \frac{I}{2} - 1)$

A.5 描画プログラム

以上のようにして得られた離散式をコーディングした一例として、`Ruby` の `gphys`[7] を利用した描画プログラムを載せる。メモリーの制約のため、各 σ について分割して今まで述べてきた計算をしている。各操作は独立なので、このような分割に何ら問題はない。また、図 4 では $m = 15$ 以降は表示していない。実際、それ以降の部分は振幅が小さく、計算量の削減のためには早めの段階で $m \geq 15$ の成分を捨てておくのが良い。

figure4 描画プログラム

```
# draw vertically averaged zonal spectra of the eddy variance of zonal wind
#
# 更新履歴
# 2009/03/29 納多 哲史 新規作成
# 2010/09/22 野口 峻佑 修正 (規格化, factor 2, each_sig)+ コメント

def help()
  print "Usage: ruby ",$0," file varname\n"
end

require "numru/ggraph"
include NumRu

# 引数のチェック
if ARGV[0] == "-h" or ARGV[0] == "--help" then
  help(); exit 0
elsif ARGV.length != 2 then
  puts "ERROR: The number of argument is invalid."
  help(); exit 1
end

file = ARGV[0]
varname = ARGV[1]

if !FileTest.file?(file) then
  puts "ERROR: No such file."
  exit 2
end

gphys = GPhys::IO.open(file, varname)
gphys = gphys.cut('time'=>200..1200) # スピンアップ時間のカット

# 一度に計算しようとするメモリが足りないため、各 sigma 面毎に分割して実行する

each_sig = NetCDF.create('each_sig_U.nc') # 各 sigma 面に分割し、計算した値を掃き出すファイル

GPhys::NetCDF_IO.each_along_dims_write(gphys,each_sig,"sig"){
|each_sig_gphys|
  each_sig_gphys = (each_sig_gphys - each_sig_gphys.mean('lon')) # 擾乱成分の計算
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.fft(nil, 0) # lon 方向へ FFT, フーリエ係数を得る
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.abs**2 # 絶対値の 2 乗
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.rawspect2powerspect(0) #
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.spect_zero_centering(0) # 0 < m < I-1 --> -I/2 < m < I/2
  each_sig_gphys = 2*each_sig_gphys # factor 2
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.cut('lon'=>0..15) # 表示するのは東西波数 15 まで
  each_sig_gphys = each_sig_gphys.mean('time') # 時間平均
  [each_sig_gphys] # [u*2] (m,lat,sig) をいったんファイルに書き出し
}
each_sig.close

# いったんファイルを閉じて...
gphys = GPhys::IO.open('each_sig_U.nc',varname) # もう一度読み込んで
gphys = gphys.mean('sig') # 鉛直平均

DCL.swcset('fname',"fig4")
DCL.groprn(2)
GGraph.set_fig('viewport'=>[0.15,0.80,0.15,0.6])
DCL.sgpset('lfull',true) # 全画面表示
DCL.sgpset('lcntl', false); DCL.uzfact(0.6)
GGraph.set_linear_contour_options('interval'=>2.0)
GGraph.contour(gphys,'annotate'=>false,'title'=>"spectra of eddy variance of U")
DCL.grcls
```

A.6 Parseval の等式の証明

Parseval の等式は、ある物理量について

$$(\text{実空間における物理量の 2 乗平均}) = (\text{各波数成分の絶対値の 2 乗和}) \quad (78)$$

であることを表している。実空間での物理量を $A(\lambda, \varphi, \sigma, t)$ 、波数空間での物理量を $\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t)$ と表すと、フーリエ正変換・逆変換の定義 (再掲) はそれぞれ、

$$\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \varphi, \sigma, t) e^{-\sqrt{-1}m\lambda} d\lambda, \quad (79)$$

$$A(\lambda, \varphi, \sigma, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t) e^{\sqrt{-1}m\lambda}. \quad (80)$$

以降、今の操作に φ, σ, t は関係ないのでそれぞれ $A(\lambda)$ 、 $\tilde{A}(m)$ と略記する。

振幅の 2 乗を定義通りに代入していけば、

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m) e^{\sqrt{-1}m\lambda} \right\} \left\{ \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}^\dagger(m') e^{-\sqrt{-1}m'\lambda} \right\} d\lambda \quad (81)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m') \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}(m-m')\lambda} d\lambda \quad (82)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m') \delta_{m-m', 0} \quad (83)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m) \quad (84)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{A}(m)|^2. \quad (85)$$

$$(86)$$

さらに A が実数ならば、 $\tilde{A}^\dagger(m) = \tilde{A}(-m)$ なので、

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{A}(m)|^2 = \tilde{A}^2(0) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} |\tilde{A}(m)|^2. \quad (87)$$

よって、

Parseval の等式 (連続版)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A(\lambda, \varphi, \sigma, t)|^2 d\lambda = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t)|^2 \quad (88)$$

$$= \tilde{A}^2(0, \varphi, \sigma, t) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} |\tilde{A}(m, \varphi, \sigma, t)|^2. \quad (\text{ただし } A \text{ が実数の場合}) \quad (89)$$

これと同じことを離散的に行えば、正変換と逆変換はそれぞれ、

$$\tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum_{m=0}^{I-1} A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{-\sqrt{-1}m\lambda_i}, \quad (90)$$

$$A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{I-1} \tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n) e^{\sqrt{-1}m\lambda_i}. \quad (91)$$

ここで $\lambda_i = \frac{2\pi}{I}i$ である。以降、同様に冗長なので $A(\lambda_i)$, $\tilde{A}(m)$ で略記する。

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} |A(\lambda_i)|^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ \sum_{m=0}^{I-1} \tilde{A}(m) e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m\lambda}{I}} \right\} \left\{ \sum_{m'=0}^{I-1} \tilde{A}^\dagger(m') e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{m'\lambda}{I}} \right\} d\lambda \quad (92)$$

$$= \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{m'=0}^{I-1} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m') \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m-m'}{I}i} \right\}^i. \quad (93)$$

ここで

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \left\{ e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m-m'}{I}i} \right\}^i = \begin{cases} (1+1+\cdots+1)/I = I/I = 1 & (m-m'=0 \text{ の場合}) \\ \frac{1}{I} \frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m-m'}{I}I} - 1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{m-m'}{I}} - 1} = 0 & (m-m' \neq 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

($0 \leq m \leq I-1$, $0 \leq m' \leq I-1$ から $m-m' \neq I$ であることに注意されたい) であることから、

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} |A(\lambda_i)|^2 = \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{m'=0}^{I-1} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m') \delta_{m-m',0} \quad (94)$$

$$= \sum_{m=0}^{I-1} \tilde{A}(m) \tilde{A}^\dagger(m) \quad (95)$$

$$= \sum_{m=0}^{I-1} |\tilde{A}(m)|^2. \quad (96)$$

さらに $A(\lambda_i)$ が実数の場合には、 $\tilde{A}^\dagger(m) = \tilde{A}(-m)$ であり、

$$\sum_{m=0}^{I-1} |\tilde{A}(m)|^2 = \sum_{m=0}^{I/2-1} |\tilde{A}(m)|^2 + \sum_{m=I/2}^{I-1} |\tilde{A}(m)|^2, \quad (97)$$

$$= \sum_{m=0}^{I/2-1} |\tilde{A}(m)|^2 + \sum_{\tilde{m}=1}^{I/2} |\tilde{A}(-\tilde{m})|^2, \quad (98)$$

$$= |\tilde{A}(0)|^2 + 2 \sum_{m=1}^{I/2-1} |\tilde{A}(m)|^2 + |\tilde{A}(\frac{I}{2})|^2. \quad (99)$$

途中、 $m = I - \tilde{m}$ の変換を第 2 項目に適用し、

$$\tilde{A}(m) = \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i) e^{-\sqrt{-1}(I-\tilde{m})\frac{2\pi i}{I}} \quad (100)$$

$$= \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i) e^{\sqrt{-1}\tilde{m}\frac{2\pi i}{I}} (e^{-2\pi\sqrt{-1}})^i \quad (101)$$

$$= \sum_{i=0}^{I-1} A(\lambda_i) e^{\sqrt{-1}\tilde{m}\lambda_i} \quad (102)$$

$$= \tilde{A}(-\tilde{m}). \quad (103)$$

であることを用いた.

Parseval の等式 (離散版)

$$\frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} |A(\lambda_i, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2 = \sum_{m=0}^{I-1} |\tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2 \quad (104)$$

$$= |\tilde{A}(0, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2 + 2 \sum_{m=1}^{I/2-1} |\tilde{A}(m, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2 + |\tilde{A}(\frac{I}{2}, \varphi_j, \sigma_k, t_n)|^2.$$

(ただし A が実数の場合)

(105)

付録 B Held and Suarez(1994) 図表

ここでは, Held and Suarez(1994) の図 1~4 を示す.

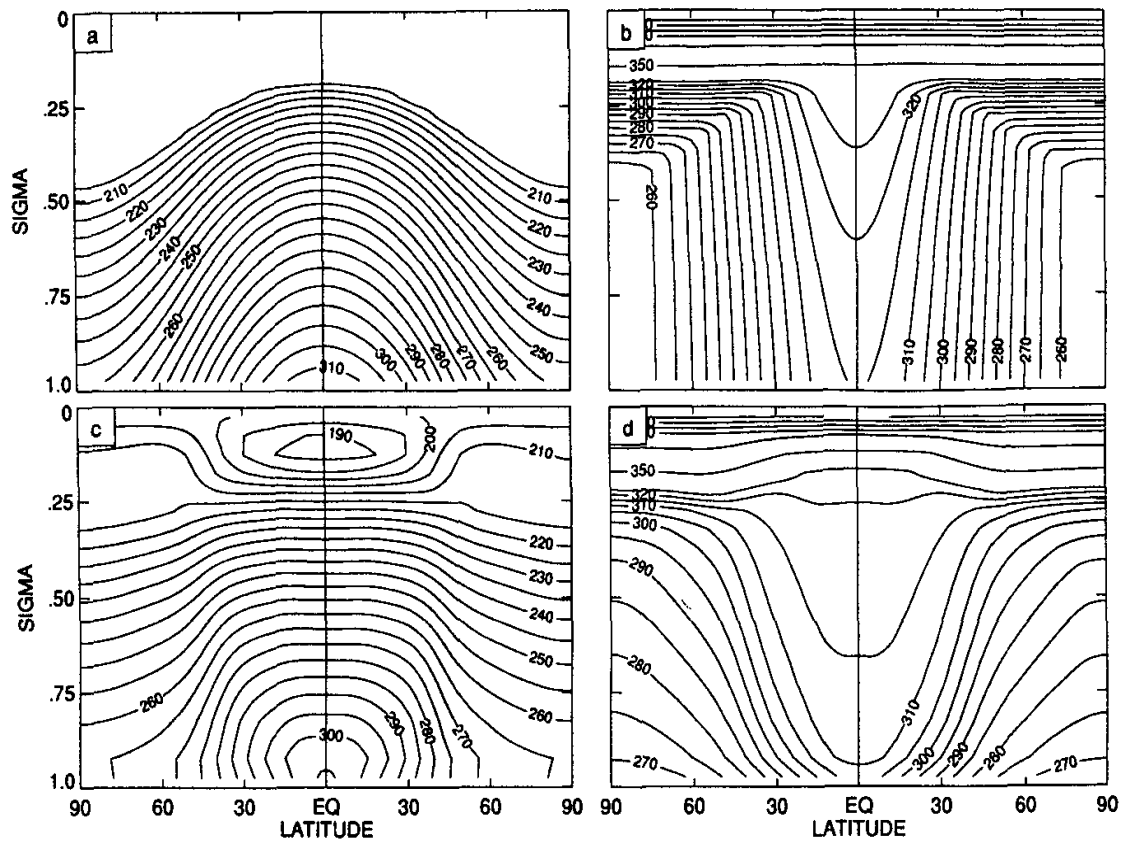


FIG. 1. The upper panels contain the prescribed radiative equilibrium temperature (a) and potential temperature (b) distributions. The lower panels contain 1000-day averages of the zonal mean temperature (c) and potential temperature (d) distributions produced by the G72 gridpoint model.

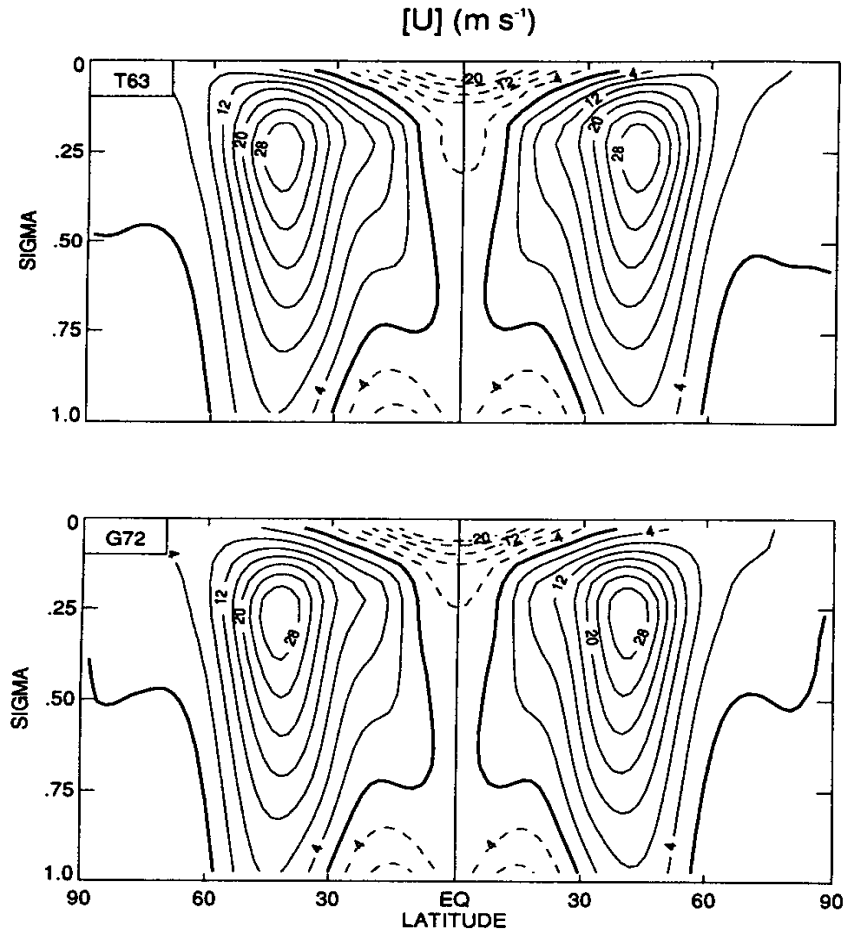


FIG. 2. The zonal-mean zonal wind produced by the T63 spectral model and G72 gridpoint model. Both are 1000-day means. Since the forcing is symmetric about the equator, differences between the hemispheres are indicative of sampling errors.

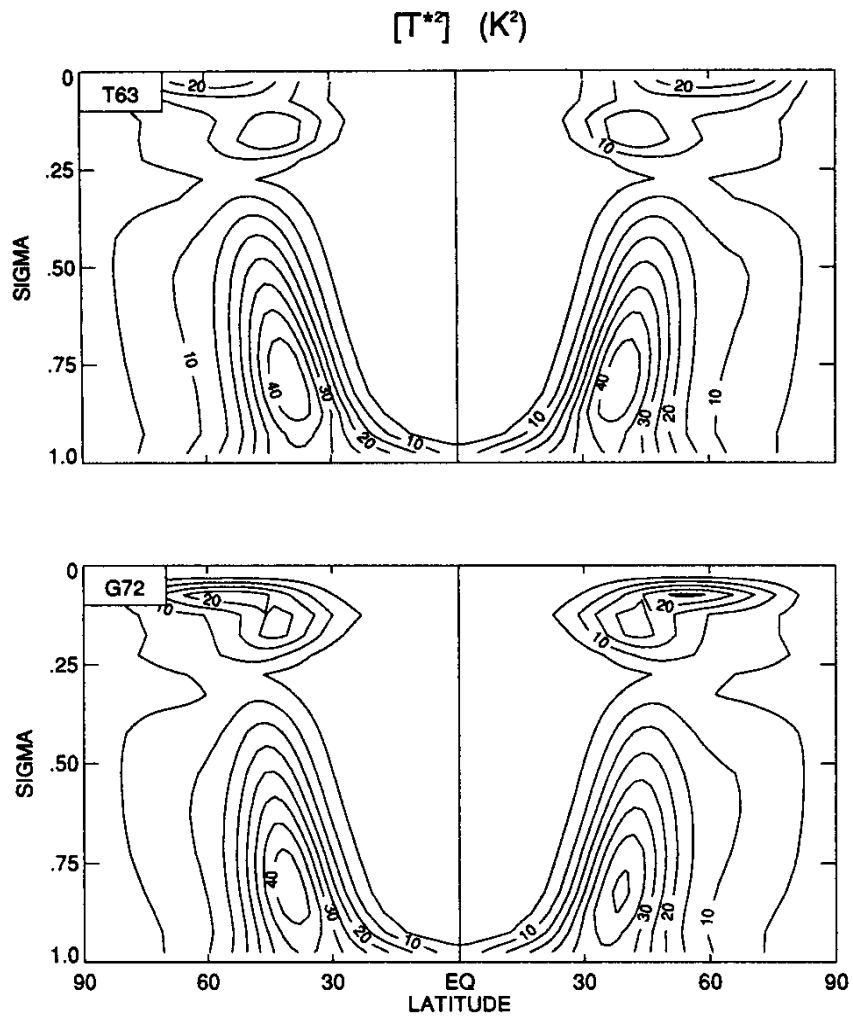


FIG. 3. As in Fig. 2 but for the eddy variance of the temperature.

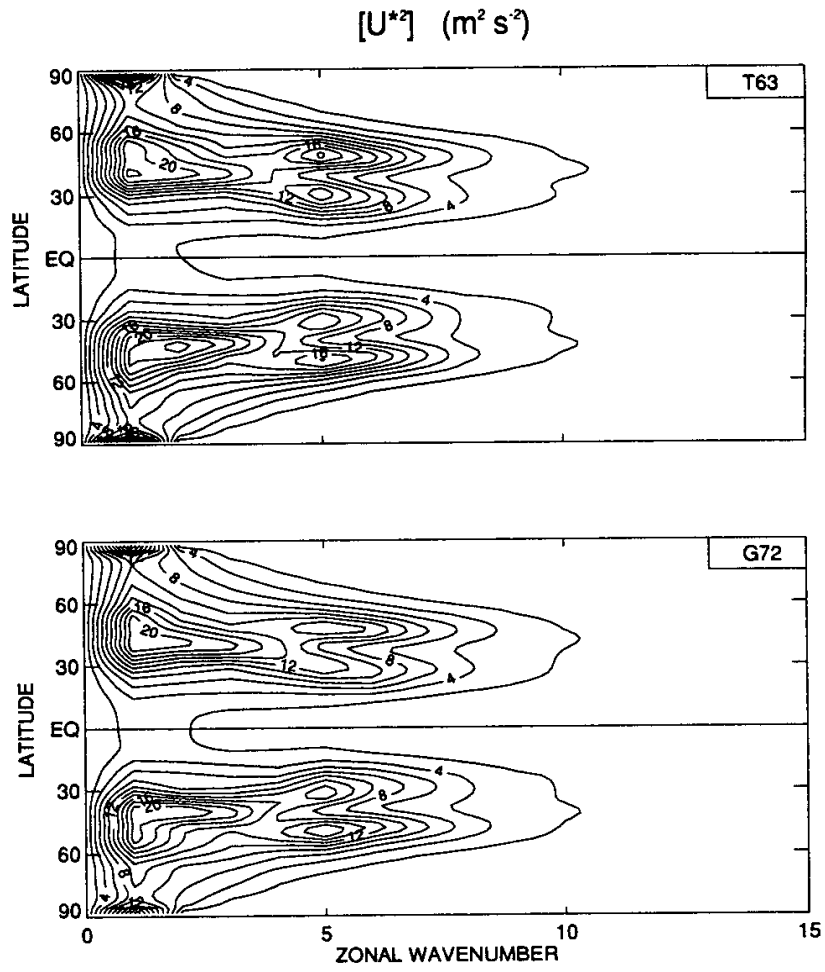


FIG. 4. As in Fig. 2 but for the vertically averaged zonal spectra of the eddy variance of zonal wind.

参考文献

- [1] 森川 靖大, 石渡 正樹, 高橋 芳幸, 土屋 貴志, 山田 由貴子, 小高 正嗣, 堀之内 武, 林 祥介, DCPAM 開発グループ, 2008: 惑星大気モデル DCPAM, <http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/>, 地球流体電脳倶楽部.
- [2] Held, I. M., and Suarez, M. J., 1994: A proposal for the intercomparison of the dynamical cores of atmospheric general circulation models. *Bull. Am. Meteor. Soc.*, **75**, 1825–1830.
- [3] http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf
- [4] http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf
- [5] Arakawa, A., and Suarez, M. J., 1983: Vertical Differencing of the Primitive Equations in Sigma Coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 34-45.
- [6] Asselin, R., 1972: Frequency Filter for Time Integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487-490.
- [7] 堀之内 武, 水田 亮, 塚原 大輔, 西澤 誠也, 竹広 真一: 電脳 Ruby プロジェクト: GPhys, <http://ruby.gfd-dennou.org/products/gphys/>